

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА*¹

Г.Г.Саакян

В работе, с применением теоремы сравнения для систем однородных линейных дифференциальных уравнений, доказывается теорема об осцилляции компонент собственных вектор-функций одного одномерного оператора Дирака.

Рассматривается следующий одномерный оператор Дирака (см., напримр, [1])

$$D = S \frac{d}{dt} + G, \quad (1)$$

где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & -p(t) \end{pmatrix}$, $p, q \in C[a, b]$, с областью определения, состоящей из вектор-функций $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условиям:

1. $\bar{y}(t) \in L^2[0, \pi]$,
2. $\bar{y}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, \pi]$,
3. $D\bar{y}(t) = S \frac{d\bar{y}(t)}{dt} + G(t)\bar{y}(t) \in L^2[0, \pi]$,
4. компоненты $\bar{y}(t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_1(0) \sin \alpha + y_2(0) \cos \alpha = 0, \quad (1a)$$

$$y_1(\pi) \sin \beta + y_2(\pi) \cos \beta = 0, \quad (1b)$$

где α и β — произвольные действительные числа.

Теорема Штурма об осцилляционных свойствах решений уравнения Штурма-Лиувилля давно известна и до сих пор публикуются работы, обобщающие результаты Штурма (см., напримр, [2]–[4]). Осцилляционные свойства решений Дирака мало изучены (см., напримр, [5]). Основная цель настоящей работы — доказать теорему об осцилляции компонент собственных вектор-функций рассматриваемого оператора Дирака.

Определение. Если при некотором λ_0 уравнение $D\bar{y}(t) = \lambda \bar{y}(t)$ имеет нетривиальное решение $\bar{y}(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(t, \lambda_0) \\ y_2(t, \lambda_0) \end{pmatrix}$, то число λ_0 называется *собственным значением*, а соответствующее решение $\bar{y}(t, \lambda_0)$ — *собственной вектор-функцией* оператора D .

Известно (см., [1]), что

1. собственные значения рассматриваемого оператора D действительны и образуют счетное множество, неограниченное ни снизу ни сверху;

* Публикуемые результаты были доложены на международной конференции, посвященной 85-летию Л.Д.Кузнецова в г.Москве 25-28 мая 20008 года.

2. нули компонент собственных функций оператора D простые и не имеют предельных точек накопления, а, следовательно, на любом отрезке их можно пронумеровать в порядке возрастания;

Очевидно, что задачу на собственные значения рассматриваемого оператора Дирака можно записать в виде краевой задачи, состоящей из канонической системы Дирака

$$\begin{cases} y_2' + p(t)y_1 + q(t)y_2 = \lambda y_1, \\ -y_1' + q(t)y_1 - p(t)y_2 = \lambda y_2, \end{cases} \quad (2)$$

и краевых условий (1a) и (1b).

Нам понадобятся следующие теоремы о сравнении и о перемежаемости нулей (см. [6]).

Сравниваются следующие системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' + p_i(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r_i(t)y_1 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $p_i, r_i \in C_0[0, \pi]$ ($i = 1, 2$).

Теорема 1 (о сравнении). Пусть $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ — нетривиальные решения

систем (3) при $i = 1$ и $i = 2$ соответственно, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:

$$u_1(a) = v_1(a), u_2(a) = v_2(a),$$

и пусть

$$p_1(t)p_2(t) > 0, r_1(t)r_2(t) > 0,$$

$$p_i(t)r_i(t) < 0, (i = 1, 2),$$

$$|p_2(t)| \geq |p_1(t)|, |r_2(t)| \geq |r_1(t)|.$$

Тогда если одна из компонент $\bar{u}(t)$ имеет ℓ нулей на отрезке $[a, b]$, то одна из компонент $\bar{v}(t)$ имеет на том же отрезке $[a, b]$ не менее ℓ нулей, причём k -ый нуль этой компоненты $\bar{v}(t)$ не больше k -ого нуля компоненты $\bar{u}(t)$.

Теорема 2 (о перемежаемости нулей). Если в системе (3) $p_i(t)r_i(t) \neq 0$ ($i = 1, 2$) на отрезке $[a, b]$, то между всякими соседними нулями одной из компонент всякого нетривиального решения системы (3) находится ровно один нуль другой компоненты того же решения.

