1 (21) 2010

УДК 517.9 *Математика*

О ПОВЕДЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ОДНОГО ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ

Г.Г.Саакян

В работе доказывается аналитичность мультипликаторов одного двупараметрического уравнения, а также рассматривается их поведение при малых значениях параметров.

В работах М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда и В.В. Лидского (см., [1]-[4]) рассматривались вопросы сильной устойчивости (ограниченность решений на $(-\infty,+\infty)$ и сохранение этого свойства при незначительных изменениях гамильтона) гамильтоновой системы линейных дифференциальных уравнений

$$i^{-1}G\frac{dx}{dt}=H_0(t)x$$

с периодическими коэффициентами (подробное изложение указанных выше вопросов приводится и в монографии [5]). Малые изменения гамильтона обеспечивались за счет рассмотрения более общего уравнения, а именно уравнения

$$i^{-1}G\frac{dx}{dt}=\left[H_0(t)+\lambda Q(t)\right]x$$

в предположении, что значение параметра λ достаточно мало. В частности, было доказано, что мультипликаторы данного уравнения, расположенные на единичной окружности, распадаются по некоторому правилу на мультипликаторы первого и второго рода, причем, для сильной устойчивости рассматриваемого уравнения необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы лежали на единичной окружности и чтобы среди них не было совпавших мультипликаторов разного рода. Рассматривался и вопрос аналитичности таких мультипликаторов $\rho(\lambda)$ и их поведения при малых изменениях параметра λ.

В работе рассматривется следующее двупараметрическое уравнение (см., [6])

$$S\frac{dy}{dx}+Gy=\sum_{s=1}^{2}\lambda_s A_s y\,, \tag{1}$$

где $G(x), A_s(x)$ $(s=1,2)$-непрерывные на $[0,\ell]$, вещественные, симметричные, периодические матрицы порядка 2×2,

$$G(x+\ell)=G(x),\ A_s(x+\ell)=A_s(x),\ s=1,2,$$

λ_1,λ_2-комплексные параметры, $y(x)=(y_1(x),y_2(x))$- C^2-значная неизвестная вектор-функция, S-сигнатурная матрица: $S^*=-S, S^2=-E$ (E-единичная матрица 2-ого порядка).

По аналогии с приведенным вначале однопараметрическим случаем, можно доказать, что указанная выше связь мультипликаторов с сильной устойчивостью уравнения (1) присутствует и в рассматривамом случае. В этой связи становится актуальным исследование поведения мультипликаторов, лежащих на единичной окружности, и в, частности, при малых значениях параметров, что и является целью настоящей работы.

Если через $Y(x,\lambda)$ $(\lambda=(\lambda_1,\lambda_2))$ обозначить матрицант уравнения (1), то известно (см. [6]), что он является аналитической функцией от λ и имеет место следующее соотношение

$$Y^*SY=S\ \ (S\text{-унитарность}). \tag{2}$$

Рассмотрим в пространстве C^2-значных вектор-функций индефинитное скалярное произведение (см. [5], стр. 137), определяемое с помощью обычного скалярного произведения по формуле

$$<x,y>=\left(iSx,y\right). \tag{3}$$

Нетрудно показать, что произведение $<x,y>$ обладает следующими свойствами:

1. $< x,y >$ является линейной функцией от x, т.е. для любых комплексных чисел α,β и любых C^2 – значных вектор-функций x_1, x_2, y

$< \alpha x_1 + \beta x_2, y >= \alpha < x_1, y > + \beta < x_2, y >,$

2. $\overline{< x,y >} =< y,x >$ (свойство эрмитовости).

Заметим, что число $< x,x >$ (скалярный квадрат вектора) вещественно по свойству 2, однако, не обязательно положительно.

По аналогии с классификацией М. Г. Крейна (см., [5], стр. 140), дадим следующее определение.

Определение 1. а. Пусть ρ простое собственное значение S - унитарной матрицы A, лежащее на единичной окружности $(|\rho| = 1)$ и x_0 - соответствующий собственный вектор $Ax_0 = \rho x_0$. Число ρ называется собственным значением первого рода, если $< x_0, x_0 > > 0$ и собственным значением второго рода, если $< x_0, x_0 > < 0$.

б. Пусть ρ - двукратное собственное значение S -унитарной матрицы A, лежащее на единичной окружности $(|\rho| = 1)$ и A_ρ - соответствующее собственное пространство. Число ρ называется двукратным собственным значением первого рода, если для любого $x \neq 0$ из A_ρ — $< x,x > > 0$ и собственным значением второго рода, если $< x,x > < 0$.

Собственные значения первого и второго родов называются *дефинитными*.

