

## СПИРАЛЬНЫЕ ВАКУУМНЫЕ ТОКИ КВАНТОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛЯХ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ ПРОСТРАНСТВА

А.А. СААРЯН<sup>1\*</sup>, Д.А. СИМОНЯН<sup>1</sup>, А.Г. МИКАЕЛЯН<sup>1</sup>, А.А. ВАНЦЯН<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

<sup>2</sup>Институт механики НАН Республики Армения, Ереван, Армения

\*e-mail: saharian@ysu.am

(Поступила в редакцию 13 декабря 2023 г.)

Исследовано вакуумное среднее плотности тока массивного скалярного поля в  $(D+1)$ -мерном плоском пространстве-времени с компактным измерением. Вдоль компактного измерения оператор поля удовлетворяет спиральному условию квазипериодичности с постоянной фазой. В частном случае нулевого параметра спиральности получаются результаты, ранее исследованные в литературе. В отличие от этого случая, вакуумный ток, наряду с компонентой вдоль компактного измерения, имеет ненулевую компоненту по направлению некомпактного измерения, вдоль которого смещается оператор поля. Получено простое соотношение между этими компонентами. Они являются нечетными периодическими функциями магнитного потока, пронизывающего компактное измерение с периодом, равным кванту магнитного потока. При заданном ненулевом значении параметра спиральности компонента вакуумного тока вдоль компактного измерения стремится к нулю в пределе, когда длина этого измерения стремится к нулю. В рассмотренной ранее проблеме с обычным квазипериодическим условием в этом пределе вакуумный ток расходится.

### 1. Введение

В квантовой теории поля, граничные условия или условия периодичности, наложенные на оператор поля, изменяют спектр вакуумных флуктуаций. Это приводит к изменению средних значений физических величин, характеризующих вакуумное состояние. Подобная задача для электромагнитного поля в геометрии плоскопараллельных проводящих границ впервые была рассмотрена Казимиром в 1948 году. В дальнейшем эффект Казимира рассматривался для различных полей, различных граничных условий, а также на фоне различных геометрий пространства-времени (см. [1–4] и приведенные там ссылки). В большинстве работ в качестве физической характеристики вакуумного состояния рассматривается энергия вакуума. В моделях с достаточно высокой симметрией энергия вакуума определяет вакуумные силы, действующие на границы, ограничивающие объем квантования. Более подробной характеристикой является вакуумное среднее тензора энергии-импульса, определяющего распределение плотности энергии и вакуумные натяжения. Важность тензора энергии-импульса заключается и в том, что он является источником гравитационного поля в

уравнениях Эйнштейна.

Для заряженных квантовых полей другой важной характеристикой вакуумного состояния является среднее значение плотности тока. Оно выступает в качестве источника электромагнитного поля в уравнениях Максвелла в полуклассической теории, где электромагнитное поле описывается классически. Вакуумные средние плотности тока для скалярных и фермионных полей в плоском пространстве-времени с тороидально компактными пространственными измерениями рассматривались в работах [5, 6]. Дополнительные эффекты, обусловленные наличием плоских границ исследовались в [7, 8]. В этих работах накладывались квазипериодические условия на оператор поля вдоль компактных измерений и вакуумные токи имеют ненулевые компоненты только вдоль этих измерений.

В настоящей работе рассмотрено вакуумное среднее плотности тока для скалярного поля в простой модели с одним компактным измерением для более общего спирального условия квазипериодичности. Эффекты подобных условий (с нулевой фазой) в моделях Калуцы–Клейна с большими дополнительными измерениями рассматривались в работах [9, 10]. Топологический эффект Казимира в моделях с компактными измерениями и со спиральными периодическими условиями исследовался в [11–17]. В качестве физической характеристики в этих работах рассматривалась энергия вакуума.

