ԱՐՑԱԽԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1 (17), 2008

УДК 530145 *Физика*

СИНГУЛЯРНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: ПРИТЯЖЕНИЕ.

Г.Г.Габриелян

В представленной работе найдены классические решения сферического обобщения двумерного сингулярного осциллятора, взаимодействующего с постоянным магнитным полем для случая, когда сингулярность задается центростремительным потенциалом. Установлено однозначное соответствие между решениями сферической и плоской систем.

Осциллятор является системой выделенной во многих смыслах. Прежде всего он выделен наличием широкой алгебры симметрий $su(d)$, где d есть размерность пространства [1]. Наличие широкой алгебры симметрий позволяет во многих случаях вводить взаимодействие осциллятора со внешними полями, оставляя систему интегрируемой. Простейшим и важнейшим примером такого рода является двумерный осциллятор в постоянном магнитном поле. Важно найти обобщения осциллятора на сфере, остающиеся интегрируемыми в присутствии магнитного поля. Такие обобщения были рассмотрены в цикле работ [2 – 7]. Потенциал указанных моделей, выглядит так

$$V_{BN} = 2\alpha^2 r_0^2 \tan^2\frac{\theta}{2}.$$

С другой стороны, общеизвестно, что двумерный сингулярный осциллятор, задаваемый потенциалом

$$V_{SW} = \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \frac{\beta^2}{2r^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

также остается интегрируемым в присутствии магнитного поля. При этом он также имеет практическую ценность: он играет роль ограничивающего потенциала кольцеобразных наноструктур, фабрикация которых стала возможной в последнее время.

Сферическое обобщение этой системы было предложено в недавней работе К. Арамяна [8]. Оно задается потенциалом

$$V = 2\alpha^2 r_0^2 \tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{\beta^2}{8r_0^2}\cot^2\frac{\theta}{2}.$$

и является интегрируемой системой. Его классические решения очень просты, и были найдены в указанной работе.

Совершенно очевидно, что заменив центробежный потенциал кругового/сферического осциллятора на центростремительный (формально это означает замену $\beta \to i\beta$), оставим систему интегрируемой. Но ее решения будут существенно зависеть от начальных условий задачи. Их нахождению и исследованию посвящена представленная работа.

1. Система на плоскости Пусть имеем аксиально симметричную систему на плоскости движущуюся во внешнем постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости, $B_1 = B_2 = 0, \; B_3 = B$.

Если внешнее магнитное поле имеет напряженность $\vec{B}$, то на частицу действует сила Лоренца.

$$\vec{F}_L = \vec{r} \times \vec{B}.$$

Ясно, что наличие постоянного магнитного поля не нарушает вращательной симметрии системы, но также не меняет ее энергии.

Итак, в присутствии постоянного магнитного поля двумерный осциллятор остается интегрируемой по Лиувиллю системой: он имеет два интеграла движения: энергию и вращательный момент. С их помощью можно проинтегрировать уравнения движения аналогично тому, как это сделано в учебнике Ландау и Лившица для движения частицы в потенциальном центрально-симметричном поле $[9]$.

Однако, при сохранении функционального вида энергии, постоянное магнитное поле меняет вид вращательного момента. Если перейти к полярным координатам, то энергия и вращательный момент сингулярного кругового осцилятора с потенциалом

$$V_{ar} = 2\alpha^2 r_0^2 \tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{\beta^2}{8r_0^2}\cot^2\frac{\theta}{2}, \qquad (1.1)$$

задаются выражениями

$$E = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}}{2} + \frac{\alpha^2 r^2}{2} - \frac{\beta^2}{2r^2}, \quad J = r^2\dot{\varphi} + \frac{Br^2}{2}. \qquad (1.2)$$

Отсюда находим

$$2E = \dot{r}^2 + \frac{\left(J - Br^2/2\right)^2}{r^2} + \alpha^2 r^2 - \frac{\beta^2}{r^2}. \qquad (1.3)$$

Эквивалентно,

$$2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\left(\alpha^2 + B^2/4\right)x^2 + 2\left(E + JB/2\right)x - \left(J^2 - \beta^2\right), \qquad x \equiv r^2. \qquad (1.4)$$

