

О РЕШЕНИЯХ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ¹

Г.А. Петросян

Обсуждается вопрос построения решения типа пограничного слоя для прямоугольной ортотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные однородные условия. С помощью асимптотического метода построены решения типа пограничного слоя, определены собственные числа, характеризующие скорости затухания найденного решения.

Классические краевые задачи для изотропных пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2]. Классические и неклассические краевые задачи для анизотропных однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек тем же методом решены в [3,4]. Напряженно-деформированное состояние пластин с общей анизотропией исследовано в [5]. Решение для анизотропной термоупругой пластинки построено в [6]. Внутреннее решение для смешанной краевой задачи для анизотропной пластинки асимптотическим методом построено в [7].

1. Обсуждается вопрос решения задачи типа пограничного слоя одной смешанной краевой задачи для анизотропной прямоугольной пластинки $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, |z| \leq h, h \ll a\}$, на лицевых плоскостях которой заданы следующие однородные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = -h \\ u = 0, \quad v = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad \text{при } z = h. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для построения решения типа пограничного слоя вблизи края $x=0$ в трехмерных уравнениях теории упругости анизотропного тела [8,9] вводятся безразмерные координаты $\xi = x/h, \eta = y/l, \zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u/l, V = v/l, W = w/l$, в результате чего получаем сингулярно возмущенную систему уравнений относительно малого геометрического параметра $\varepsilon = h/l$, где $l = \max(a, b)$. Эту систему уравнений удобно решать асимптотическим методом интегрирования [3-6].

Решение полученных уравнений отыскивается в виде функций типа погранслоя [3,4]

$$R_p = \sum_{\lambda=0}^N \varepsilon^{\lambda} R_p^{(\lambda)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda t) \quad (1.2)$$

где R_p любое из напряжений и перемещений, при этом $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Непротиворечивые значения для χ_p подбираются следующим образом

$$\chi_{\sigma_i} = \chi, \quad \chi_{u_i} = \chi + 1, \quad (1.3)$$

где χ произвольное число, которое определится из условия взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием, λ характеризует изменчивость напряжений и перемещений погранслоя.

Подставляя (1.2), с учетом (1.3), в преобразованные уравнения теории упругости и, выразив все неизвестные величины пограничного слоя через напряжения $\sigma_{ур}^{(\lambda)}$ и $\sigma_{\sigma}^{(\lambda)}$, получим известные формулы:

¹ Անիզոտրոպ առի մի խառը եզրային խնդրի սահմանային շերտի տիպի լուծումների մասին: Գիտական ընթերցումներ: Ձեկնուցումների հիմնադրույթներ: 20-21 ապրիլի, 2009թ., Ձանգակ-97, էջ 139-140:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xp}^{(s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + R_x^{(s-1)}, \quad \sigma_{xyp}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{xy}^{(s-1)}, \quad \sigma_{xzp}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{xp}^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{xz}^{(s-1)}, \\
\sigma_{yp}^{(s)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left(\frac{a_{12}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a_{25}}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{a_{26}}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{23} \sigma_{zp}^{(s)} + a_{24} \sigma_{yzp}^{(s)} \right) + R_y^{(s-1)}, \\
u_p^{(s)} &= -\frac{A_{11}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{15}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{16}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{13}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(s)} - \frac{A_{14}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(s)} + R_u^{(s-1)}, \\
v_p^{(s)} &= -\frac{A_{16}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{56}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{66}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{36}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(s)} - \frac{A_{46}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(s)} + R_v^{(s-1)}, \\
w_p^{(s)} &= -\frac{A_{11}}{\lambda^4} \frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^3} - \frac{A_{16}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2} (A_{13} + A_{55}) \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{2A_{15}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^2} (A_{14} + A_{56}) \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{35}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(s)} - \frac{A_{45}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(s)} + R_w^{(s-1)},
\end{aligned}$$

где использованы следующие обозначения [1,5]

$$A_{ij} = (a_{22}a_{ij} - a_{2i}a_{2j})a_{22}^{-1}, \quad (i, j = 1, 3, 4, 5, 6).$$