Статья построена следующим образом. В следующем разделе приведена постановка задачи и представлена полная система решений классического уравнения поля, удовлетворяющих спиральному условию квазипериодичности. В разделе 3 эти решения использованы для вывода перенормированного вакуумного значения плотности тока. Регуляризация и перенормировка проведены методом обобщенной дзета функции. Свойства компонент плотности тока рассмотрены в разделе 4. В статье использована система единиц  $c = 1$  и  $\hbar = 1$ .

## 2. Формулировка задачи и моды скалярного поля

Рассмотрим скалярное поле  $\phi(x)$  в  $(D+1)$ -мерном плоском пространстве-времени с топологией  $R^{D-1} \times S^1$ . В декартовых пространственных координатах соответствующий интервал имеет вид  $ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^D (dx^i)^2$ , где  $-\infty < x^i < \infty$ ,  $i = 2, \dots, D$ , а координата  $x^1$  компактифицирована на окружность длины  $a$ :  $0 \leq x^1 \leq a$ . При наличии классического калибровочного векторного поля  $A_\mu$  уравнение скалярного поля имеет вид

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi(x) = 0, \quad (1)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$  – ковариантная производная, а  $e$  – постоянная связи между скалярным и векторным полями (заряд кванта поля),  $m$  – масса поля. Фоновая геометрия имеет нетривиальную топологию и наряду с уравнением поля следует задать также условие периодичности вдоль компактного измерения. Здесь мы рассмотрим спиральное квазипериодическое условие

$$\phi(t, x^1 + a, x^2, \mathbf{x}_\perp) = e^{i\alpha} \phi(t, x^1, x^2 + h, \mathbf{x}_\perp), \quad (2)$$

с постоянной фазой  $\alpha$  и с постоянным смещением  $h$  (параметр спиральности).

Здесь и далее введено обозначение  $\mathbf{x}_\perp = (x^3, \dots, x^D)$ . В частном случае  $h = 0$  условие (2) сводится к обычному условию квазипериодичности, исследованном в работах [7, 8].

В данной работе мы рассмотрим простейшую конфигурацию векторного поля с постоянным векторным потенциалом  $A_\mu = \text{const}$ . В этом случае векторное поле можно исключить из уравнения для скалярного поля калибровочным преобразованием  $(A_\mu, \varphi) \rightarrow (A'_\mu, \varphi')$  с функцией  $\omega = A_\mu x^\mu$ :

$$A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu \omega, \quad \varphi(x) = e^{-ie\omega} \varphi'(x). \quad (3)$$

В новой калибровке  $A'_\mu = 0$  и  $D'_\mu = \partial_\mu$ , а условие квазипериодичности для нового скалярного поля примет вид

$$\varphi'(t, x^1 + a, x^2, \mathbf{x}_\perp) = e^{i\tilde{\alpha}} \varphi'(t, x^1, x^2 + h, \mathbf{x}_\perp), \quad (4)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \alpha + eA_1 a - eA_2 h. \quad (5)$$

Ниже будет показано, что вакуумный ток зависит от фазы  $\alpha$  и компонент  $A_1$  и  $A_2$  векторного потенциала через комбинацию (5). Несмотря на то, что тензор поля  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  равен нулю для рассматриваемой конфигурации калибровочного поля, постоянные компоненты  $A_1$  и  $A_2$  имеют физические последствия. Это связано с нетривиальной топологией пространства и является эффектом типа Ааронова-Бома. Заметим, что условие (4) можно переписать в виде

$$\varphi'(t, x^1, x^2 + h, \mathbf{x}_\perp) = e^{-i\tilde{\alpha}} \varphi'(t, x^1 + a, x^2, \mathbf{x}_\perp). \quad (6)$$

Это условие можно интерпретировать как условие спиральной квазипериодичности в модели с компактным измерением  $x^2$  с длиной  $h$ , с параметром спиральности  $a$  и с фазой  $-\tilde{\alpha}$ . Дальнейшее изложение статьи проведено в терминах калибровочно преобразованного поля  $\varphi'(x)$  опуская штрихи.