Поскольку каждый из матрицантов $Y(x,\lambda)$ является S-унитарной матрицей, то вышеизложенное определение распространяется и на мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ ($j = 1,2$) уравнения (1), т.е. собственные значения матрицы монодромии $Y(\ell,\lambda)$, являющиеся по сути корнями уравнения

$$\det[Y(\ell,\lambda) - \rho E] = 0. \qquad (4)$$

Для дальнейшего изложения воспользуемся следующей леммой из теории аналитических функций многих переменных.

Лемма. *Пусть* $f(\xi,\eta)$ *-голоморфная функция* ξ *и* η *в точке* (ξ_0,η_0), *т.е. функция* $f(\xi,\eta)$ *при достаточно малых* $|\xi - \xi_0|$ *и* $|\eta - \eta_0|$ *представима сходящимся рядом*

$$f(\xi,\eta) = A_{00} + A_{10}(\xi - \xi_0) + A_{01}(\eta - \eta_0) + \ldots + \sum_{p+q=m} A_{pq}(\xi - \xi_0)^p(\eta - \eta_0)^q + \ldots .$$

Пусть $A_{00} = f(\xi_0,\eta_0) = 0,\ f(\xi_0,\eta) \neq 0$ *и* $\eta = \eta(\xi)$ — *функция, определенная в окрестности точки* $\xi = \xi_0$ *уравнением* $f(\xi,\eta) = 0$ *и условием* $\eta(\xi_0) = \eta_0$.

Пусть L *-некоторая линия на комплексной плоскости* $\{\xi\}$, *проходящая через точку* ξ_0 *и имеющая касательную в точке* ξ_0, M *-некоторая линия на комплексной плоскости* $\{\eta\}$, *проходящая через точку* η_0 *и имеющая касательную в точке* η_0.

Предположим, что когда точка ξ *лежит на линии* L *(и когда* $|\xi - \xi_0|$ *достаточно мало), все значения* η, *удовлетворяющие уравнению* $f(\xi,\eta) = 0$ *(и достаточно близкие к* η_0*) лежат на линии* M. *Тогда все значения* $\eta(\xi)$ *(их будет конечное число) являются однозначными аналитическими функциями в точке* ξ_0,

$$\eta^{(j)}(\xi) = \eta_0 + \eta_1^{(j)}(\xi - \xi_0) + \eta_2^{(j)}(\xi - \xi_0)^2 + \ldots .$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть в точке* ρ_0 *единичной окружности имеется двукратный и дефинитный мультипликатор уравнения* (1) *для* $\lambda = \lambda_0$. *Тогда:*

(I) в некоторой окрестности λ_0 можно выделить две однозначные аналитические ветви $\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda)$ функции $\rho(\lambda)$, определяемые уравнением (4) и обращающиеся при $\lambda = \lambda_0$ в ρ_0.

(II) при вещественных λ, достаточно близких к λ_0 $|\rho_j(\lambda)| = 1$, $(j = 1,2)$;

(III) для коэффициентов δ_s^j $(s, j = 1,2)$ разложения

$$\rho_j(\lambda) = \rho_0 \left\{1 + \delta_1^j(\lambda_1 - \lambda_1^0) + \delta_2^j(\lambda_2 - \lambda_2^0) + O(\lambda_1 - \lambda_1^0)^2 + O(\lambda_1 - \lambda_1^0)^2\right\} \tag{5}$$

справедлива формула

$$\delta_s^j = \frac{i}{<a_j, a_j>} \int_0^\ell (A_s(t) y_j, y_j) dt, \tag{6}$$

где a_j - подходящим образом выбранные собственные векторы матрицы монодромии $Y(\ell, \lambda_0) a_j = \rho_0 a_j$ и $y_j = Y(\ell, \lambda_0) a_j$ -соответствующие решения уравнения (1) для $\lambda = \lambda_0$ $(j = 1,2)$.

Доказательство. Утверждение (II) можно доказать также, как и в теореме М.Г. Крейна (см. [3]). Мультипликаторы $\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda)$, обращающиеся в ρ_0 при $\lambda = \lambda_0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0)$, суть все значения $\rho(\lambda)$, определенные уравнением (4) и условием $\rho(\lambda_0) = \rho_0$.