Величины $R_k^{(s)}$ известны, и определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$R_x^{(s)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{xyp}^{(s)}}{\partial \eta}, \quad R_{xy}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{xyp}^{(s)}}{\partial \eta}, \quad R_{xz}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \eta},$$

$$R_y^{(s)} = \frac{1}{a_{22}} \left(a_{12} R_x^{(s)} + a_{25} R_{xz}^{(s)} + a_{26} R_{xy}^{(s)} - \frac{\partial v_p^{(s)}}{\partial \eta} \right),$$

$$R_u^{(s)} = \frac{1}{\lambda} (a_{11} R_x^{(s)} + a_{12} R_y^{(s)} + a_{15} R_{xz}^{(s)} + a_{16} R_{xy}^{(s)}),$$

$$R_v^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \left(a_{16} R_x^{(s)} + a_{26} R_y^{(s)} + a_{56} R_{xz}^{(s)} + a_{66} R_{xy}^{(s)} - \frac{\partial u_p^{(s)}}{\partial \eta} \right),$$

$$R_w^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \left(a_{15} R_x^{(s)} + a_{25} R_y^{(s)} + a_{55} R_{xz}^{(s)} + a_{56} R_{xy}^{(s)} + \frac{\partial R_y^{(s)}}{\partial \zeta} \right).$$

Решением (1.4) удовлетворив однородным условиям (1.1), для определения неизвестных функций $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$ получим следующую систему уравнений

$$L_1 \sigma_{zp}^{(s)} + L_2 \sigma_{yzp}^{(s)} = R_1^{(s-1)},$$

$$L_2 \sigma_{zp}^{(s)} + L_3 \sigma_{yzp}^{(s)} = R_2^{(s-1)}.$$

Дифференциальные операторы L_i и обобщенные нагрузки $R_1^{(s-1)}, R_2^{(s-1)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 2A_{15} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{35} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{33} \lambda^4, \\
 L_2 &= A_{16} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (A_{14} + A_{56}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (A_{36} + A_{45}) \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{34} \lambda^4, \\
 L_3 &= A_{66} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{46} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{44} \lambda^4,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$R_1^{(s-1)} = - \left(\frac{\partial R_w^{(s-1)}}{\partial \zeta} + a_{13} R_x^{(s-1)} + a_{23} R_y^{(s-1)} + a_{35} R_{xz}^{(s-1)} + a_{36} R_{xy}^{(s-1)} \right) \lambda^s,$$

$$R_2^{(s-1)} = - \left(\frac{\partial R_v^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_p^{(s-1)}}{\partial \eta} + a_{14} R_x^{(s-1)} + a_{24} R_y^{(s-1)} + a_{45} R_{xz}^{(s-1)} + a_{46} R_{xy}^{(s-1)} \right) \lambda^s.$$

Нужно учесть, что $R_i^{(s-k)} = 0$, при $s < k$.

При $s = 0$, уравнения (1.7) становятся однородными.

В дальнейшем подробно рассмотрена задача для ортотропных материалов.

2. Для ортотропных материалов имеем

$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0.$$

В связи с чем, упругие коэффициенты A_{ij} упрощаются

$$A_{44} = a_{44}, A_{55} = a_{55}, A_{66} = a_{66}, A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{36} = A_{46} = A_{56} = A_{35} = A_{45} = A_{34} = 0,$$

в результате оператор L_2 тождественно превращается в нуль. Система уравнений (1.7) распадается на два самостоятельных уравнения, которым соответствуют решения типа плоского и антиплоского погранслоев [3-5]. При этом, поверхностные условия (1.1) и решение (1.4) также распадается на две группы.

При $s = 0$ будем иметь:

а) плоский пограничный слой

$$L_1 \sigma_{zp}^{(0)} = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}(\zeta = -1) &= 0, \quad w(\zeta = -1) = 0, \\
 u(\zeta = 1) &= 0, \quad \sigma_z(\zeta = 1) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

б) антиплоский пограничный слой

$$L_3 \sigma_{yzp}^{(0)} = 0 \tag{2.3}$$

$$\sigma_{yz}(\zeta = -1) = 0, \quad v(\zeta = 1) = 0. \tag{2.4}$$

Посредством формул (1.4) и (1.8) задачу (2.1)-(2.2) представим в виде

$$A_{11} \frac{\partial^4 \sigma_{zp}^{(0)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{33} \lambda^4 \sigma_{zp}^{(0)} = 0 \tag{2.5}$$

$$\sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = 1)}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = -1)}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = -1)}{\partial \zeta^3} = 0 \tag{2.6}$$

а задачу (2.3)-(2.4) в виде

$$A_{66} \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{44} \lambda^4 \sigma_{yzp}^{(0)} = 0 \tag{2.7}$$

$$\sigma_{yzp}^{(0)}(\zeta = -1) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(0)}(\zeta = 1)}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.10)$$

Краевые задачи (2.5)-(2.6) и (2.7)-(2.8) являются задачами на собственные значения. После того, как значения λ_n будут найдены, соответствующие собственные функции можно будет определить с помощью (1.4).