Для вычисления вакуумного среднего плотности тока понадобится полная система положительно и отрицательно частотных решений уравнения поля, удовлетворяющих условию квазипериодичности. В качестве такой системы будет использован набор  $\varphi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(x)$ , описывающий состояния с определенным значением импульса  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \mathbf{k}_\perp)$ , где  $\mathbf{k}_\perp = (k_3, \dots, k_D)$  и  $-\infty < k_i < +\infty$ ,  $i = 2, \dots, D$ . Соответствующие модовые функции с энергией  $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \mathbf{k}_\perp^2 + m^2}$  имеют вид

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(x) = N_{\mathbf{k}} e^{ik_1 x^1 + ik_2 x^2 + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp \mp iE_{\mathbf{k}} t}. \quad (7)$$

Собственные значения компоненты импульса  $k_1$  определяются из условия (4):

$$k_1 = \frac{2\pi n + \tilde{\alpha}}{a} + k_2 \frac{h}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Из условия ортонормировки

$$\int d^D x \varphi_{\mathbf{k}}^*(x) \varphi_{\mathbf{k}'}(x) = \frac{\delta_{m'}}{2E_{\mathbf{k}}} \delta(k_2 - k_2') \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \quad (9)$$

для коэффициента нормировки находим

$$|N_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{(2\pi)^{1-D}}{2aE_{\mathbf{k}}}. \quad (10)$$

В следующем параграфе моды (7) использованы для вычисления вакуумного среднего плотности тока.

### 3. Вакуумное среднее плотности тока

Оператор плотности тока заряженного скалярного поля определяется выражением

$$j_{\mu}(x) = -ie[\varphi^{+}(x)D_{\mu}\varphi(x) - (D_{\mu}\varphi^{+}(x))\varphi(x)], \quad (11)$$

где в рассматриваемой калибровке  $D_{\mu}\varphi = \partial_{\mu}\varphi$ . Подставим сюда разложение оператора поля

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dk_2 \int d\mathbf{k}_{\perp} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}(x) + \hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\varphi_{\mathbf{k}}^{(-)}(x) \right], \quad (12)$$

где  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  и  $\hat{b}_{\mathbf{k}}$  операторы рождения и уничтожения квантов поля. Для вакуумного состояния  $|0\rangle$  имеют место соотношения  $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$  и  $\langle 0|\hat{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger} = 0$ . С помощью этих соотношений нетрудно показать, что вакуумное среднее  $\langle j_{\mu}(x) \rangle = \langle 0|j_{\mu}(x)|0\rangle$  представится в виде

$$\langle j_{\mu} \rangle = -\frac{e}{(2\pi)^{D-1}a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int dk_2 \int d\mathbf{k}_{\perp} \frac{k_{\mu}}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что  $\langle j_{\mu} \rangle = 0$  для компонент  $\mu = 3, \dots, D$ .

Для вычисления перенормированных значений вакуумных средних  $\langle j_l \rangle$ ,  $l = 1, 2$ , необходима регуляризация соответствующих выражений (13). Здесь мы воспользуемся методом обобщенной дзета функции (см., например, [18, 19]). Введем функцию

$$F_l(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int dk_2 \int d\mathbf{k}_{\perp} \frac{k_l}{E_{\mathbf{k}}^s}, \quad l = 1, 2, \quad (14)$$

комплексной переменной  $s$ , где энергия дается выражением

$$E_{\mathbf{k}} = \left[ \left( \frac{2\pi n + \tilde{\alpha}}{a} + k_2 \frac{h}{a} \right)^2 + k_2^2 + \mathbf{k}_{\perp}^2 + m^2 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Выражение в правой части (14) является конечным в области  $\text{Re } s > D + 1$  комплексной плоскости  $s$ . Интегрирование по  $\mathbf{k}_{\perp}$  проводится с помощью формулы, приведенной в [20]:

$$F_l(s) = \pi^{\frac{D}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s-D}{2} + 1\right)}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int dk_2 \frac{k_l}{(k_1^2 + k_2^2 + m^2)^{\frac{s-D}{2}+1}}. \quad (16)$$