Потому, допустимые значения интегралов движения удовлетворяют условию

$$\left(E + JB/2\right)^2 > \left(\alpha^2 + B^2/4\right)\left(J^2 - \beta^2\right) \qquad (1.5)$$

Из (1.4) с легкостью находим

$$t = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(\alpha^2 + B^2/4\right)x^2 + 2\left(E + JB/2\right)x - \left(J^2 - \beta^2\right)}}. \qquad (1.6)$$

Этот интеграл берется безо всякого труда, в результате чего получаем $[10]$

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + B^2/4}}\arcsin\frac{\left(E + JB/2\right) - \left(\alpha^2 + B^2/4\right)x}{\sqrt{\left(E + JB/2\right)^2 - \left(\alpha^2 + B^2/4\right)\left(J^2 - \beta^2\right)}} \qquad (1.7)$$

или, эквивалентно,

$$r^2 = \frac{E + JB/2}{\alpha^2 + B^2/4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\left(\alpha^2 + B^2/4\right)\left(J^2 - \beta^2\right)}{\left(E + JB/2\right)^2}}\sin 2\sqrt{\alpha^2 + B^2/4t}\right). \qquad (1.8)$$

Как видим, наличие центробежного потенциала не влияет на частоту радиальных колебаний, но только на их амплитуду. Магнитное поле влияет как на амплитуду колебаний, так и на частоту. Принимая во внимание,что вращательный момент имеет вид $J = x\dot{\varphi} + Bx/2$, мы можем найти также зависимость $\varphi = \varphi(t)$.

$$\varphi = \int dt\frac{J - Bx/2}{x} = -\frac{Bt}{2} + J\int\frac{dt}{r^2(t)}. \qquad (1.9)$$

Этот интеграл тоже легко берется $[9]$, в результате окончательно получаем

$$\frac{\sqrt{\left(\alpha^2 + B^2/4\right)\left(J^2 - \beta^2\right)}}{E + JB/2}\tan\left(J + \beta^2/J\right)\left(\varphi + Bt/2\right) = \sqrt{1 - \frac{\left(\alpha^2 + B^2/4\right)\left(J^2 - \beta^2\right)}{\left(E + JB/2\right)^2}} + \tan\sqrt{\alpha^2 + B^2/4t}$$

Итак, мы нашли решения уравнения движения кругового осциллятора с центростремительным потенциалом, взаимодействующего с постоянным магнитным полем. Можно ожидать, что и решения его сферического обобщения будут аналогичны найденным.

2. Сферическое обобщение. Прежде чем приступить к обсуждению сферического обобщения рассмотренной в предыдущем разделе системы, напомним необходимые элементы сферической геометрии. Метрика на двумерной сфере задается выражением

$$ds^2 = r_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{2.1}$$

где θ и φ связаны с евклидовыми координатами сферы так

$$x_1 = r_0\sin\theta\sin\varphi,\ \ x_2 = r_0\sin\theta\cos\varphi,\ \ x_3 = r_0\cos\theta, \tag{2.2}$$

Потому сферический аналог рассмотренной в предыдущем разделе системы, задаваемый потенциалом (1.1) имеет энергию

$$E = \frac{r_0^2\dot\theta^2}{2} + \frac{r_0^2\sin^2\theta\dot\varphi^2}{2} + 2\alpha^2 r_0^2\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{\beta^2}{8r_0^2}\cot^2\frac{\theta}{2}. \tag{2.3}$$

Опишем как переходить от сферического случая к плоскому, отвечающего пределу $r_0\to\infty$. С этой целью удобно воспользоваться стереографической проекцией сферы на плоскость, касательную южному полюсу сферы. Тогда каждой точке сферы (θ,φ) ставится в соответствие точка плоскости (y_1, y_2)

$$y_1 = 2r_0\cot\frac{\theta}{2}\sin\varphi,\ \ y_2 = 2r_0\cot\frac{\theta}{2}\cos\varphi. \tag{2.4}$$

Соответственно,

$$r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 2r_0\cot\frac{\theta}{2}. \tag{2.5}$$

При свободном движении на сфере вращательный момент задается выражением

$$J = r_0^2\sin^2\theta\dot\varphi. \tag{2.6}$$

При наличии вращательно-инвариантного потенциала это величина опять же сохраняется. В присутствии постоянного магнитного поля вращательный момент частицы на сфере задается выражением

$$J = r_0^2\sin^2\theta\dot\varphi - Br_0^2(1-\cos\theta). \tag{2.7}$$

Соответственно, воспользовавшись приведенными выражениями энергии и вращательного момента, мы можем проинтегрировать уравнения движения.

