

ՄԵԼԻՆԻ ԴԻՍԿՐԵՏ ՁԵԿԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆ

Ս.Ս. Պետրոսյան

Հայտնի է, որ [1] Մելինի ձևափոխություն են անվանում

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx = M[f] \quad (1)$$

ձևափոխությունը, որտեղ s -ը կոմպլեքս փոփոխական է: Նշանակենք $s = \sigma + it$: Գնահատենք $|M(s)|$ -ը

$$|M(s)| \leq \int_0^{\infty} |f(x)| |x^{s-1}| dx = \int_0^{\infty} |f(x)| x^{\sigma-1} dx$$

քանի որ $|x^{s-1}| = |x^{\sigma-1}| |x^{it-1}| = x^{\sigma-1} |x^{it-1}| = x^{\sigma-1}$: Ուրեմն (1)-ի գոյափոխության համար մենք պետք է պահանջենք, որ ինտեգրալը լինի վերջավոր $\int_0^{\infty} |f(x)| x^{\sigma-1} dx < \infty$ կամ նույնն է, որ ասենք $f(x)x^{\sigma-1} \in L(0; \infty)$

(1)-ի մեջ տեղադրենք $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t} dt \Rightarrow$ կունենանք

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(e^{-t}) e^{-t(s-1)} (-e^{-t} dt) = \int_0^{\infty} f(e^{-t}) e^{-ts} dt \quad (2)$$

Եթե (2) մեջ s -ի փոխարեն տեղադրենք $s = \sigma + iy$, ապա կունենանք

$$M(s) = M(\sigma + iy) = \int_0^{\infty} f(e^{-t}) e^{-t(\sigma+iy)} dt = \int_0^{\infty} f(e^{-t}) e^{-t\sigma} e^{-ity} dt = (3) = F[f(e^{-t}) e^{-t\sigma}]_{y} \quad (3)$$

Այսինքն Մելինի ձևափոխությունը $f(e^{-t}) e^{-t\sigma}$ ֆունկցիայի ֆուրյեի ձևափոխությունն է:

Եթե նշանակենք $\varphi(t) = f(e^{-t}) e^{-t\sigma}$, այդ դեպքում

$$M(\sigma + iy) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-ity} dt = \varphi(y) \quad (4)$$

Այսինքն φ ֆունկցիայի ձևափոխությունն է y կետում:

Այժմ ներառենք շրջման բանաձևի բոլոր տիպի առայմանները տեղի ունենն և (4)-ից վերադառնանք φ -ն:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + iy) e^{ity} dy$$

Այս հավասարման մեջ տեղադրենք φ արժեքը, կունենանք

$$f(e^{-t}) e^{-t\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + iy) e^{ity} dy$$

$$f(e^{-t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + iy) e^{(\sigma+iy)t} dy$$

Կատարենք փոփոխականի փոխարինում $e^{-t} = x$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\sigma + iy) x^{-(\sigma+iy)} d(\sigma + iy) = (*)$$

Նշանակենք $\sigma + iy = s$, եթե y փոփոխվում է $(-\infty; +\infty)$, ապա $\sigma + iy$ կփոփոխվի $(\sigma - i\infty; \sigma + i\infty)$: Այդ դեպքում կունենանք

$$(*) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(s)x^{-1} ds \quad (5)$$

(5)-ը ԼՄԼիինի ձևափոխության շրջման բանաձևն է:

Այժմ գրենք Ֆուրյեի ձևափոխությունը

$$F(u) = F(\sigma + it) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\sigma+it)x} dx = (*)$$

նշանակենք $x = -\ln y$:

$$\begin{aligned} \text{երբ } x &= -\infty, & y &= +\infty \\ x &= +\infty, & y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\sigma x} e^{itx} dx = \int_0^{\infty} f(-\ln y)e^{i\sigma \ln y} e^{-it \ln y} \frac{dy}{y} = \int_0^{\infty} f(-\ln y)y^{i\sigma-i\tau-1} dy = \\ &= \int_0^{\infty} f(-\ln y)y^{i(\sigma+i\tau)-1} dy = \int_0^{\infty} f(-\ln y)y^{s-1} dy \end{aligned}$$