Уравнению (2.5) соответствует характеристическое уравнение

$$A_{11}r^4 + (2A_{13} + A_{55})\lambda^2 r^2 + A_{33}\lambda^4 = 0 \quad (2.11)$$

Это уравнение может иметь корни трех типов в зависимости от значения $D = (2A_{13} + A_{55})^2 - 4A_{11}A_{33}$ [3,9].

$$\text{а) } D > 0, \quad q_{1,2}^2 = \frac{-(2A_{13} + A_{55}) \pm \sqrt{D}}{2A_{11}} < 0,$$

следовательно корни уравнения (2.9) мнимые и отличны друг от друга

$$r_{1,2} = \pm iq_1\lambda, \quad r_{3,4} = \pm iq_2\lambda \quad (2.12)$$

Корням (2.10), при $s = 0$ соответствует следующее решение уравнения (2.5)

$$\sigma_{zp}^{(0)} = C_1^{(0)} \cos q_1 \lambda \zeta + C_2^{(0)} \sin q_1 \lambda \zeta + C_3^{(0)} \cos q_2 \lambda \zeta + C_4^{(0)} \sin q_2 \lambda \zeta \quad (2.13)$$

(2.11) должен удовлетворить условиям (2.6). Далее, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных интегрирования. Поскольку эта система должна иметь нетривиальное решение, то ее определитель должен равняться нулю. Приравняв определитель этой системы к нулю для определения значения λ , получим уравнение:

$$\cos 2q_1 \lambda \cos 2q_2 \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2q_1 \lambda = 0 \\ \cos 2q_2 \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Пусть λ_n корень уравнения $\cos 2q_1 \lambda = 0$, то есть

$$\lambda_n = \frac{\pi}{4q_1} (1 + 2n), \quad (2.15)$$

тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{zpp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(0)} \frac{\cos q_1 \lambda_n (\zeta - 1)}{\cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(0)} q_1^2 \frac{\sin q_1 \lambda_n (\zeta - 1)}{\cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{xzzp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(0)} q_1 \frac{\cos q_1 \lambda_n (\zeta - 1)}{\cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{ypp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(0)} \frac{a_{12} q_1^2 - a_{23}}{a_{22}} \frac{\sin q_1 \lambda_n (\zeta - 1)}{\cos q_1 \lambda_n} \\ u_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(0)} \frac{A_{11} q_1^2 - A_{13}}{\lambda_n} \frac{\sin q_1 \lambda_n (\zeta - 1)}{\cos q_1 \lambda_n} \\ w_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(0)} \frac{A_{11} q_1^2 - A_{13} - a_{55}}{\lambda_n} q_1 \frac{\cos q_1 \lambda_n (\zeta - 1)}{\cos q_1 \lambda_n} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\sigma_{yzpp}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{xypp}^{(0)} = 0, \quad v_{pp}^{(0)} = 0.$$

Здесь D_n неизвестные постоянные, через которые выражаются остальные постоянные интегрирования, и они будут определены при удовлетворении торцевым условиям.