Исключив из выражения для энергии (2.3), угловую скорость $\dot\varphi$, и воспользовавшись выражением для углового момента (2.7), получим

$$\frac{2E}{r_0^2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\left(J/r_0^2 + B(1-\cos\theta)\right)^2}{\left(1-\cos^2\theta\right)} + 4\alpha^2\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \frac{\beta^2}{4r_0^4}\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}. \tag{2.8}$$

Перейдем к решению задачи при отсутствии магнитного поля. Из (2.8) немедленно получаем интеграл

$$t = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{-\widetilde{J}^2 + 2\widetilde{E}x - \widetilde{\alpha}^2x^2}}, \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$x = 2r_0^2(1-\cos\theta), \tag{2.10}$$

$$\widetilde{J}^2 = J^2 - \beta^2, \tag{2.11}$$

$$2\widetilde{E} = E - \frac{\beta^2}{4r_0^2}, \tag{2.12}$$

$$\widetilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \frac{E}{2r_0^2} - \frac{\beta^2}{16r_0^4} \tag{2.13}$$

Зависимость от времени угловой переменной φ получается из (2.7)

$$\varphi = \int dt \frac{J/r_0^2 + B(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} = \left(J/2r_0^2 + B\right)\int \frac{dt}{2-x(t)} + \frac{J}{2r_0^2}\int \frac{dt}{x(t)} \tag{2.14}$$

Легко найти также зависимость $\varphi = \varphi(\theta)$:

$$\varphi = J\int \frac{dr}{\sqrt{-\widetilde{\alpha}^2 r^4 + 2\widetilde{E}r^2 - \widetilde{J}^2}}, \tag{2.15}$$

где $r = \left(4r_0^2 - x\right)x$.

Заметим, что в отличие от плоского случая, значения $\widetilde{\alpha}^2$ и $\widetilde{E}$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Следовательно, явный вид интеграла (2.9) в отличие от плоского случая, сильно зависит от начальных условий задачи.

3. **Основное решение.** Рассмотрим случай $\widetilde{\alpha}^2 > 0$, который переходит в плоском пределе в описанное решение.

$$t = -\frac{1}{-\widetilde{\alpha}}\arcsin\frac{\widetilde{\alpha}x + \widetilde{E}}{\sqrt{\widetilde{E}^2 - \widetilde{\alpha}^2\widetilde{J}^2}}.$$

Эквивалентно, имеем

$$2r_0^2(1-\cos\theta) = \frac{\sqrt{\widetilde{E}^2 - \widetilde{\alpha}^2\widetilde{J}^2}}{\widetilde{\alpha}}\sin\widetilde{\alpha}t - \frac{\widetilde{E}}{\widetilde{\alpha}}. \tag{3.1}$$

Здесь мы имеем условия

$$\widetilde{E}^2 > \widetilde{J}^2\widetilde{\alpha}^2, \quad \left|\widetilde{\alpha}^2 x + \widetilde{E}\right| < \sqrt{\widetilde{E}^2 - \widetilde{\alpha}^2\widetilde{J}^2}.$$

Как видим, в отличие от плоского сингулярного осциллятора, эффективная частота сферического сингулярного осциллятора зависит от параметра сингулярности β. Как и в случае несингулярного сферического осциллятора, частота радиальных колебаний зависит от энергии системы. Иными словами, в отличие от плоской системы, колебания сферической системы негармоничны.

Приведем теперь выражение для траектории системы:

$$\sqrt{\widetilde{E}^2 - \widetilde{J}^2\widetilde{\alpha}^2}\sin\widetilde{\alpha}\varphi = \frac{\widetilde{\alpha}}{2r_0^2(1-\cos\theta)} - \widetilde{E}. \tag{3.2}$$

4. **Дополнительные решения.** Теперь рассмотрим случаи с $\widetilde{\alpha}^2 < 0$, которые не имеют аналога в плоском пределе. Но даже здесь возможны три различных случая:

1. $\widetilde{\alpha}^2 < 0$, $\widetilde{\alpha}^2\widetilde{J}^2 > -\widetilde{E}^2$

В этом случае получаем

$$t = \frac{1}{\widetilde{\alpha}}\operatorname{arcsin}h\frac{\widetilde{\alpha}^2 x + \widetilde{E}}{\sqrt{\widetilde{\alpha}^2\widetilde{J}^2 + \widetilde{E}^2}},$$

Отсюда получаем

$$2r_0^2\widetilde{\alpha}^2(1-\cos\theta) + \widetilde{E} = \sqrt{\widetilde{\alpha}^2\widetilde{J}^2 + \widetilde{E}^2}\sinh(-\widetilde{\alpha}t) \tag{4.1}$$

Траектория задается выражением

$$\sqrt{\tilde{\alpha}^2\tilde{J}^2+\tilde{E}^2}\,\sinh|\tilde{\alpha}|\varphi=\tilde{E}-\frac{\tilde{\alpha}^2}{2r_0^2(1-\cos\theta)}. \qquad (4.2)$$

2. $\tilde{\alpha}^2<0$, $\tilde{\alpha}^2\tilde{J}^2=-\tilde{E}^2$, $\tilde{\alpha}^2x+\tilde{E}>0$

В этом случае получаем

$$t=\frac{1}{\tilde{\alpha}}\log\left|\tilde{\alpha}^2x+\tilde{E}\right|-\log const$$

Отсюда получаем

$$2r_0^2\tilde{\alpha}^2(1-\cos\theta)+\tilde{E}=const\,e^{\tilde{\alpha}t}$$

(4.3)

Траектория задается выражением

$$e^{|\tilde{\alpha}|\varphi}=2\tilde{E}-\frac{\tilde{\alpha}^2}{r_0^2(1-\cos\theta)} \qquad (4.4)$$

3. $\tilde{\alpha}^2<0$, $\tilde{\alpha}^2\tilde{J}^2=-\tilde{E}^2$, $\tilde{\alpha}^2x+\tilde{E}<0$

В этом случае получаем

$$t=-\frac{1}{\tilde{\alpha}}\log\left|\tilde{\alpha}^2x+\tilde{E}\right|-\log const$$

Отсюда получаем

$$2r_0^2\tilde{\alpha}^2(1-\cos\theta)+\tilde{E}=const\,e^{-\tilde{\alpha}t} \qquad (4.5)$$

Траектория задается выражением

$$e^{|\tilde{\alpha}|\varphi}=2\tilde{E}-\frac{\tilde{\alpha}^2}{r_0^2(1-\cos\theta)} \qquad (4.6)$$

Выражаю благодарность проф. А. П. Нерсисяну, за постановку задачи и помощь в ее решении, а также доц. К. С. Арамяна за внимание и оказанную помощь в ходе работ.

Ամփոփում

Ներկայացված աշխատանքում գտնված են հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող երկչափ սֆերիկ սինգուլյար օսցիլյատորի դասական լուծումները, ընդ որում սինգուլյարությունը տրվում է կենտրոնածիգ պոտենցիալի միջոցով: Հաստատված է միարժեք համապատասխանություն հարթ և սֆերիկ համակարգերի լուծումների միջև:

Литература

1. Д.Бом, Квантовая теория, Изд. "Наука", М.: 1965. с. 337-339.
2. Chang L.L., Esaki L. ,Tsu R., Appl Phys Lett& 24 593 1974.
3. Goldman V.J, Tsu D.C., Cunningham J.E. Phys Rev B 36 7635, 1987.
4. Zhang et. Al. Phys. Rev. Lett. 72 3397 1994
5. Alexsanian Al. G., Alexsanian A.G. Int. J. Infrared and Millimetr Waves, v. 14, N10, 1993.
6. Averin D.V. Likharev K.K. in Mesoscopic Phenomena in Solids, Amsterdam, Elsevier, 1991 p.173.
7. А.Г. Алексанян, Э.М.Беленов и др. ЖЭТФ N10, с.2671, 1982.
8. Т.Ин. и др. УФН, 168, N2, 132 1998.
9. Ikeda K. Opt Commun& 30, 257, 1979
10. А.А. Абрикосов. УФН. 168, N 6, с. 683. 1998

АрГУ, кафедра физики