Интегрирование по  $k_2$  проводится введением новой переменной интегрирования

$$u = k_2 + ahk_{(n)} / (a^2 + h^2), \quad (17)$$

где  $k_{(n)} = (2\pi n + \tilde{\alpha}) / a$ . В результате получим следующее выражение для функции  $F_1(s)$ :

$$F_1(s) = \pi^{\frac{D-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1-D}{2}\right)}{\Gamma(s/2)} \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)^{\frac{s-D}{2}-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_{(n)}}{\left[k_{(n)}^2 + (1 + h^2/a^2)m^2\right]^{\frac{s-D+1}{2}}}. \quad (18)$$

Функция  $F_2(s)$  выражается через функцию  $F_1(s)$ :

$$F_2(s) = -\frac{h}{a} F_1(s). \quad (19)$$

Таким образом, вычисление перенормированной плотности тока сводится к аналитическому продолжению выражения в правой части (18).

Для дальнейшего преобразования представим выражение (18) в виде

$$F_1(s) = -\frac{\pi^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1-D}{2}\right) a^2}{2\Gamma(s/2)(a^2 + h^2)^{\frac{D-s}{2}+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ (2\pi n + \tilde{\alpha})^2 + (a^2 + h^2)m^2 \right]^{\frac{D-s+1}{2}}. \quad (20)$$

Заметим, что ряд в правой части (20) соответствует дзета функции для плотности энергии вакуума. Плотность энергии и натяжения вакуума в эффекте Казимира при наличии компактных измерений рассматривались в работах [21, 22]. Для аналитического продолжения ряда формулы (20) в физическую точку  $s = 1$  воспользуемся формулой Чоула-Селберга (см., например, [23, 24])

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ (n+b)^2 + c \right]^{-p} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(p)c^{p-\frac{1}{2}}} \left[ \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + 2^{\frac{5}{2}-p} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nb) f_{\frac{1}{2}-p}\left(2\pi n\sqrt{c}\right) \right], \quad (21)$$

с параметрами  $b = \tilde{\alpha} / 2\pi$ ,  $c = (a^2 + h^2)(m/2\pi)^2$  и  $p = (s - D - 1)/2$ . В (21) введено обозначение

$$f_{\mu}(x) = x^{-\mu} K_{\mu}(x), \quad (22)$$

с функцией Макдональда  $K_{\mu}(x)$ . Для функции (20) получим следующее представление

$$F_1(s) = -\frac{a^2 m^{D+2-s}}{4\pi^{\frac{1-D}{2}} \Gamma(s/2)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \left[ \Gamma\left(\frac{s-D}{2} - 1\right) + 2^{3+\frac{D-s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\tilde{\alpha}) f_{\frac{D-s}{2}+1}\left(nm\sqrt{a^2 + h^2}\right) \right]. \quad (23)$$

Расходимость в точке  $s = 1$  (для нечетных значений  $D$ ) содержится только в первом слагаемом в выражении в квадратных скобках (23). Это слагаемое не зависит от  $\tilde{\alpha}$  и обращается в нуль после дифференцирования по  $\tilde{\alpha}$ . Таким образом, для значения функции  $F_1(s)$  в физической точке  $s = 1$  получим

$$F_1(1) = 4(2\pi)^{\frac{D-3}{2}} a^2 m^{D+1} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\tilde{\alpha}) f_{\frac{D+1}{2}}\left(nm\sqrt{a^2 + h^2}\right). \quad (24)$$

Выражение для вакуумного среднего контравариантной компоненты тока вдоль компактного измерения примет вид

$$\langle j^1 \rangle = \frac{4eam^{D+1}}{(2\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\tilde{\alpha}) f_{\frac{D+1}{2}} \left( nm\sqrt{a^2 + h^2} \right). \quad (25)$$