Если λ_m корень уравнения $\cos 2q_2 \lambda = 0$, то есть

$$\lambda_m = \frac{\pi}{4q_2} (1 + 2m),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zpp}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} \frac{\cos q_2 \lambda_m (\zeta - 1)}{\cos q_2 \lambda_m} \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= - \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} q_2^2 \frac{\sin q_2 \lambda_m (\zeta - 1)}{\cos q_2 \lambda_m} \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} q_2 \frac{\cos q_2 \lambda_m (\zeta - 1)}{\cos q_2 \lambda_m} \\ \sigma_{ypp}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} \frac{a_{12} q_2^2 - a_{23}}{a_{22}} \frac{\sin q_2 \lambda_m (\zeta - 1)}{\cos q_2 \lambda_m} \\ u_{pp}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} \frac{A_{11} q_2^2 - A_{13}}{\lambda_m} \frac{\sin q_2 \lambda_m (\zeta - 1)}{\cos q_2 \lambda_m} \\ w_{pp}^{(0)} &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^{(0)} \frac{A_{11} q_2^2 - A_{13} - a_{55}}{\lambda_m} q_2 \frac{\cos q_2 \lambda_m (\zeta - 1)}{\cos q_2 \lambda_m} \\ \sigma_{yzpp}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{xypp}^{(0)} = 0, \quad v_{pp}^{(0)} = 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\text{б) } D = 0, \quad q_{1,2}^2 = -\frac{2A_{13} + A_{55}}{2A_{11}} < 0.\tag{2.16}$$

Корни характеристического уравнения (2.9) мнимые и кратные

$$r = \pm i q_3 \lambda.\tag{2.17}$$

Этим корням соответствует следующее решение:

$$\sigma_{zpp}^{(0)} = (C_1^{(0)} + C_2^{(0)} \zeta) \cos \lambda q_3 \zeta + (C_3^{(0)} + C_4^{(0)} \zeta) \sin \lambda q_3 \zeta\tag{2.18}$$

Для величин плоского погранслоя будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_{zpp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\Delta} (\sin 2q_3 \lambda_n \sin q_3 \lambda_n (\zeta - 1) - \cos q_3 \lambda_n (\zeta + 1)) \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\Delta} q_3^2 (\sin 2q_3 \lambda_n \sin q_3 \lambda_n (\zeta - 1) - \cos q_3 \lambda_n (\zeta + 1)) \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\Delta} q_3 (\sin 2q_3 \lambda_n \cos q_3 \lambda_n (\zeta - 1) + \sin q_3 \lambda_n (\zeta + 1)) \\ \sigma_{ypp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\Delta} \frac{a_{12} q_3^2 - a_{23}}{a_{22}} (\sin 2q_3 \lambda_n \sin q_3 \lambda_n (\zeta - 1) - \cos q_3 \lambda_n (\zeta + 1)) \\ u_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\Delta} \frac{A_{11} q_3^2 - A_{13}}{\lambda_n} (\sin 2q_3 \lambda_n \sin q_3 \lambda_n (\zeta - 1) - \cos q_3 \lambda_n (\zeta + 1)) \\ w_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\Delta} q_3 \frac{(A_{11} q_3^2 - A_{13} - a_{55})}{\lambda_n} (\sin 2q_3 \lambda_n \cos q_3 \lambda_n (\zeta - 1) + \sin q_3 \lambda_n (\zeta + 1))\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\sigma_{\text{зрр}}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\text{зрл}}^{(0)} = 0, \quad v_{\text{рл}}^{(0)} = 0,$$

где $\Delta = 2\lambda_n q_3 \cos 2\lambda_n q_3 + 2\lambda_n q_3 \sin \lambda_n q_3$, а λ_n корень уравнения $\cos 2q_3 \lambda = 0$,

$$\lambda_n = \frac{\pi}{4q_3} (1 + 2n).$$

$$\text{в) } D < 0, \quad q_{1,2}^2 = \frac{-(2A_{11} + A_{55}) \pm \sqrt{D}}{2A_{11}} < 0.$$

Корни уравнения (2.9) комплексно-сопряженные

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= (p \pm iq)\lambda, \quad r_{3,4} = (-p \pm iq)\lambda \\ p^2 &= (2\sqrt{A_{11}A_{33}} + A_{55} + 2A_{13})/(4A_{11}) \\ q^2 &= (2\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{55} - 2A_{13})/(4A_{11}) \end{aligned}$$

Решение задачи (2.5)-(2.6) представится в виде:

$$\sigma_{\text{зр}}^{(0)} = C_1^{(0)}\varphi_1 + C_2^{(0)}\varphi_2 + C_4^{(0)}\varphi_4 + C_5^{(0)}\varphi_5, \quad (2.2)$$

где $\varphi_1 = \cosh p\lambda\zeta \cos q\lambda\zeta$, $\varphi_2 = \sinh p\lambda\zeta \sin q\lambda\zeta$, $\varphi_4 = \cosh p\lambda\zeta \sin q\lambda\zeta$, $\varphi_5 = \sinh p\lambda\zeta \cos q\lambda\zeta$, где собственные числа λ_n определяются из следующего трансцендентного уравнения

$$sh^2 z \sin^2 z + ch^2 z \cos^2 z = 0, \quad (2.1)$$

где $z = q\lambda\zeta$,

а все величины плоского погранслоя определяются аналогичным образом.

При решении задачи (2.7)-(2.8), которое соответствует антиплоскому погранслою, будем иметь следующие значения для λ_n ,

$$\lambda_n = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} (2n+1). \quad (2.3)$$

Величины антиплоского погранслоя будут определяться следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{зрр}}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi}{4} (2n+1)(1+\zeta), \\ \sigma_{\text{зрл}}^{(0)} &= \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{\pi}{4} (2n+1)(1+\zeta), \\ v_{\text{рл}}^{(0)} &= -a_{44} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos \frac{\pi}{4} (2n+1)(1+\zeta), \\ \sigma_{\text{зрл}}^{(0)} &= \sigma_{\text{зрл}}^{(0)} = \sigma_{\text{зрл}}^{(0)} = \sigma_{\text{зрл}}^{(0)} = u_{\text{рл}}^{(0)} = w_{\text{рл}}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения, входящие в систему (1.7) при $s \geq 1$ становятся неоднородными и они должны быть решены при двух различных вариантах. В первом варианте λ есть корень трансцендентного уравнения (2.12), (2.20) или (2.23) плоского погранслоя. Во втором варианте λ соответствует антиплоскому погранслою и совпадает с (2.24). Решения уравнений, входящие в систему (1.7) в каждом варианте запишутся в виде [3]

$$Q_p^{(s)} = Q_0^{(s)} + Q_p^{(s)}, \quad (p, a) \quad (2.26)$$

где $Q_0^{(s)}$ является решением однородной системы, а $Q_p^{(s)}$ частное решение неоднородной системы. Решения однородных систем плоского погранслоя первого варианта и антиплоского погранслоя второго варианта будут тождественно удовлетворять граничным условиям (1.1), в силу неизменности структуры решения однородной задачи для каждого s и удовлетворения этим условий при $s = 0$.

Аналогичным образом можно построить решения типа пограничного слоя вблизи торцов $x=a$ и $y=0, b$.

Решение пространственной краевой задачи есть сумма внутренней задачи и пограничных слоев

$$J = Q_{\text{вн}} + Q_p + Q_a, \quad (2.27)$$

где $Q_{\text{вн}}, Q_p, Q_a$ соответственно решение внутренней задачи, интегралы плоского и антиплоского пограничных слоев.

Представление (2.27) содержит достаточное количество неизвестных констант, позволяющие удовлетворить торцевым условиям.

Ամփոփում

Այլևատանքը նվիրված է անիզոտրոպ սալի սահմանային շերտի տիպի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի նկարագրմանն ու վերլուծությանը: Ենթադրվում է, որ սալի դիմային հարթությունների վրա տրված են խառը նզրային պայմաններ, իսկ մյուս հարթությունների վրա կարող են տրված լինել առաձգականության տեսության տարբեր նզրային պայմաններ:

Սահմանային շերտի տիպի լուծումը եզրից հեռանալիս արագ մարում է էքսպոնենցիալ օրենքով: Այդ լուծումը բերվում է սնվական արժեքների և սնվական ֆունկցիաների որոշման խնդրի: Դրական իրական մաս ունեցող սնվական թվերից ամենափոքրն էլ հենց բաղում է սահմանային շերտի լուծման մարման արագությունը:

Օրթոտրոպ նյութերի դեպքում սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակի հավասարումները տրոհվում են երկու հավասարումների համակարգերի, որոնք նկարագրում են հարթ և հակահարթ սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակները:

Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր սահմանային շերտի տիպի լուծման բոլոր լարումների և տեղափոխությունների որոշման համար:

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. с. 668-686.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. с. 415
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во "Титутюн" НАН РА. 2005. с.468
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией// В сб.: "XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин". Тезисы докладов. М.: 1977. с. 5.
6. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки//Изв. АН Армении. Механика. 1993. N3-4. с. 3-11.
7. Петросян Г.А., Хачатрян А. М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки//Изв. НАН РА. Механика. 2009. т.62. N4.
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1967. с. 268
9. Лехницкий С.Г. Теории упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. с.416