

ԱԳՐԵԳԱՏՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԲԵՆՈՒԱՎՈՐՈՒՄ

Վ. Ծ. Մանասյան

Ներկայացվող հոդվածում արծարծվում է օպտիմալացման խնդիր հետևյալ տարբեր դեպքերի համար.

1. դիտարկվում է ագրեգատների օպտիմալ բեռնավորման խնդրի գծային դեպքը և տրվում է նրա լուծման ալգորիթները,
2. քննարկվում է ագրեգատների օպտիմալ բեռնավորման խնդրի քառակուսային երկչափ դեպքը և տրվում է նրա լուծման անալիտիկ և երկրաչափական մոդելների լուծումները:

Խնդրի դրվածքը. պահանջվում է սահմանափակ հումքը բախել տարբեր ծախսային բնույթի ռուսեցող ագրեգատների միջև այնպես, որ գումարային արտադրանքը քննի առավելագույնը:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

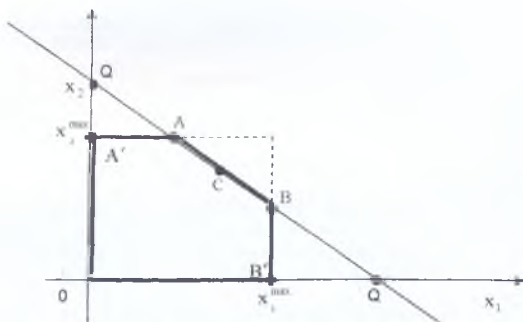
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i(x_i) \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq Q, \\ x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (1)$$

որտեղ x_i -ն i -րդ ագրեգատի կողմից մշակվող հումքն է, Q -ն հումքի պաշարն է, $\varphi_i(x_i)$ -ն i -րդ ագրեգատի տնտեսական ծախսային բնույթից բնույթից ստացվող արտադրանք, երբ ագրեգատը բեռնավորված է x_i քանակությամբ հումքով), $x_i^{\min}$, $x_i^{\max}$ i -րդ ագրեգատի համապատասխանաբար նվազագույն և առավելագույն մշակվող հումքի թույլատրելի քանակություններն են, n -ը ագրեգատների քանակն է:

Ընդհանուր դեպքում (1) խնդիրը ոչ գծային ծրագրավորման խնդիր է, եթե $\varphi_i(x_i) \neq \text{const}$, $i = \overline{1, n}$: Նշենք նաև, որ (1) խնդրի նպատակային ֆունկցիան սեպարաբելային է, իսկ սահմանափակումները՝ գծային: Սկզբից դիտարկենք խնդրի գծային դեպքը, երբ $\varphi_i(x_i) = k_i$, $i = \overline{1, n}$, որտեղ k_i -ն i -րդ ագրեգատի միավոր հումքից ստացված արդյունքն է և կախված չէ մշակվող x_i հումքի քանակից: Այս դեպքում (1)-ը կրնա դրսևի հետևյալ տեսքը՝

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sum_{i=1}^n k_i x_i \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq Q, \\ x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n}, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2)$$

(2) գծային մոդելը կարելի է լուծել սինպլեքս մեթոդով: Երկչափ խնդրի դեպքում ($n = 2$) (2) խնդրի մոդելը կարելի է ցուցադրել ներկաչափորեն:



Նկ. 1. Գծային խնդրի ներկաչափ դեպքը

Նկ. 1-ում A և B եզրային կետերի կոորդինատները կլինեն $A(Q - x_1^{\max}, x_2^{\max})$, $B(x_1^{\max}, Q - x_2^{\max})$: Նպատակային ֆունկցիայի արժեքները A և B կետերում կլինեն՝

$$Z_A = k_1(Q - x_1^{\max}) + k_2 x_2^{\max} = k_1 Q + x_2^{\max}(k_2 - k_1)$$

$$Z_B = k_1 x_1^{\max} + k_2(Q - x_2^{\max}) = k_2 Q + x_1^{\max}(k_1 - k_2):$$

Եթե $k_1 > k_2$, ապա օպտիմալ կետը B -ն է, $k_1 < k_2$ -ի դեպքում օպտիմալ կետը A -ն է, իսկ $k_1 = k_2$ -ի դեպքում AB հատվածի յուրաքանչյուր կետ:

Դիտարկենք գծային խնդրի ընդհանուր դեպքը

$$\begin{cases} Z = \sum_{i=1}^n k_i x_i \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n x_i + S = Q, \\ x_i + S_i = x_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n}, \\ S \geq 0, \\ S_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}: \end{cases} \quad (3)$$

(3) խնդրի լուծումը, նկնելով ներկաչափ խնդրի լուծման վերը բերված տարբերակներից, կլինի հետևյալը. սկզբից բեռնավորվում է լավագույն տնտեսալար ծախսային բնույթագրով ագրեգատը հնարավոր առավելագույն չափով, մինչև հումքի լրիվ սպառումը (համարում ենք, որ

$Q < \sum_{i=1}^n x_i^{\max}$, քանի որ հավաքակ դեպքում բոլոր ագրեգատները կբեռնավորվեն իրենց

առավելագույն չափով):

