ԱՐՑԱԽԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2 (18), 2008

УДК 517.9 *Математика*

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Г. Г. Саакян

Рассматривается следующее уравнение

$$u' - p(t)u^2 + q(t)u = 0\,, \tag{1}$$

известное в теории обыкновенных дифференциальных уравнений как уравнение Риккати, где $p(t), q(t)$ - действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$.

Известно (см., например, [1]), что рассматриваемое уравнение в общем случае не сводится к квадратурам. В связи этим, представляет интерес исследование различных свойств его решений, и, в частности, такого, как осцилляция (колебание).

Для дальнейшего изложения нам понадобится следущая теорема (см. [2])`

Теорема 1. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' + p(t)y_2 = 0, \\ y_2' + q(t)y_1 = 0, \end{cases}$$

$p(t)q(t) < 0$ *, и длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\dfrac{2\pi}{mn}$*, где*

$$m^2 = \min_{a \le t \le b} |p(t)|,\ n^2 = \min_{a \le t \le b} |q(t)|, \quad m > 0,\ n > 0,$$

то по крайней мере одна из компонент решения этой системы является на отрезке $[a,b]$ *осциллирующей.*

Предположим, что в уравнении (1) $p(t)q(t) < 0$, а $u(t)$ - произвольное нетривиальное решение уравнения (1). Примем

$$y_1(t) \equiv Ce^{-\int_{t_0}^{t} p(t)u(t)dt},$$

где C -отличная от нуля, произвольная постоянная, а t_0-произвольная точка из отрезка $[a,b]$. Нетрудно убедиться в том, что $y_1(t)$ является общим решением следущего линейного однородного уравнения

$$y' + p(t)u(t)y = 0\,. \tag{2}$$

Далее, примем

$$y_2(t) \equiv u(t)y_1(t)\,. \tag{3}$$

В этом случае, учитывая соотношения (2) и (3), получим, что

$$y_1'(t) + p(t)y_2(t) \equiv 0 \tag{4}$$

и

$$u(t) = \frac{y_2(t)}{y_1(t)}\,. \tag{5}$$

Так как $u(t)$ по предположени является решением уравнения (1), то, согласно соотношению (5), будет иметь место тождество

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' - p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right) + q(t) \equiv 0 \qquad (6)$$

или

$$\frac{y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)}{y_1^2(t)} \equiv p(t)\frac{y_2^2(t)}{y_1^2(t)} - q(t).$$

С учетом соотношения (4), будем иметь

$$\frac{y_2'(t)y_1(t) + p(t)y_2^2(t)}{y_1^2(t)} - p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)^2 + q(t) \equiv 0$$

или

$$y_2' + q(t)y_1 \equiv 0 .$$

Из полученного тождества и соотношения (4) будет следовать, что $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ является решением системы

$$\begin{cases} y_1' + p(t)y_2 = 0, \\ y_2' + q(t)y_1 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Относительно этой системы имеют место условия теоремы 1. Применив ее, а также учитывая, что функция $y_1(t)$ не имеет нулей, получим, что функция $u(t)$ является колеблющейся. Обобщив вышеизложенное, получим, что верна

Теорема 2: *Если в уравнении* (1) $p(t)q(t) < 0$*, и длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\frac{2\pi}{mn}$*, где*

$$m^2 = \min_{a \le t \le b} |p(t)|, \; n^2 = \min_{a \le t \le b} |q(t)|, \quad m > 0, \; n > 0,$$

то решения уравнения (2) на отрезке $[a,b]$ *являются осциллирующим.*

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է

$$u' - p(t)u^2 + q(t)u = 0 ,$$

Ռիկատիի հավասարումը, որտեղ $p,q \in C[a,b]$: Ապացուցվում է թեորեմ դիտարկվող հավասարման լուծումների օսցիլյացիայի մասին այն ենթադրությամբ, որ $p(t)q(t) < 0$:

Литература

1. Հ.Գ. Ղազարյան, Ա.Հ. Հովհաննիսյան, Տ.Ն. Հարությունյան, Գ.Ա. Կարապետյան: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: Երևան, 2002:
2. Г.Г. Саакян, Об осциллирующих решениях одной задачи с линейной однородной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка, Ученые записки АрГУ, 1(14), 2007.

АрГУ, кафедра прикладной математики и информатики