

Պ. ԷՐԴՐՅՈՇԻ ԽՆԴՐԻ ՆՄԱՆԱՏԻՊ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՈՐՈՇ
ԴԵՊՔԵՐԻ ԼՈՒՏՈՒՄՆԵՐԸ

Ռ.Մ.Մուսայելյան

Հողվածում լուծված է Պ. Էրդյուշի խնդրի նմանատիպ մի խնդիր. Յանկացած բնական k ($k > 1$) թվի համար միշտ գոյություն կունենան այնպիսի x, y, z բնական թվեր, որ տեղի կունենա

$$\frac{5}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

հավասարությունը: Այս հողվածում բերված է խնդրի լուծումը բոլոր k թվերի դեպքում բացառությամբ 1 կամ 9 թվանշանով վերջացող որոշ տիպի պարզ թվերի:

Խնդրի դրվածքը.

Պ. Էրդյուշի խնդիրը կայանում է հետևյալում. Յանկացած բնական k ($k > 1$) թվի համար առոյժ՝ միշտ գոյություն կունենան այնպիսի x, y, z բնական թվեր, որ տեղի ունենա (1) հավասարությունը: Այս խնդիրը շարադրված է Գ.Ա. Տոնոյանի [1] գրքում (էջ 78):

Այդ նույն բաժնի էջ 82-ում ձևակերպված է այս հողվածում շարադրված խնդիրը, որը ունենալով նմանատիպություն Պ. Էրդյուշի խնդրին, վերնագրված է որպես Պ. Էրդյուշի խնդրի նմանատիպ խնդիր:

Ձևակերպենք և ապացուցենք մի շարք թեորեմներ:

Թեորեմ 1. Եթե $k=2m$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) ապա գոյություն ունեն x, y, z այնպիսի բնական թվեր, որ տեղի ունի (1) հավասարությունը:

Ապացույց. Դիցուք $k=2m$, $m \in \mathbb{N}^1$: Թվերի տեսությունից հայտնի է, որ յուրաքանչյուր k բնական թվի կարելի է վերլուծել պարզ արտադրիչների, ընդ որում՝ միակ ձևով: Ենթադրենք

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \quad (2)$$

որտեղ $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ պարզ թվեր են, իսկ $\alpha_i \in \mathbb{N}$ երբ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ բազմությունը:

Բանի որ միակ գույգ պարզ թիվը 2-ն է, ուստի դիտարկված դեպքում պետք է ընդունել $p_1=2$: Վերցնենք $x = y = 2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, իսկ $z = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$:

Կստանանք՝

$$\frac{5}{2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} + \frac{1}{2^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} + \frac{1}{2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}.$$

Իրոք,

$$\frac{1}{2^{\alpha_1-1} A} + \frac{1}{2^{\alpha_1-1} A} + \frac{1}{2^{\alpha_1} A} = \frac{2+2+1}{2^{\alpha_1} A} = \frac{5}{2^{\alpha_1} A}.$$

Այստեղ օգտագործված է $A = p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}$ նշանակումը:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2: Եթե (2) վերլուծության մեջ պարզ թվերից մեկը 5 թիվն է, ապա գոյություն կունենան x, y, z այնպիսի բնական թվեր, որ տեղի ունի (1)-ը:

Ապացույց. Դիցուք $p_1 = 5$: Վերցնելով $x = y = z = 3 \cdot 5^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, կստանանք

$$\frac{5}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} + \frac{1}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}} + \frac{1}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}}.$$

Իրոք,

$$\frac{1}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} A} + \frac{1}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} A} + \frac{1}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} A} = \frac{3}{3 \cdot 5^{\alpha_1-1} A} = \frac{5}{5^{\alpha_1} A}.$$

Թեորեմ 3: Եթե (2) վերլուծության մեջ գտնվում են պարզ թիվ $5r+2$ տեսքի է, ապա միշտ գոյություն կունենան այնպիսի x, y, z բնական թվեր, որ նորից տեղի ունի (1) հավասարությունը:

Ապացույց: Որոշակիություն համար ենթադրենք (2) վերլուծության մեջ $5r+2$ տեսքի պարզ թիվ P_1 -ն է: Նշենք, որ r -ի միայն կենտ արժեքների դեպքում $5r+2$ թիվը կլինի կենտ պարզ թիվ: Որոշման այդ պարզ թիվը միշտ կվերջանա 7 թվանշանով: Հետևաբար՝ $P_1 + 3$ թիվը կլինի 10-ի բազմապատիկ: Այժմ վերցնելով $x = P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+3}{5}$, $y = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+2}{10}$, $z = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+3}{5}$, կստանանք՝

$$\frac{5}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+3}{5}} + \frac{1}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+3}{10}} + \frac{1}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+3}{5}}$$

հորք.

$$\frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+3}{5}} + \frac{1}{P_1^{\alpha_1} A \cdot \frac{P_1+3}{10}} + \frac{1}{P_1^{\alpha_1} A \cdot \frac{P_1+3}{5}} = \frac{5P_1 + 10 + 5}{P_1^{\alpha_1} A \cdot (P_1 + 3)} = \frac{5}{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}}$$

Թեորեմ 4: Եթե (2) վերլուծության մեջ գտնվում են պարզ թիվ $5r+3$ տեսքի է, ապա միշտ գոյություն կունենան այնպիսի x, y, z բնական թվեր, որ տեղի ունի (1)-ը:

Ապացույց: Ենթադրենք (2) վերլուծության մեջ $5r+3$ տեսքի պարզ թիվը P_1 -ն է: Նշենք, որ այդ տեսքի թվերը պարզ կլինեն միայն r -ի գույգ արժեքների դեպքում: Ուստի այդ տեսքի պարզ թիվը միշտ կվերջանա 3 թվանշանով: Հետևաբար՝ $P_1 + 2$ թիվը կվերջանա 5 թվանշանով: Այժմ, որպես x, y, z բնական թվեր, վերցնենք $x = P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+2}{5}$, $y = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+2}{5}$, $z = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+2}{5}$.