Рассмотрим теперь задачу (2), (1a), (1b). Справедлива

Теорема 3 (об оспалляции). Для любого натурального числа n существует число μ_n такое, что если собственное значение задачи (2), (1a), (1b) удовлетворяет неравенству $|\lambda| \geq \mu_n$, то каждая из компонент собственной вектор-функции задачи (2), (1a), (1b) имеет на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей.

Доказательство. Запишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} y_1' - q(t)y_1 + (p(t) + \lambda)y_2 = 0, \\ y_2' + (p(t) - \lambda)y_1 + q(t)y_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если зафиксировать значение λ и воспользоваться подстановкой

$$y_1(t) = z_1(t)e^{\int_0^t q(\tau) d\tau}, \quad (5a)$$

$$y_2(t) = z_2(t)e^{-\int_0^t q(\tau) d\tau}, \quad (5b)$$

то, как нетрудно проверить, система (4) преобразуется в систему

$$\begin{cases} z_1' + p_0(t)z_2 = 0, \\ z_2' + r_0(t)z_1 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

коэффициенты которой определяются из следующих соотношений:

$$p_0(t) = (p(t) + \lambda)e^{2\int_0^t q(\tau) d\tau}, \quad r_0(t) = (p(t) - \lambda)e^{2\int_0^t q(\tau) d\tau}. \quad (7)$$

При этом преобразовании будем иметь, что $y_1(0) = z_1(0)$, $y_2(0) = z_2(0)$ и, следовательно, краевые условия (1a), (1b) примут следующий вид:

$$z_1(0) \sin \alpha + z_2(0) \cos \alpha = 0, \quad (8a)$$

$$z_1(\pi)e^{\int_0^\pi q(\tau) d\tau} \sin \beta + z_2(\pi)e^{-\int_0^\pi q(\tau) d\tau} \cos \beta = 0. \quad (8b)$$

З а м е ч а н и е. Из соотношений (5a) и (5b) следует, что нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решений задачи (2), (1a), (1b) совпадают с нулями компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ соответствующих им решений задачи (6), (8a), (8b).

Для заданного натурального числа n выберем натуральное число s так, чтобы имело место неравенство: $s \geq n+1$. Затем подберем пару натуральных чисел m и k так, чтобы $s = mk$.

Обозначив $\varphi(t) = e^{-2\int_0^t q(\tau) d\tau}$, заметим, что $\varphi(t) \neq 0$. Далее, так как функции $p(t)$, $\varphi(t)$, $1/\varphi(t)$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, то функции $\frac{m^2}{\varphi(t)} - p(t)$ и $p(t) + k^2\varphi(t)$ также будут непрерывны на $[0, \pi]$, и, следовательно, ограничены. А, значит, найдутся такие числа l_1, l_2, L_1 и L_2 , что

$$l_1 \leq \frac{m^2}{\varphi(t)} - p(t) \leq L_1 \quad (9)$$

$$l_2 \leq p(t) + k^2\varphi(t) \leq L_2. \quad (10)$$

Выберем теперь λ_n -значение параметра λ так, чтобы оно удовлетворяло бы соотношению

$$\lambda_n \geq \max \{L_1, L_2\}.$$

Тогда, учитывая, что $\varphi(t) > 0$, с учетом соотношений (9) и (10), будем иметь

$$(p(t) + \lambda_n) \varphi(t) \geq m^2 > 0, \quad \frac{p(t) - \lambda_n}{\varphi(t)} \leq -k^2 < 0. \quad (11)$$

Сравним теперь систему (6) с системой

$$\begin{cases} y_1' + m^2 y_2 = 0, \\ y_2' - k^2 y_1 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Если принять $p_1(t) = m^2$, $r_1(t) = -k^2$, $p_2(t) = p_0(t)$, $r_2(t) = r_0(t)$, то с учетом соотношений (7) и (11), будем иметь

$$p_2(t) = (p(t) + \lambda_n) e^{-2 \int_0^t q(\tau) d\tau} = (p(t) + \lambda_n) \varphi(t) \geq m^2 = p_1(t) > 0,$$

$$r_2(t) = (p(t) - \lambda_n) e^{2 \int_0^t q(\tau) d\tau} = \frac{p(t) - \lambda_n}{\varphi(t)} \leq -k^2 = r_1(t) < 0.$$

Далее, известно (см., например, [7]), что общее решение системы (12) можно записать в виде

$$u_1(t) = A \cos(mkt + \phi), \quad u_2(t) = \frac{Ak}{m} \sin(mkt + \phi),$$

где A и ϕ произвольные постоянные. Предположим, что $\bar{y}(t, \lambda_n) = \begin{pmatrix} y_1(t, \lambda_n) \\ y_2(t, \lambda_n) \end{pmatrix}$ -

соответствующая собственному значению λ_n собственная вектор-функция задачи (2), (1a), (1b),

а $\bar{v}(t, \lambda_n) = \begin{pmatrix} v_1(t, \lambda_n) \\ v_2(t, \lambda_n) \end{pmatrix}$ - соответствующее ей решение задачи (6), (8a), (8b), и пусть при $\lambda = \lambda_n$

$$y_1(0, \lambda_n) = y_{10}, \quad y_2(0, \lambda_n) = y_{20}.$$

Тогда, согласно замечанию, будем иметь, что

$$v_1(0, \lambda_n) = y_{10}, \quad v_2(0, \lambda_n) = y_{20}.$$

Далее, очевидно, что можно подобрать значения A и ϕ так, чтобы для соответствующего им частного решения $\bar{u}(t)$ системы (12) имело бы место условие

$$u_1(0) = y_{10}, \quad u_2(0) = y_{20}.$$

Заметим теперь, что для систем (6) и (12) и соответствующих им решений $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t, \lambda_n)$ имеют место условия теоремы 1. И так как компоненты решения $\bar{u}(t)$ имеют на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $\left[\frac{\pi mk}{\pi} \right] = s \geq n$ нулей, то, применив теорему 1, получим, что одна из компонент решения $\bar{v}(t, \lambda_n)$, а, значит, согласно замечанию, и собственной вектор-функции $\bar{y}(t, \lambda_n)$, будет иметь на интервале $[0, \pi]$ по крайней мере $n+1$ нулей. Тогда, согласно теореме 2, другая компонента будет иметь в этом случае по крайней мере n нулей.

Выберем теперь значение параметра $\lambda - \lambda'_n$ удовлетворяющим соотношению

$$\lambda'_n < \min_{0 \leq t \leq \pi} \left(-\frac{m^2}{\varphi(t)} - p(t), p(t) - k^2 \varphi(t) \right), \quad (13)$$

и примем

$$p_1(t) = -m^2, r_1(t) = k^2, p_2(t) = p_0(t), r_2(t) = r_0(t).$$

Тогда, с учетом соотношений (7) и (13), будем иметь, что

$$p_2(t) = (p(t) + \lambda'_n) \varphi(t) \leq -m^2 = p_1(t) < 0, r_2(t) = \frac{p(t) - \lambda'_n}{\varphi(t)} \geq k^2 = r_1(t) > 0.$$

Сравнив теперь систему (6) с системой

$$\begin{cases} y'_1 - m^2 y_2 = 0, \\ y'_2 + k^2 y_1 = 0, \end{cases}$$

и, вновь, воспользовавшись теоремами 1 и 2, получим, что компоненты собственной вектор-функции $\overline{y}(t, \lambda_n)$ будут иметь на интервале $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. Для завершения доказательства достаточно выбрать μ_n из соотношения

$$\mu_n = \max \{ |\lambda_n|, |\lambda'_n| \}$$

Теорема доказана.

Ամփոփում

Աշխատանքում, գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար համեմատության թեորեմի կիրառմամբ, ապացուցվում է, սեփական ֆունկցիաների կոմպոնենտների օսցիլյացիայի մասին թեորեմը մի միաշախի Դիրակի օպերատորի համար:

Литература

1. Б.М. Левитан, И.С. Сегрсян. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Don Hilton. Sturm's 1836 oscillation results evolution of the theory. Sturm-Liouville Theory: Pas and Present, Birkhäuser, Basel, 2005, 1-27.
3. B. Simon, Sturm oscillation and comparison theorems. Sturm-Liouville Theory: Pas and Present, Birkhäuser, Basel, 2005, 29-43.
4. H. Krüger and G. Techlm, Relative oscillation theory. weighted zeros of the wronskian, and the spectral shift function. Arxiv. Math/0703574v1 [math. SP], 20 mar 2007.
5. Е.В. Фомина, Оцилляционная теорема для системы Дирака с параметром в краевом условии, Функциональный анализ, Межвузовский сборник научных трудов, Ульяновск, 1984, 111-122.
6. Г.Г. Саакян, О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака, Ученые записки ЕрГУ, 2007, N 2, 3-11.
7. Дж. Савсонс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: ИЛ, т.1, 1953.