

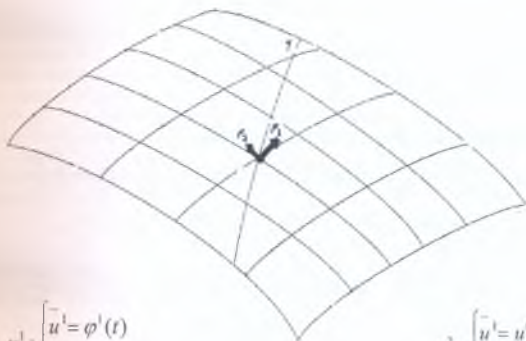
ԻԶՈԳՈՆԱԼ ՉԻԲԻՇԵՎՅԱՆ ԵՎ ԻԶՈԳՈՆԱԼ ԳԵՈՂԵԶԻԿ
ՑԱՆՑԵՌ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ

Գ. Ա. Նալբանդյան

Ռիմանյան նրկաչափության մեջ առանձնահատուկ կարևորություն ունի այս կամ այն դասի տարածությունների առանձնացումը և նրանց ուսումնասիրությունը: Այդ դասերի առանձնահատկությունները բնական ձևով առնչվում են նրանցում այս կամ այն տիպի ցանցերի գոյության հետ, նրանք նաև որոշվում այդպիսի ցանցի գոյությամբ ([1], [2]): Այս իսկ տեսակետից էլ ցանցերի տեսությունը հանդիսանում է ռիմանյան նրկաչափության կարևորագույն բաժիններից մեկը: Դիտարկվում է նրկաչափ ռիմանյան տարածությունների չնբիշկյան և գեոդեզիկ ցանցերը: Որպես ռիմանյան նրկաչափ տարածություն դիտարկվում է եռաչափ եվկլիդեսյան տարածությունում նրկաչափ մակերևույթները:

Այդ մակերևույթի վրա կորերի մեկ պարամետրանի (մեկ պարամետրից կախված) ընտանիքը տրվում է $f(u^1; u^2; c) = 0$ հավասարումով, որտեղ $C_1 < c < C_2$: Կորերի այս ընտանիքը կանվանենք մակերևույթի ինչ-որ տիրույթում ռեգուլյար, եթե այդ տիրույթի ցանկացած կետով անցնում է մեկ և միայն մեկ կոր այդ ընտանիքից: Երկու տարբեր մեկ պարամետրանի կորերի ընտանիքները, որոնք ընդհանուր տիրույթում պարբերական են, այդ ընդհանուր տիրույթում կազմում են ցանց: Ցանցի տիրույթի ցանկացած կետով անցնում են երկու կորեր, որոնք պատկանում են տարբեր ընտանիքների ([3], [4]): Առանձին կետերում այդ կորերը կարող են ունենալ իայում: Օրինակ ասիմպտոտական գծերի ցանցի նրկու գծերը մակերևույթի պարաբոլական տիպի կետում, իրար շոշափում են: Մենք կդիտարկենք այնպիսի տիրույթները, որտեղ
ա) տարբեր ընտանիքների կորերը հատվում են զրոյից տարբեր անկյան տակ,
բ) մի ընտանիքի ցանկացած գիծ հատվում է մյուս ընտանիքի ցանկացած գծի հետ:
Այսպիսի տիրույթն անվանվում է ցանցի ռեգուլյար տիրույթ:

Դիցուք տրված է $r = r(u^1, u^2)$ մակերևույթը և նրա վրա կոորդինատային ցանցը, այսինքն՝ u^1 -գծերի և u^2 -գծերի ընտանիքները՝



$$u^1: \begin{cases} \bar{u}^1 = \varphi^1(t) \\ \bar{u}^2 = u^0 = const \end{cases}$$

$$u^2: \begin{cases} \bar{u}^1 = u^0 = const \\ \bar{u}^2 = \varphi^2(t) \end{cases}$$

Հայտնի է, որ եթե մակրոկույթի կորոդինատական գանգը չեփիշկյան ցանց է, ապա նրա մետրիկական ունի հետևյալ տեսքը ([5])՝

$$dS^2 = (du^1)^2 + 2g_{12}(u^1, u^2)du^1 du^2 + (du^2)^2 \quad (1)$$

Գտնենք մակրոկույթի գաուսյան կորոդինատները:

Քանի որ $g_{11} = 1$ և $g_{22} = 1$, ապա կունենանք՝

$$\begin{aligned} b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &= 2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} + G_{12}^1 G_{12}^1 g_{11} + 2G_{12}^1 G_{12}^2 g_{12} + G_{12}^2 G_{12}^2 g_{22} - \\ &- G_{11}^1 G_{11}^1 g_{11} - 2G_{11}^1 G_{11}^2 g_{12} - G_{11}^2 G_{11}^2 g_{22} - G_{22}^1 G_{22}^1 g_{11} - 2G_{22}^1 G_{22}^2 g_{12} - G_{22}^2 G_{22}^2 g_{22} \end{aligned} \quad (2)$$