Контравариантная компонента  $\langle j^2 \rangle$  получается из соотношения (19):

$$\langle j^2 \rangle = -\frac{h}{a} \langle j^1 \rangle. \quad (26)$$

В частном случае  $h = 0$  компонента вдоль некомпактного измерения обращается в нуль,  $\langle j^2 \rangle = 0$ , а выражение (25) сводится к формуле полученной в работе [5]. Соотношение (26) между компонентами вакуумного тока следовало бы ожидать на основе указанной выше симметрии между рассмотренной задачей и задачей с длиной компактного измерения  $h$ , с параметром спиральности  $a$  и с фазой  $-\tilde{\alpha}$ .

#### 4. Свойства вакуумного тока и численный анализ

Плотность вакуумного тока является нечетной функцией магнитного потока, пронизывающего компактное измерение, с периодом, равным кванту магнитного потока. В случае безмассового поля, с помощью асимптотического выражения  $f_{\mu}(x) \approx 2^{\mu-1} \Gamma(\mu) x^{-2\mu}$ ,  $x \ll 1$ , формула для плотности тока представится в виде

$$\langle j^1 \rangle = \frac{2eaA_D(\tilde{\alpha})}{(a^2 + h^2)^{\frac{D+1}{2}}}, \quad (27)$$

где введено обозначение

$$A_D(\tilde{\alpha}) = \frac{2\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{D+1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\tilde{\alpha})}{n^D}. \quad (28)$$

Для нечетных значений  $D$  сумма ряда выражается через полиномы Бернулли  $B_n(x)$  и для коэффициента в (27) получим

$$A_D(\tilde{\alpha}) = \frac{(-1)^{\frac{D+1}{2}} \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(D/2+1)} B_D\left(\frac{\tilde{\alpha}}{2\pi}\right), \quad (29)$$

где  $0 \leq \tilde{\alpha} \leq 2\pi$ . В частности, при  $D = 3, 5, 7$  имеем

$$\begin{aligned} A_3(\tilde{\alpha}) &= \frac{4\pi}{3} y(y-1) \left( y - \frac{1}{2} \right), \quad A_5(\tilde{\alpha}) = -\frac{2\pi}{5} A_3(\tilde{\alpha}) \left( y^2 - y - \frac{1}{3} \right), \\ A_7(\tilde{\alpha}) &= \frac{4\pi^2}{35} A_3(\tilde{\alpha}) \left( y^4 - 2y^3 + y + \frac{1}{3} \right), \quad y = \frac{\tilde{\alpha}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (30)$$

На рис.1 изображена зависимость функции  $A_D(\tilde{\alpha})$  от  $y = \tilde{\alpha}/2\pi$  для различных значений  $D$  (числа возле кривых). Зависимость от  $D$  при дальнейшем увеличении  $D$  слаба.

В пределе  $m\sqrt{a^2 + h^2} \gg 1$  основной вклад в (25) обусловлен слагаемым  $n = 1$ . С помощью асимптотического выражения для функции Макдональда при

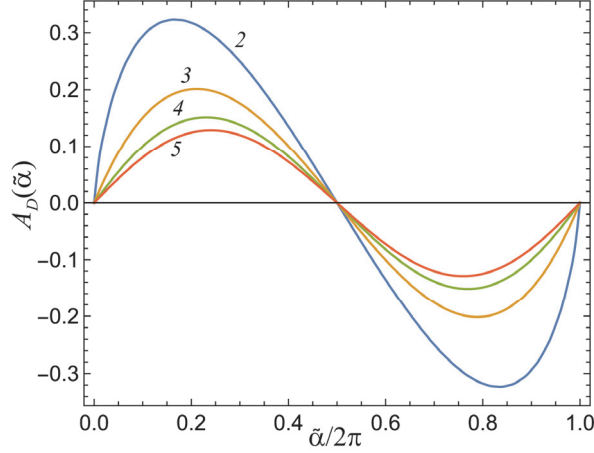


Рис.1. Функция  $A_D(\tilde{\alpha})$  в выражении для плотности тока безмассового скалярного поля для различных значений размерности пространства (числа возле кривых).