Յույց տանք, որ տեղի ունի (1) հավասարությունը, սրտով k -ն (2) վերլուծությունն է, իսկ x, y, z բնական թվերը վերը նշվածներն են:

հորք,

$$\frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+2}{5}} + \frac{1}{k \cdot \frac{P_1+2}{5}} + \frac{1}{k \cdot \frac{(P_1+2)}{5}} = \frac{5P_1 + 5 + 5}{k(P_1 + 2)} = \frac{5}{k}$$

Այստեղ նորից օգտագործված է $A = P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_n^{\alpha_n}$ նշանակումը: Թեորեմ 5: Եթե (2) վերլուծության մեջ գտնվում են պարզ թիվ, ասենք P_1 -ը $5r+1$ տեսքի է, P_1+4 թիվը բազմապատիկն է 3-ին, ապա գոյություն կունենան այնպիսի x, y, z բնական թվեր, որ տեղի ունի (1) հավասարությունը:

Ապացույց: Հստ թեորեմի պայմանի P_1+4 թիվը բազմապատիկն է 3-ի: Մյուս կողմից $P_1 = 5r+1$ պարզ թիվ է: Բայց այն պարզ կլինի միայն r -ի գույգ արժեքների դեպքում: Ուստի P_1+4 թիվը վերջանում է 5 թվանշանով: Ստացվեց, որ P_1+4 թիվը բաժանվում է և 3-ի, և 5-ի: Քանի որ 3 և 5 թվերը փոխադարձ պարզ են, ուստի P_1+4 թիվը կբաժանվի նաև 15-ի: Այժմ, որպես x, y, z բնական թվեր, վերցնենք $x = P_1^{\alpha_1-1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+4}{5}$,

$$y = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+4}{15}, z = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_n^{\alpha_n} \cdot \frac{P_1+4}{5}:$$

Յույց տանք, որ տեղի ունի (1)-ը, որտեղ k -ն (2) վերլուծությունն է, իսկ x, y, z բնական թվերը վերը նշվածներն են:

Իրոք,

$$\frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+4}{5}} + \frac{1}{k \cdot \frac{P_1+4}{15}} + \frac{1}{k \cdot \frac{P_1+4}{5}} = \frac{5P_1+15+5}{k(P_1+4)} = \frac{5}{k};$$

Թևորեն ապացուցված է:

Թևորեն 6. Եթե (2) վերլուծության մեջ գտնվում են պարզ թիվ, ասենք P_1 -ը, $5r+4$ տեսքի է, P_1+1 թիվը բազմապատիկն է 3-ի կամ 4-ի, ապա զոյություն կունենան այնպիսի x, y, z բնական թվեր, որ $\frac{5}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$:

Ապացույց: Ըստ թևորենի պայմանի $P_1 = 5r+4$ պարզ թիվ է: Հետևաբար r -ը պետք է լինի կենտ թիվ: Կատարվի, որ P_1+1 թիվը 10-ի բազմապատիկն է: Եթե P_1+1 թիվը բաժանվում է 3-ի, ապա որպես x, y, z բնական թվեր կվերցնենք $x = P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+1}{5}, y = k \cdot \frac{P_1+1}{3}, z = k \cdot \frac{P_1+1}{2}$:

Իսկ եթե P_1+1 թիվը 4-ի բազմապատիկն է, ապա որպես x, y, z բնական թվեր կվերցնենք $x = P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+1}{5}, y = k \cdot \frac{P_1+1}{4}, z = k \cdot (P_1+1)$:

Նշենք, որ նախորդ դեպքերի նման A -ով նշանակված է $P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_n^{\alpha_n}$ արտահայտությունը: Առաջին դեպքում կստանանք՝

$$\frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+1}{5}} + \frac{1}{k \cdot \frac{P_1+1}{3}} + \frac{1}{k \cdot \frac{P_1+1}{2}} = \frac{5P_1+3+2}{k(P_1+1)} = \frac{5(P_1+1)}{k(P_1+1)} = \frac{5}{k};$$

Մյուս դեպքում կստանանք՝

$$\frac{1}{P_1^{\alpha_1-1} A \cdot \frac{P_1+1}{5}} + \frac{1}{k \cdot \frac{P_1+1}{4}} + \frac{1}{k \cdot (P_1+1)} = \frac{5P_1+4+1}{k(P_1+1)} = \frac{5}{k};$$

Թևորեն ապացուցված է:

Ստացվեց, որ (1) բանաձևը ճիշտ է գրեթե բոլոր դեպքերում, բացառությամբ 1 և 9 թվանշաններով վերջացող որոշ տիպի պարզ թվերի:

Գրականություն

1. Գ.Ա. Տոնյանի քում (էջ 78): «Մաթեմատիկական ընտրովի թևորեններ և խնդիրներ», Եր., «Լույս» հրատ., 1970, էջ 78:

Резюме

В статье решена задача, подобная известной задаче П. Эрдеша, которая гласит: Для любого натурального числа $k(k>1)$ всегда существуют такие натуральные числа x, y, z , при которых

$$\frac{5}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

где k -любое натуральное число, за исключением некоторых случаев простых чисел, последняя цифра которых 1 или 9.