Նշենք, որ $g_{11} = 1$ պայմանից կհետևի, որ $|\vec{r}_1| = 1$; նույն ձևով $g_{22} = 1$ պայմանից կհետևի, որ $|\vec{r}_2| = 1$:

Հետևաբար՝

$$g_{12} = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos \theta = \cos \theta \quad (3)$$

որտեղ θ -ն ցանցային անկյունն է:

Հաշվի առնելով g_{11}, g_{12}, g_{22} -ի նշված արժեքները և այն, որ չեփիշկյան կորոդինատային ցանցի դեպքում ([3])՝

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = 0 \quad (4)$$

կունենանք՝

$$\begin{aligned} b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &= 2 \frac{\partial^2 (\cos \theta)}{\partial u^1 \partial u^2} - G_{11}^1 G_{11}^1 - 2G_{11}^1 G_{11}^2 \cos \theta - G_{11}^2 G_{11}^2 - \\ &- G_{22}^1 G_{22}^1 - 2G_{22}^1 G_{22}^2 \cos \theta - G_{22}^2 G_{22}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Նշենք, որ $g^{\alpha\beta}$ տենզորը $g_{\alpha\beta}$ տենզորի փոխադարձ տենզորն է:

Հետևաբար $\|g^{\alpha\beta}\|$ մատրիցը՝

$$\|g^{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

մատրիցի հակադարձ մատրիցն է:

Այստեղից կստացվի, որ

$$g^{11} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (7)$$

$$g^{12} = g^{21} = \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (8)$$

$$g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (9)$$

Առանձին-առանձին հաշվենք նշված գումարելիները.

$$\frac{\partial^2 (\cos \theta)}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2} \left(-\sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \right) = -\cos \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} - \sin \theta \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^1 \partial u^2} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{1\alpha} \left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \cdot \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{1}{2} g^{12} \cdot 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = \\ &= g^{12} \frac{\partial \cos \theta}{\partial u^1} = -\sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \cdot g^{12} = -\sin \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \cdot \left(\frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \end{aligned}$$

$$G_{11}^1 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} \quad (11)$$

$$G_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{2\alpha} \left(2 \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{1}{\sin^2 \theta} (-\sin \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1} = -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u^1}$$

Հետևաբար՝

$$G_{11}^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^1} \quad (12)$$

Նմանատիպ դաստոյություններ կատարելով մյուս անդամների նկատմամբ, կստանանք՝

$$G_{22}^1 = -\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^2} \quad (13)$$

$$G_{22}^2 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^2} \quad (14)$$

Հաշվի առնելով վերը նշված բանաձևերը (5)-ը կնդգունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &= -2\cos\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^2} - \sin\theta \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\partial u^2} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \cdot \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 + 2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \cdot \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 - \\ &= -\frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2 + 2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2 = \\ &= -\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\partial u^2} + 2\cos\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Հետևաբար՝

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\partial u^2} + 2\cos\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2\right) \quad (15)$$

Ինչպես հայտնի է գաուսյան կորության համար ունենք՝

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (16)$$

մյուս կողմից՝

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1 \cdot 1 - (\cos\theta) \cdot (\cos\theta) = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

կամ

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \sin^2\theta \quad (17)$$

(15)-ը և (17)-ը տեղադրելով (16)-ի մեջ կստանանք՝

$$K = -\frac{1}{\sin^2\theta} \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial u^1\partial u^2} + 2\cos\theta \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u^2}\right)^2 \right) \quad (18)$$

Մահմանում 1: Եթե չնքիչկյան ցանցի ցանցային անկյունը հաստատուն է, ապա ցանցը կանվանենք իզոգոնալ չնքիչկյան ցանց:

(18)-ից հետևում է, որ եթե չնքիչկյան ցանցը իզոգոնալ է, ապա $K=0$: Այստեղից հետևում է, որ եթե մակերևույթի կորորչինատական ցանցը իզոգոնալ չնքիչկյան ցանց է, ապա այդ մակերևույթը փոխող մակերևույթ է: Այսինքն՝ իզոգոնալ չնքիչկյան ցանց կառոդ է կրել միայն փոխող մակերևույթը: Այսպիսով ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1. Եթե մակերևույթը կրում է իզոգոնալ չնքիչկյան ցանց, ապա այն փոխող մակերևույթ է:

Այժմ ննթադրենք, որ չնքիչկյան ցանցը նաև գնդեղեղիկ ցանց է: Ինչպես հայտնի է, գնդեղեղիկ ցանցը բնութագրվում է ((5))՝

$$\begin{cases} G_{11}^2 = 0 \\ G_{22}^1 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

պայմաններով, ապա (12) և (13) բանաձևերից կստացվեն՝

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial u^1} = 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial u^2} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

(20)-ից հետևում է $\theta = Const$ պայմանը: Եվ ընդհակառակը՝ $\theta = Const$ պայմանից և (12), (13) բանաձևերից կհետևի՝ (19) պայմանը և չեբիշևյան ցանցը կլինի նաև գնդեղնիկ ցանց:

Այսպիսով, ապագուցմից հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 2. Եթե մակերևույթի վրա չեբիշևյան ցանցը նաև գնդեղնիկ ցանց է, ապա ցանցային անկյունը հաստատուն է, և ընդհակառակը:

Թեորեմ 3. Եթե մակերևույթի վրա ցանցը՝ և՛ չեբիշևյան է, և՛ գնդեղնիկ, ապա այն իզոգոնալ չեբիշևյան ցանց է, և ընդհակառակը:

Թեորեմ 4. Եթե մակերևույթի վրա ցանցը՝ և՛ չեբիշևյան է, և՛ գնդեղնիկ, ապա այն իզոգոնալ գնդեղնիկ ցանց է, և ընդհակառակը:

Ի նկատի ունենալով թեորեմ 1-ը կարող ենք ձևակերպել նաև հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 5. Եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի ցանց, որը և՛ չեբիշևյան է, և՛ գնդեղնիկ, ապա այդ մակերևույթը փափղ մակերևույթ է:

Մասնաճյուղ 2: Եթե մակերևույթի վրա ցանցը՝ և՛ չեբիշևյան է, և՛ գնդեղնիկ, ապա այն կանվանենք դեկարտյան ցանց մակերևույթի վրա:

Ի գիտություն ունենալով այս մասնաճյուղը, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 6. Եթե մակերևույթը կրում է դեկարտյան ցանց, ապա այն փափղ մակերևույթ է: Հայտնի է, որ և՛ վեկտորի գուգահեռ տեղափոխությունը, և՛ անկյունը պատկանում են մակերևույթի ներքին ներքապափությանը, այսինքն մնում են անփոփոխ մակերևույթի իզոմետրիկ արտապատկերման ժամանակ: Հայտնի է նաև, որ հարթության վրա գոյություն ունեն և՛ չեբիշևյան, և՛ գնդեղնիկ, և՛ իզոգոնալ չեբիշևյան, և՛ իզոգոնալ գնդեղնիկ, և՛ դեկարտյան ցանցեր: Հետևաբար, փափղ մակերևույթի վրա, որը կարող է իզոմետրիկ արտապատկերվել հարթության վրա գոյություն կունենան վերևում նշված բոլոր տիպի ցանցերը:

Այստեղից հետևում է, որ նշված թեորեմների պնդումների հակադարձ պնդումները ևս ճիշտ են: Այսինքն, ճիշտ է ոչ միայն այն պնդումը, որ նշված տիպի ցանց թույլ տալու համար անհրաժեշտ է, որ մակերևույթը լինի փափղ, այլ ճիշտ է նաև ընդհակառակը՝ եթե մակերևույթը փափղ է, ապա այն կրում է այդպիսի ցանց: Այսպիսով, կարող ենք ձևակերպել նաև հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 7. Որպեսզի մակերևույթը կրի իզոգոնալ չեբիշևյան ցանց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի փափղ մակերևույթ:

Թեորեմ 8. Որպեսզի մակերևույթը կրի ցանց, որը և՛ չեբիշևյան է, և՛ գնդեղնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի փափղ մակերևույթ:

Թեորեմ 9. Որպեսզի մակերևույթը կրի իզոգոնալ գնդեղնիկ ցանց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի փափղ մակերևույթ:

Թեորեմ 10. Որպեսզի մակերևույթը կրի դեկարտյան ցանց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի փափղ մակերևույթ:

Резюме

В статье доказываются, что при существовании на поверхности евклидова трехмерного пространства чебышевской сети с постоянным сетевым углом-эта поверхность есть развертывающаяся поверхность. Также доказано, что если сеть на поверхности является и чебышевской, и геодезической, то сетевой угол постоянен.

Հրականություն

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности, М., "Наука", 1976.
2. Норден А.П. Пространства декартовой композиции, Известия вузов, математика, N 4, 1963.
3. Базылев В.Т. Об одном замечательном классе сетей, Итоги науки и техники, Проблемы геометрии, т. 7, 1975, с. 105-116.
4. Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В. Сети на многообразиях, Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 12, 1980, с. 97-125.
5. Գ.Ս. Նալբանդյան «Ուիմանյան տարածության չեբիշևյան ցանցեր» ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր, N 2, 2004թ.