Դիտարկենք խնդրը ընդհանուր դեպքում, երբ տնտեսալար ծախսային բնույթագրերը ունեն $\varphi_i(x_i) = c_i x_i$, $i = \overline{1, n}$ տեսքը: Այս դեպքում խնդրի մաթեմատիկական մոդելի կայտահայտվի հետևյալ առնչությամբ.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq Q, \\ x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4)$$

(4) տեսքով ներկայացված խնդիրը քառակուսային ծրագրավորման խնդիր է, որը լուծվում է քառակուսային սիմպլեքս մեթոդով [1,2]: Դիտարկենք խնդրի մասնավոր դեպքը ($n = 2$) և տանք նրա լուծումը և ներկայացնենք, և անալիտիկորեն.

$$\begin{cases} c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq Q, \\ x_1 \leq x_1^{\max}, \\ x_2 \leq x_2^{\max}, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

(5) խնդիրը ներկայացված կաատկերվի նկ. 1-ում բերված տեսքով (համարում ենք, որ $Q < x_1^{\max} + x_2^{\max}$)

Հենց է համոզվել, որ $Z(A) > Z(A')$ և $Z(B) > Z(B')$, հետևաբար A' և B' կետերը քննարկման ենթակա չեն և քննարկենք միայն A և B կետերը և նրանց գծային կոմբինացիան

$$\begin{cases} x_c = \alpha \cdot x_A + (1 - \alpha)x_B \\ y_c = \alpha \cdot y_A + (1 - \alpha)y_B \end{cases} \quad (6)$$

որտեղ $\alpha \in [0,1]$:

Պահանջվում է գտնել α -ի այնպիսի արժեք, որի դեպքում

$$Z(c) \rightarrow \max \quad (7)$$

Այսպիսով (5) խնդրի լուծումը հանգում է (7) միաչափ խնդրի լուծմանը:

Ունենք $A(Q - x_2^{\max}, x_2^{\max})$, $B(x_1^{\max}, Q - x_1^{\max})$, հետևաբար

$$\begin{cases} x_c = \alpha \cdot T + x_1^{\max} \\ y_c = -\alpha \cdot T + Q - x_1^{\max} \end{cases} \quad (8)$$

որտեղ $T = Q - x_2^{\max} - x_1^{\max}$, $T < 0$:

Տեղադրենք (8)-ը (7)-ի մեջ և կատարելով ձևափոխություններ, կստանանք

$$Z(\alpha) = c_1 (\alpha T + x_1^{\max})^2 + c_2 (-\alpha T + Q - x_1^{\max})^2 \quad (9)$$

(9) ֆունկցիայի էքստրեմումը

$$\alpha = \frac{c_2 Q - c_2 x_1^{\max} - c_1 x_1^{\max}}{T(c_1 + c_2)} \quad (10)$$

մինիմումի կետ է և ֆունկցիայի արժեքը այդ կետում

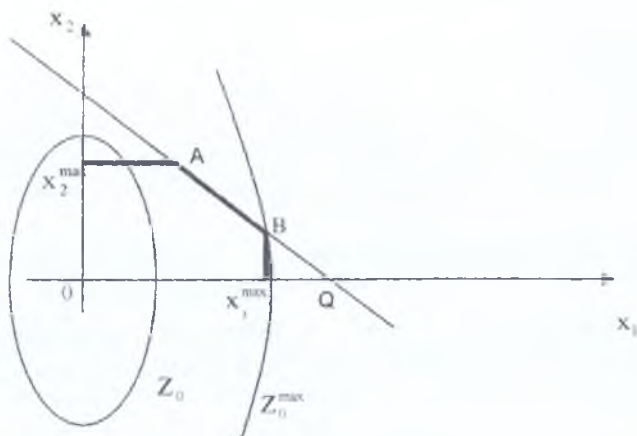
$$Z(\alpha) = \frac{c_1 c_2 Q^2}{c_1 + c_2},$$

որը հետաքրքրություն չի ներկայացնում:

Մաքսիմումի կետերը կարող են լինել A և B կետերից որևէ մեկը:

Եթե $c_1 x_1^{\max} > c_2 x_2^{\max}$, ապա B կետը խնդրի լուծումն է: Եթե $c_1 x_1^{\max} < c_2 x_2^{\max}$, ապա

կետը խնդրի լուծումն է: Եթե $c_1 x_1^{\max} = c_2 x_2^{\max}$, ապա եթե $x_1^{\max} > x_2^{\max}$, ապա խնդրի լուծումը կետն է, հակառակ դեպքում՝ A կետն է:



Նկ. 2. Խնդրի երկրաչափական մոդել

Նկ. 2-ից երևում է, որ քննարկվող դեպքում ($c_1 x_1^{\max} > c_2 x_2^{\max}$) գոյություն ունի Z այնպիսի մի արժեք՝ $Z_{\max}$, որի դեպքում էլիպսը անցնում է B կետով և չունի այլ հատման կետերի թույլատրելի բազմության հետ: Հետևաբար խնդրի լուծումը B կետն է:

Резюме

В данной статье рассматривается задача оптимальной загрузки агрегатов. Для линейного случая дается алгоритм решения, а для двухмерного квадратичного случая приводятся решения аналитической и геометрической моделей.

Գրականություն

1. Х. Таха, Введение в исследование операций. М., 2005 г.
2. Н. Вагнер, Основы исследования операций. М., 1976 г.

ԱրՊՀ, Կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոն