ԱՐՑԱԽԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2 (20) 2009

УДК 517.9 *Математика*

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ПАРАХ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ

Г. Г. Саакян

При решении некоторых краевых задач с дифференциальными уравнениями методом разделения переменных (см., например, [1]) возникают системы уравнений, содержащие параметры, причем этими уравнениями и краевыми условиями порождается пара операторов, для которых параметры начинают играть роль собственных значений. Например, предположим, что рассматривается задача, состоящая из уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+q(x,t)u=\lambda u \tag{1}$$

и определенных краевых условий, причем известно, что $q(x,t)=q_1(x)+q_2(t)$ -непрерывная на прямоугольнике $[a,b]\times[t_0,t_1]$ функция, λ-комплексный параметр. Известно, что значение параметра λ, при котором рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение $u(x,t,\lambda)$ $(\neq 0)$, называется *собственным значением*, а соответствующее ему решение u называется собственной функцией.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$u(x,t)=u_1(x)u_2(t).$$

Подставив значение u в уравнение (1) найдем

$$u_1''(x)u_2(t)+u_1(x)u_2''(t)+[q_1(x)+q_2(t)]u_1(x)u_2(t)=\lambda u_1(x)u_2(t).$$

Разделив обе части полученного уравнения на $u_1(x)u_2(t)\neq 0$, получим

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)}+\frac{u_2''(t)}{u_2(t)}+q_1(x)+q_2(t)=\lambda$$

или

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)}+q_1(x)=-\frac{u_2''(t)}{u_2(t)}-q_2(t)+\lambda.$$

Левая часть полученного соотношения зависит только от x, тогда как правая часть зависит только от t. Следовательно, каждая из этих частей постоянна. Примем

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)}+q_1(x)=\lambda_1,$$

тогда будем иметь, что

$$\frac{u_2''(t)}{u_2(t)}+q_2(t)=\lambda-\lambda_1-\lambda_2.$$

Заметим, что заданные для функции $u(x,t)$ краевые условия перейдут в соответствующие краевые условия для функций $u_1(x)$ и $u_2(t)$. Таким образом рассматриваемая задача свелась к задаче, состоящей из системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1''(x)+q_1(x)u_1(x)=\lambda_1 u_1(x),\\ u_2''(t)+q_2(t)u_2(t)=\lambda_2 u_2(t), \end{cases}$$

и некоторых определенных краевых условий. Если теперь ввести в рассмотрение операторы $L_1=\frac{d^2}{dx^2}+q_1(x)$ и $L_2=\frac{d^2}{dt^2}+q_2(t)$, то полученную задачу можно записать в виде

$$\begin{cases} T_1 u_1 = \lambda_1 u_1, \\ T_2 u_2 = \lambda_2 u_2, \end{cases}$$

где под T_1 и T_2 понимаются соответственно операторы L_1 и L_2, но с измененными (с учетом краевых условий на $u_1(x)$ и $u_2(t)$) областями определения. Таким образом, рассматриваемая задача на собственные значения свелась к рассмотрению собственных значений для пары операторов $[T_1, T_2]$.

Пусть T_i -линейные операторы, отображающие гильбертово пространство H_i в себя, $D(T_i)$ $(i = 1,2)$-соответствующие им области определения, $H = H_1 \times H_2$ -прямое произведение пространств H_1 и H_2 (см., например, [2]), элементы которого представляют собой всевозможные пары $h = \{h_1, h_2\} \in D[T_1] \times D[T_2]$. Определим в H скалярное произведениее $<\cdot,\cdot>$, определяемое на элементах $h = \{h_1, h_2\}$ и $h' = \{h_1', h_2'\}$ по формуле

$$<h, h'> = (h_1, h_1')_1 + (h_2, h_2')_2,$$

где $(\ ,\ )_i$ означает скалярное произведение в H_i $(i = 1,2)$. Заметим, что при этом индуцированная скалярным произведением норма в H будет определяться соотношением

$$\|h\| = \sqrt{\|h\|_1^2 + \|h\|_2^2}. \tag{2}$$

Нетрудно показать, что последовательность элементов $h_n = \{h_1^{(n)}, h_2^{(n)}\}$ из H будет сходиться к элементу $h = \{h_1, h_2\}$ тогда и только тогда, когда последовательность $h_i^{(n)}$ будет сходиться к h_i в пространстве H_i $(i = 1,2)$. Из этого следует, что пространство H также будет гильбертовым.

Определение 1. *Операторной парой* $[T_1, T_2]$ *на* H *назовем оператор с областью определения* $D[T_1, T_2] = D(T_1) \times D(T_2)$, *отображающий пространство* H *в себя следующим образом: для* $\{h_1, h_2\} \in D[T_1, T_2]$

$$[T_1, T_2]\{h_1, h_2\} = \{T_1 h_1, T_2 h_2\}. \tag{3}$$

Покажем, что таким образом определенный оператор будет линейным. Имеем для $h = (h_1, h_2)$, $h' = (h_1', h_2')$ из $D[T_1, T_2]$

1. $[T_1, T_2](h + h') = \{T_1(h_1 + h_1'), T_2(h_2 + h_2')\} = \{T_1 h_1 + T_1 h_1', T_2 h_2 + T_2 h_2'\} =$
 $= \{T_1 h_1, T_2 h_2\} + \{T_1 h_1', T_2 h_2'\} = [T_1, T_2]h + [T_1, T_2]h',$
2. $[T_1, T_2](\alpha h) = \{T_1(\alpha h_1), T_2(\alpha h_2)\} = \{\alpha T_1 h_1, \alpha T_2 h_2\} = \alpha\{T_1 h_1, T_2 h_2\} = \alpha[T_1, T_2]h.$

В множестве операторных пар, определенных на фиксированном пространстве H, можно ввести операции сложения

$$([T_1, T_2] + [T_3, T_4])h = \{(T_1 + T_3)h_1, (T_2 + T_4)h_2\}$$

и умножения на скаляр

$$(\alpha[T_1, T_2])h = [\alpha T_1, \alpha T_2]h, \quad \alpha \in C,$$

тем самым превратив его в линейное пространство с нулем $[0_1, 0_2]$, где 0_i -- нулевые операторы соответственно в пространствах H_i $(i = 1,2)$. Заметим, что операторную пару можно считать и одним оператором T, действующим на H по формуле

$$Th = [T_1, T_2]\{h_1, h_2\} = \{T_1 h_1, T_2 h_2\} = \{h_1', h_2'\} = h'.$$

С другой стороны, всякий оператор, определенный на пространстве $H = H_1 \times H_2$, может быть представлен в виде операторной пары. Действительно, соотношение

$$T\{h_1, h_2\} = \{h_1', h_2'\}$$

естественным образом порождает пару операторов T_i с соответствующими им областями определения $D(T_i) \subseteq H_i$ $(i = 1,2)$, и действующих следующим овразом

$$T_i h_i = h_i' \quad (i = 1,2).$$

Таким образом, операторная пару можно рассматривать и как оператор, определенный на $D[T_1, T_2] = D(T_1) \times D(T_2)$ - прямом произведении областей определения операторов T_i $(i = 1,2)$, и действуший по формуле (3).

Как и в случае одного оператора (см., например, [2]), назовем операторную пару $[T_1, T_2]$ ограниченной, если существует положительное число M так, что для любого $h = (h_1, h_2) \in D([T_1, T_2]$ имеет место неравенство

$$\|Th\| = \|[T_1, T_2]h\| \le M\|h\|. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что, если операторы T_1 и T_2 ограничены, то ограниченным будет и операторная пара $[T_1, T_2]$. Действительно, в предположении, что операторы T_1 и T_2 ограничены, будем иметь

$$\|[T_1, T_2]h\|^2 = \|\{T_1 h_1, T_2 h_2\}\|^2 = \|T_1 h_1\|^2 + \|T_2 h_2\|^2 \le \|T_1\|^2 \|h_1\|^2 + \|T_2\|^2 \|h_2\|^2 \le \|T_1\|^2 \left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right) + \|T_2\|^2 \left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right) \le$$
$$\le \left(\|T_1\|^2 + \|T_2\|^2\right)\|h\|^2.$$

Из полученного неравенства следует, что в качестве постоянной M можно взять, например, число $\sqrt{\|T_1\|^2 + \|T_2\|^2}$.

Если рассматривать операторные пары из линейных ограниченных операторов T_1 и T_2, то указанное выше пространство можно превратить в нормированное, приняв

$$\|[T_1, T_2]\| = \sqrt{\|T_1\|^2 + \|T_2\|^2}. \tag{5}$$

Действительно имеем,

1. $\|[T_1, T_2]\| \ge 0$. Если $\|[T_1, T_2]\| = 0$, то получим $\|T_1\| = \|T_2\| = 0$, откуда $[T_1, T_2] = [0_1, 0_2]$.
2. $\|\alpha[T_1, T_2]\| = \sqrt{\|\alpha T_1\|^2 + \|\alpha T_2\|^2} = |\alpha|\sqrt{\|T_1\|^2 + \|T_2\|^2} = |\alpha|\|[T_1, T_2]\|$.
3. $\|[T_1, T_2] + [T_3, T_4]\| = \|[T_1 + T_3, T_2 + T_4]\| = \sqrt{\|T_1 + T_3\|^2 + \|T_2 + T_4\|^2} \le \sqrt{\|T_1\|^2 + \|T_2\|^2} + \sqrt{\|T_3\|^2 + \|T_4\|^2} =$
   $= \|[T_1, T_2]\| + \|[T_3, T_4]\|$.

Определение 2. *Операторную пару $[T_1, T_2]$ назовем самосопряженной, если для любых $h, h' \in D[T_1, T_2]$ имеет место равенство*

$$< [T_1, T_2]h, h' > = < h, [T_1, T_2]h' >. \tag{6}$$

Покажем, что если T_1 и T_2 самосопряженные операторы, то пара $[T_1, T_2]$ также будет самосопряженной. Действительно имеем

$$< [T_1, T_2]h, h' > = < \{T_1 h_1, T_2 h_2\}, \{h_1', h_2'\} > = \left(T_1 h_1, h_1'\right)_1 + \left(T_2 h_2, h_2'\right)_2 = \left(h_1, T_1 h_1'\right)_1 + \left(h_2, T_2 h_2'\right)_2 =$$
$$= < \{h_1, h_2\}, \{T_1 h_1', T_2 h_2'\} > = < h, [T_1, T_2]h' >.$$

Определение 3. *Пару чисел $(\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$ назовем собственным значением операторной пары $[T_1, T_2]$, если существует ненулевой элемент $h = \{h_1, h_2\} \in D[T_1, T_2]$ такой, что*

$$[T_1, T_2]h = \{\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2\}. \tag{7}$$

При этом h называется собственным вектором, соответствующим собственному значению (λ_1, λ_2).

Из определения 3, в частности, следует, что если $h_i \in D(T_i)$ является собственным вектором оператора T_i, соответствующего собственному значению λ_i $(i=1,2)$, то $h=(h_1,h_2)$ является собственным вектором операторной пары $[T_1,T_2]$, соответствущей собственному значению (λ_1,λ_2). Верно и обратное. Отсюда следует, что если обозначить через $\sigma(T_i)$ $(i=1,2)$ множество собственных значений оператора T_i, а через $\sigma([T_1,T_2])$ множество собственных значений операторной пары $[T_1,T_2]$, то $\sigma([T_1,T_2])=\sigma(T_1)\times\sigma(T_i)$.

Лемма 1. *Собственные значения* (λ_1,λ_2) *самосопряженной операторной пары* $[T_1,T_2]$ *удовлетворяют соотношению* $\operatorname{Im}\lambda_1\cdot\operatorname{Im}\lambda_2\geq 0$.

Доказательство. Пусть (λ_1,λ_2)-собственное значение, соответствующее собственному вектору $h=(h_1,h_2)$. Тогда имеем

$$<[T_1,T_2]h,h>=<\{T_1h_1,T_2h_2\},\{h_1,h_2\}>=<\{\lambda_1h_1,\lambda_2h_2\},\{h_1,h_2\}>=\lambda_1(h_1,h_1)_1+\lambda_2(h_2,h_2)_2=$$
$$=\lambda_1\|h_1\|_1^2+\lambda_2\|h_2\|_2^2.$$

С другой стороны

$$<[T_1,T_2]h,h>=<h,[T_1,T_2]h>=\overline{\lambda}_1\|h_1\|^2+\overline{\lambda}_2\|h_2\|^2.$$

Следовательно будем иметь

$$\lambda_1\|h_1\|^2+\lambda_2\|h_2\|^2=\overline{\lambda}_1\|h_1\|^2+\overline{\lambda}_2\|h_2\|^2$$

или

$$(\lambda_1-\overline{\lambda}_1)\|h_1\|^2+(\lambda_2-\overline{\lambda}_2)\|h_2\|^2=0. \tag{8}$$

Отсюда найдем, что $\operatorname{Im}\lambda_1\|h_1\|^2+\operatorname{Im}\lambda_2\|h_2\|^2=0$. Это соотношение возможно лишь тогда, когда $\operatorname{Im}\lambda_1\cdot\operatorname{Im}\lambda_2\leq 0$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что $H_1=H_2$ и пусть M-подмножество $D[T_1,T_2]$, состоящее из элементов вида $\{h,h\}$. Учитывая непрерывность скалярного произведения, нетрудно показать, что M является подпространством H.

Лемма 2. *Если собственный вектор операторной пары* $[T_1,T_2]$, *соответствующий собственному значению* (λ_1,λ_2), *принадлежит* M, *то* $\lambda_1+\lambda_2\in R$.

Действительно, из соотношения (8) при $h_1=h_2=h_0$ получим

$$\left[\lambda_1+\lambda_2-(\overline{\lambda}_1+\overline{\lambda}_2)\right]\cdot\|h_0\|^2=0.$$

И так как $h_0\neq 0$, то найдем, что $\lambda_1+\lambda_2-(\overline{\lambda}_1+\overline{\lambda}_2)=0$ или $\lambda_1+\lambda_2-\overline{(\lambda_1+\lambda_2)}=0$, откуда и будет следовать требуемое утверждение.

Лемма 3. *Собственные векторы самосопряженной операторной пары* $[T_1,T_2]$, *принадлежащие* M *и соответствующие различным собственным значениям* (λ_1,λ_2) *и* (λ_1',λ_2'), *при условии, что* $\lambda_1+\lambda_2\neq\lambda_1'+\lambda_2'$, *ортогональны в* H.

Доказательство. Предположим, что собственному значению (λ_1,λ_2) операторной пары $[T_1,T_2]$ соответствует собственный вектор $h=(h_0,h_0)$, а собственному значению (λ_1',λ_2') - вектор

$h'=(h_0',h_0')$. Из этого будет следовать, что $[T_1,T_2]\{h_0,h_0\}=\{\lambda_1 h_0,\lambda_2 h_0\}$ и $[T_1,T_2]\{h_0',h_0'\}=\{\lambda_1 h_0',\lambda_2 h_0'\}$. Тогда, согласно (2), будем иметь

$$<\{\lambda_1 h_0,\lambda_2 h_0\},\{h_0',h_0'\}>=\lambda_1(h_0,h_0')+\lambda_2(h_0,h_0')=(\lambda_1+\lambda_2)(h_0,h_0').$$

В силу самосопряженности $[T_1,T_2]$ рассматриваемое выражение с другой стороны будет равно

$$<\{h_0,h_0\},\{\lambda_1' h_0',\lambda_2' h_0'\}>=\bar{\lambda}_1'(h_0,h_0')+\bar{\lambda}_2'(h_0,h_0')=(\bar{\lambda}_1'+\bar{\lambda}_2')(h_0,h_0').$$

Откуда найдем

$$(\lambda_1+\lambda_2-\bar{\lambda}_1'-\bar{\lambda}_2')(h_0,h_0')=0. \tag{9}$$

Согласно утверждению 2 $\bar{\lambda}_1'+\bar{\lambda}_2'=\lambda_1'+\lambda_2'$, и так как по условию теоремы $\lambda_1+\lambda_2\neq\lambda_1'+\lambda_2'$, то из (9) получим, что $(h_0,h_0')=0$. Тогда, для h и h' будем иметь

$$<h,h'>=2(h_0,h_0')=0.$$

Утверждение доказано.

Теорема 1. *Если операторы T_i компактны в H_i $(i=1,2)$, $D(T_1)=D(T_2)$, причем в H_i определена операция умножения элементов и $(T_i y)z=T_i(yz)$, то для операторной пары $[T_1,T_2]$ существует счетное множество собственных векторов, принадлежащих M.*

Доказательство. Пусть операторы T_1 и T_2 компактны, тогда компактными будут и операторы T_1+T_2 и T_1-T_2. И, следовательно, каждый из них будет иметь счетную систему собственных векторов (см., например, [3]). Пусть y_n -собственные векторы оператора T_1+T_2, соответствующие собственным значениям λ_n, z_n- собственные векторы оператора T_1-T_2, соответствующие собственным значениям μ_n. Тогда будем иметь

$$(T_1+T_2)y_n=\lambda_n y_n,\quad (T_1-T_2)z_n=\mu_n z_n.$$

Умножив первое из этих равенств на z_n, а второе на y_n, затем сначала суммируя их по частям, а потом вычитывая, найдем

$$T_1(y_n z_n)=\frac{\lambda_n+\mu_n}{2}y_n z_n,$$
$$T_2(y_n z_n)=\frac{\lambda_n-\mu_n}{2}y_n z_n.$$

Обозначив $h_n=y_n z_n$, $\lambda_1^{(n)}=\dfrac{\lambda_n+\mu_n}{2}$, $\lambda_2^{(n)}=\dfrac{\lambda_n-\mu_n}{2}$, получим

$$T_1 h_n=\lambda_1^{(n)}h_n,$$
$$T_2 h_n=\lambda_2^{(n)}h_n.$$

Отсюда следует, что $h_n\in M$ и являются собственными векторами для операторной пары $[T_1,T_2]$, соответствующими собственным значениям $(\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)})$.

Теорема 2. *Если операторная пара $[T_1,T_2]$ имеет собственный вектор $\{h_0,h_0\}$ из M, соответствующий собственному значению (λ_1,λ_2), то h_0 является собственным вектором для операторов T_1T_2 и T_2T_1, соответствующим собственному значению $\lambda_1\lambda_2$.*

Доказательство. Действительно, пусть $T_1h_0=\lambda_1 h_0$, $T_2h_0=\lambda_2 h_0$. Тогда найдем

$$(T_1T_2)h_0=T_1(\lambda_2 h_0)=\lambda_1\lambda_2 h_0,$$

$$(T_2T_1)h_0 = T_2(\lambda_1 h_0) = \lambda_1 \lambda_2 h_0. \tag{10}$$

Отсюда следует, то h_0 является собственным вектором для операторов T_1T_2 и T_2T_1, соответствующим собственныму значению $\lambda_1 \lambda_2$.

Теорема 3. *Пусть операторы T_1 и T_2 коммутируют. Тогда, если $\{h_1, h_2\}$ является собственным значением операторной пары $[T_1, T_2]$, соответствующий собственному значению (λ_1, λ_2), то $\{T_2h_1, T_1h_2\}$ также является собственным вектором для $[T_1, T_2]$, соответствующим собственному значению (λ_1, λ_2). Обратное верно, если $Ker T_1 = Ker T_2 = O$.*

Доказательство. Пусть $[T_1, T_2]h = [T_1, T_2]\{h_1, h_2\} = \{\lambda_1 h_1, \lambda_2 h_2\}$. Значит, $T_1 h = \lambda_1 h$ и $T_2 h = \lambda_2 h$, тогда будем иметь

$$(T_1T_2)h = T_2(T_1h_1) = \lambda_1(T_2h_1).$$

С другой стороны $(T_1T_2)h = T_1(T_2h_1)$, откуда найдем $T_1(T_2h_1) = \lambda_1(T_2h_1)$. Аналогично, можно показать, что $T_2(T_1h_2) = \lambda_2(T_1h_2)$.

Обратно, пусть $\{T_2h_1, T_1h_2\}$-собственный вектор, соответствующий собственному значению (λ_1, λ_2). Тогда будем иметь

$$T_1(T_2h_1) = \lambda_1(T_2h_1) \text{ и } T_2(T_1h_2) = \lambda_2(T_1h_2).$$

Отсюда найдем

$$T_2(T_1h_1) = T_2(\lambda_1h_1) \text{ и } T_1(T_2h_2) = T_1(\lambda_2h_2),$$

откуда в силу условий теоремы получим, что $T_1h_1 = \lambda_1h_1$ и $T_2h_2 = \lambda_2h_2$.

Следствие 1. *Если операторы T_1 и T_2 коммутируют и $\{h_1, h_2\}$ является собственным значением операторной пары $[T_1, T_2]$, соответствующий собственному значению (λ_1, λ_2), то $\{T_2^n h_1, T_1^n h_2\}$ для $n = 1, 2, ...$ также являются собственными векторами для $[T_1, T_2]$, соответствующими собственному значению (λ_1, λ_2).*

Следствие 2. *Если операторы T_1 и T_2 коммутируют и операторная пара $[T_1, T_2]$ имеет хотя бы одно собственное значение (λ_1, λ_2), то операторная пара $[T_1, T_2]$ будет иметь счетное число собственных векторов, соответствующих этому же собственному значению (λ_1, λ_2).*

Ամփոփում

Աշխատանքում սահմանվում են հիլբերտյան տարածություններում որոշված օպերատորների զույգեր, սահմանվում են դրանց համար մի շարք գաղափարներ, ինչպես նաև ապացուցվում են նրանց վերաբերյալ որոշ հատկություններ:

Литература

1. У. Миллер, Симметрия и разделение переменных, М., 1981.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1968.
3. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., 1965.
4. П. Н. Князев, Функциональный анализ, М., 2003.