(6)

Նշանակենք $f(-\ln y) = \varphi(y)$, $s = -iz$, $z = i\sigma - t$:

$$\int_0^{\infty} f(-\ln y)y^{s-1} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} e^{-i\sigma x} dx$$

$$f(x)e^{ix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + it)e^{i\sigma x} d\sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + it)e^{i\sigma x - t} d\sigma, \quad x = -\ln y$$

$$\begin{aligned} f(-\ln y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + it)e^{-i\ln y(i\sigma+t)} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + it)y^{-(i\sigma-t)} d(i\sigma - t) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(-i(i\sigma - t))y^{-(i\sigma-t)} d(i\sigma - t) \end{aligned}$$

Այսպիսով մենք ստացանք, որ

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(-iz)y^{-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z)y^{-z} dz$$

Այսպիսով անընդհատ ԼՄԼիինի ձևափոխությունից մենք ստացանք Ֆուրյեի ձևափոխությունը: Եվ հակառակը, Ֆուրյեի ձևափոխությունից ստացանք ԼՄԼիինի ձևափոխությունը: Այժմ մեր նպատակն է Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունից ստանալ ԼՄԼիինի դիսկրետ ձևափոխությունը և հակառակը:

Ունենք

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (7)$$

Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունը, որտեղ $X(k)$ հաջորդականություն է, $k = 0, \dots, N-1$



Արժեքները տեղադրվում էրական առանցքի վերև կոճենանք



$$X(k+i\sigma) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+i\sigma)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} e^{-\frac{2\pi}{N}\sigma n}$$

σ ցանկացած թիվ է: Նշանակենք $\sigma = \frac{N}{2\pi} \ln q$, $q = e^{\frac{2\pi}{N}\sigma}$: Հետևաբար

$$X(k+i\sigma) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)q^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (8)$$

(8)-ի մեջ նաև նշանակենք
կոնստանտ

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = t_n \quad (9)$$

$$X(k+i\sigma) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)q^n t_n^k \quad (10)$$

Մեզ մոտ փաստորեն $|t_n| = 1$ և $\arg t_n = -\frac{2\pi}{N}n$, $n = 0, \dots, N-1$ (հետևում է (9)-ից)

$$X(k+i\sigma) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left(i \frac{N}{2\pi} \ln t_n \right) q^n t_n^k \quad (10')$$

(10)-ը անվանում ենք դիսկրետ Մելինի ձևափոխություն: Փաստորեն նրան նշանակենք

$$z_k = k + i\sigma = k + i \frac{N}{2\pi} \ln q$$

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)q^n t_n^k \quad (11)$$

Մենք ունենք, որ $X(k+i\sigma) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)q^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ այստեղից հետևում է, որ կատանայի Ֆուրիեի ձևափոխությունը:

$$x(n)q^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k+i\sigma) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

որտեղից կոնստանտ

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(z_k) t_k^{-n} q^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(z_k) (qt_k)^{-n} \quad (12)$$

Եթե նշանակենք $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = t_n$ կամ $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = t_k$ (12)-ը, (11)-ի շրջման բանաձևն է:
Պարսկալի հավասարությունը անդի ունի սրա համար հետևյալ իմաստով

$$N \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 q^{2n} = \sum_{k=0}^{N-1} |X(z_k)|^2$$

Резюме

В работе получены формулы: прямое дискретное преобразование Мелина и обратное дискретное преобразование Мелина.

Գրականություն

1. Джрбашян М.М., Интегральные преобразования в комплексной плоскости, Изд. М., 1956.
2. Князев П.Н., Интегральные преобразования, Изд. "Едиториал УРСС", 2004.
3. Левин Б.Я., Целые функции, М. 1971.