больших значений аргумента (см., например, [25]) находим

$$\langle j^1 \rangle \approx \frac{2eam^{D/2}e^{-m\sqrt{a^2+h^2}} \sin \tilde{\alpha}}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}(a^2+h^2)^{\frac{D+2}{4}}}. \quad (31)$$

В этом приближении плотность вакуумного тока экспоненциально мала. При заданном значении массы формула (31) описывает поведение плотности тока при больших значениях длины  $\sqrt{a^2+h^2}$ . В отличие от случая безмассового поля, где плотность тока стремится к нулю по степенному закону, для массивного поля имеет место экспоненциальное подавление. При  $h \ll a$  главные члены асимптотических разложений компонент плотности тока имеют вид

$$\langle j^1 \rangle \approx \frac{4eam^{D+1}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\tilde{\alpha}) f_{(D+1)/2}(nma), \quad \langle j^2 \rangle = -\frac{h}{a} \langle j^1 \rangle, \quad (32)$$

и  $|\langle j^2 \rangle| \ll |\langle j^1 \rangle|$ . В обратном пределе,  $a \ll h$ , имеют место оценки

$$\langle j^1 \rangle = -\frac{a}{h} \langle j^2 \rangle, \quad \langle j^2 \rangle \approx -\frac{4ehm^{D+1}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n\tilde{\alpha}) f_{(D+1)/2}(nmh), \quad (33)$$

и  $|\langle j^1 \rangle| \ll |\langle j^2 \rangle|$ .

Зависимость компоненты  $\langle j^1 \rangle$  вакуумной плотности тока от параметров  $a$  и  $h$  приведена на рис.2 для массивного поля в 2-мерном пространстве ( $D=2$ ). Для параметра в условии квазипериодичности выбрано значение  $\tilde{\alpha} = 2\pi/5$ . При заданном  $h$  и в пределе  $a \rightarrow 0$  эта компонента стремится к нулю. Качественное поведение для других значений размерности пространства аналогично изображенному на рис.2. Графики для компоненты  $\langle j^2 \rangle$  получаются из результатов на рисунке 2 изменением мест осей  $mh$  и  $ma$  и изменением знака функции.

Зависимость безразмерной величины  $a^D \langle j^1 \rangle / e$  от массы при заданных  $\tilde{\alpha} = 2\pi/5$  и  $h/a = 1$  приведена на рис.3 для различных значений размерности пространства. Для больших значений массы плотность тока экспоненциально мала.

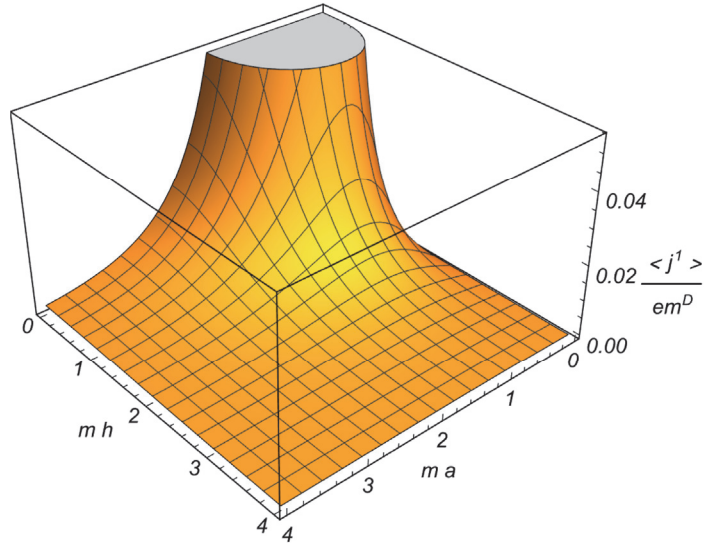


Рис.2. Плотность тока вдоль компактного измерения в зависимости от параметров  $a$  и  $h$  (измеренных в единицах  $1/m$ ) для массивного поля в модели с  $D=2$  и  $\tilde{\alpha} = 2\pi/5$ .

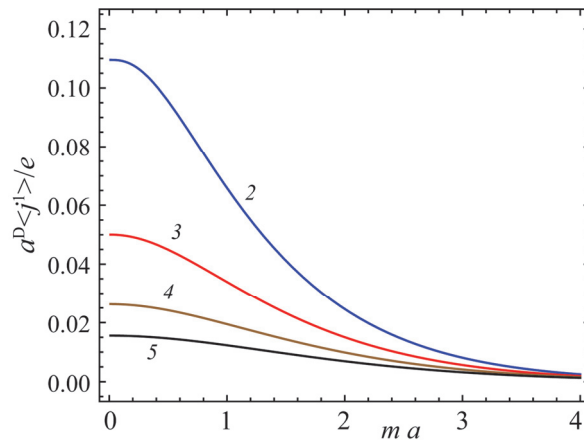


Рис.3. Зависимость плотности тока от массы поля (в единицах  $1/a$ ) при  $\tilde{\alpha} = 2\pi/5$  и  $h/a = 1$ . Числа возле кривых соответствуют значению размерности пространства.

## 5. Заключение

Исследовано вакуумное среднее плотности тока для массивного скалярного поля в плоском пространстве-времени с компактным измерением и со спиральным квазипериодическим условием (2) с параметром спиральности  $h$ , а также при наличии постоянного калибровочного поля. Вакуумный ток зависит от фазы в условии квазипериодичности и компонент калибровочного поля через комбинацию (5). Регуляризация выражения суммы по модам для вакуумного среднего



плотности тока проведена методом дзета функции с использованием формулы Чоула-Селберга. Отличными от нуля являются компоненты вдоль компактного измерения и вдоль измерения спирального смещения. Первая компонента дается формулой (25) и связана со второй компонентой простым соотношением (26). В частном случае нулевого параметра спиральности, рассмотренном ранее в литературе, вакуумный ток направлен вдоль компактного измерения. Таким образом, появление ненулевой компоненты поля вдоль некомпактного измерения является следствием спирального условия квазипериодичности.

Для безмассового поля выражение для плотности тока вдоль компактного измерения имеет вид (27). Зависимость от параметра  $\tilde{\alpha}$  входит через функцию  $A_D(\tilde{\alpha})$ , определяемой формулой (28). Для нечетных значений размерности пространства эта функция выражается через полиномы Бернулли (см. (29)). При больших значениях длины  $\sqrt{a^2 + h^2}$  вакуумный ток безмассового поля стремится к нулю по степенному закону. Для массивного поля подавление тока для больших длин экспоненциально. В пределе малых длин компактного измерения, когда  $a \rightarrow 0$ , компонента тока вдоль этого направления стремится к нулю по линейному закону. Такое поведение сильно отличается от поведения тока в задаче с обычным условием квазипериодичности, где плотность тока стремится к бесконечности.

Работа выполнена в научно-исследовательской лаборатории теоретической физики Института физики ЕГУ, финансируемой Комитетом по высшему образованию и науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения. Работа А.А. Сааряна и Д.А. Симоняна выполнена в рамках программы 21AG-1C047 Комитета по высшему образованию и науке и в рамках гранта ANSEF 23AN:PS-hepth-2889.

Авторы не имеют конфликт интересов.

Авторы в равной степени внесли свой вклад в данную работу в концептуализации исследования, математических выводах и написании рукописи. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **V.M. Mostepanenko, N.N. Trunov.** The Casimir Effect and its Applications: Clarendon, Oxford, 1997.
2. **K.A. Milton.** The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy: World Scientific, Singapore, 2002.
3. **M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko.** Advances in the Casimir Effect: New York, Oxford University Press, 2009.
4. **D. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, F. da Rosa.** Casimir Physics, Lecture Notes in Physics Vol. 834, Berlin, Springer-Verlag, 2011.
5. **E.R. Bezerra de Mello, A.A. Saharian.** Phys. Rev. D, **87**, 045015 (2013).
6. **S. Bellucci, A.A. Saharian.** Phys. Rev. D, **82**, 065011 (2010).
7. **S. Bellucci, A. A. Saharian.** Phys. Rev. D, **87**, 025005 (2013).
8. **S. Bellucci, A. A. Saharian, N. A. Saharyan,** Eur. Phys. J. C, **75**, 378 (2015).
9. **K.R. Dienes.** Phys. Rev. Lett., **88**, 011601 (2001).

10. **K. R. Dienes, A. Mafi.** Phys. Rev. Lett., **88**, 111602 (2002).
11. **C.-J. Feng, X.-Z. Li.** Phys. Lett. B, **691**, 167 (2010).
12. **X.-H. Zhai, X.-Z. Li, C.-J. Feng.** Mod. Phys. Lett. A, **26**, 669 (2011).
13. **X.-H. Zhai, X.-Z. Li, C.-J. Feng.** Mod. Phys. Lett. A, **26**, 1953 (2011).
14. **V.K. Oikonomou.** Commun. Theor. Phys., **55**, 101 (2011).
15. **X.-H. Zhai, X.-Z. Li, C.-J. Feng.** Eur. Phys. J. C, **71**, 1654 (2011).
16. **G. Aleixo, H.F. Santana Mota.** Phys. Rev. D, **104**, 045012 (2021).
17. **A.J.D. Farias Junior, H.F. Santana Mota.** Int. J. Mod. Phys. D, **31**, 2250126 (2022).
18. **E. Elizalde, S.D. Odintsov, A. Romeo, A.A. Bytsenko, S. Zerbini.** Zeta Regularization Techniques with Applications: World Scientific: Singapore, 1994.
19. **K. Kirsten.** Spectral Functions in Mathematics and Physics: Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, 2002.
20. **A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev.** Integrals and Series: Gordon and Breach, New York, 1986, vol. 1.
21. **T.Sh. Navasardyan, A.A. Saharian.** J. Contemp. Phys., **49**, 243 (2014).
22. **T.Sh. Navasardyan, A.A. Saharian.** J. Contemp. Phys., **52** 348 (2017).
23. **E. Elizalde.** Commun. Math. Phys., **198**, 83 (1998).
24. **E. Elizalde.** J. Phys. A, **34**, 3025 (2001).
25. **M. Abramowitz, I. A. Stegun.** Handbook of Mathematical Functions: Dover, New York, 1972.

## HELICAL VACUUM CURRENTS FOR A SCALAR FIELD IN MODELS WITH NONTRIVIAL SPATIAL TOPOLOGY

A.A. SAHARIAN, D.H. SIMONYAN, H.H. MIKAYELYAN, A.A. VANTSYAN

The vacuum expectation value of the current density is investigated for a massive scalar field in a  $(D+1)$ -dimensional flat space-time with compact dimension. Along a compact dimension, the field operator obeys the helical quasiperiodicity condition with a constant phase. In the special case of a zero helicity parameter, the results previously studied in the literature are obtained. In contrast to that case, the vacuum current, in addition to the component along the compact dimension, has a non-zero component in the direction of the non-compact dimension along which the field operator is shifted. A simple relation between those components is obtained. They are odd periodic functions of magnetic flux threading the compact dimension, with the period equal to the flux quantum. For a given non-zero value of the helicity parameter, the component of the vacuum current along the compact dimension tends to zero in the limit when the length of that dimension tends to zero. In the problem considered earlier with the usual quasiperiodic condition, the vacuum current diverges in that limit.