Для доказательства утверждения (I) применим вышеупомянутую лемму к функции $f(\lambda, \rho)$, зафиксировав $\lambda_2 = \lambda_2^0$, и взяв $\xi = \lambda_1$, $\eta = \rho$, $\xi_0 = \lambda_1^0$, $\eta_0 = \rho_0$, и считая, что L-вещественная ось, а M-единичная окружность. Функция $f(\lambda, \rho)$, как следует из (4), будет аналитической при $\lambda_1 - \lambda_1^0$, $\rho = \rho_0$. Условие $f(\rho, \lambda_0) \neq 0$, очевидно, выполнено. Используя утверждение (II) и лемму, получим, что все 2 значения $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ аналитические функции λ по λ_1 при $\lambda_1 = \lambda_1^0$. Аналогично доказывается их аналитичность и по λ_2 при $\lambda_2 = \lambda_2^0$. По известной теореме Хартогса из теории аналитических функций многих переменных, из аналитичности $\rho_j(\lambda)$ по каждому из аргументов λ_1 и λ_2 соответственно при $\lambda_1 = \lambda_1^0$ и $\lambda_2 = \lambda_2^0$ будет следовать их аналитичность в некоторой окрестности точки $(\lambda_1^0, \lambda_2^0)$.

Перейдем к доказательству утверждения (III). Поскольку $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ и $Y(\ell, \lambda)$ являются аналитическими функциями λ в окрестности $\lambda = \lambda_0$, то и соответствующие собственные векторы a_j можно выбрать аналитическими. Опуская индекс j для удобства, будем иметь:

$$Y(\ell, \lambda) a(\lambda) - \rho(\lambda) a(\lambda).$$

Дифференцируя это равенство по λ_1 и умножая на $a(\lambda)$ в смысле индефинитного скалярного произведения, получим:

$$< \frac{\partial Y}{\partial \lambda_1} a, a > + < Y \frac{\partial a}{\partial \lambda_1}, a >= \frac{\partial \rho}{\partial \lambda_1} < a, a > + \rho < \frac{\partial a}{\partial \lambda_1}, a >. \tag{7}$$

Поскольку матрица Y является S-унитарной, то будем иметь

$$< Y \frac{\partial a}{\partial \lambda_1}, a >=< \frac{\partial a}{\partial \lambda_1}, Y^{-1} a >=< \frac{\partial a}{\partial \lambda_1}, \rho^{-1} a >= \overline{\rho}^{-1} < \frac{\partial a}{\partial \lambda_1}, a >.$$

При $\lambda = \lambda_0$ имеем $\rho = \rho_0$, и так как $|\rho_0| = 1$, то $\overline{\rho}^{-1} = \rho_0$, следовательно,

$$< Y(\ell, \lambda_0) \left(\frac{\partial a}{\partial \lambda_1}\right)_{\substack{\lambda_1 = \lambda_1^0 \\ \lambda_2 = \lambda_2^0}}, a(\lambda_1^0, \lambda_2^0) >= \rho_0 < \left(\frac{\partial a}{\partial \lambda_1}\right)_{\substack{\lambda_1 = \lambda_1^0 \\ \lambda_2 = \lambda_2^0}}, a(\lambda_1^0, \lambda_2^0) >.$$

Тогда в (7) при $\lambda = \lambda_0$ последние слагаемые слева и справа сокращаются и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_1}\right)_{\lambda=\lambda_0} < a(\lambda_0), a(\lambda_0) > = < \left(\frac{\partial Y(\ell,\lambda)}{\partial\lambda_1}\right)_{\lambda=\lambda_0} a(\lambda_0), a(\lambda_0) > . \qquad (8)$$

Для преобразования правой части (8) продифференцируем по λ_1 уравнение (1). Получим уравнение

$$S\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda_1}\right) + G\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda_1}\right) = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i A_i\left(\frac{\partial Y}{\partial\lambda_1}\right) + A_1 Y . \qquad (9)$$

Воспользовавшись формулой (см., например, [6], стр. 86)

$$Z(t) = X(t)[Z(0) + \int_0^t X^{-1}(t_1)F(t_1)dt_1],$$

выражающей решение неоднородного матричного уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = A(t)Z + F(t)$$

через матрицант $X(t)$ соответствующего однородного уравнения, из уравнения (9) найдем,

$$\left.\frac{\partial Y(\ell,\lambda)}{\partial\lambda_1}\right|_{\lambda=\lambda_0} = Y(\ell,\lambda_0)\int_0^{\ell} Y^{-1}(t,\lambda_0)S^{-1}A_1(t)Y(t,\lambda_0)dt .$$

Далее, подставляя это значение в (8), и, используя S-унитарность матрицы $Y(t,\lambda_0)$, получим

$$\left(\frac{d\rho}{d\lambda_1}\right)_{\lambda=\lambda_0} < a(\lambda_0), a(\lambda_0) > = < \int_0^{\ell} Y^{-1}(t,\lambda_0)S^{-1}A_1(t)Y(t,\lambda_0)a(\lambda_0)dt, Y^{-1}(l,\lambda_0)a(\lambda_0) > .$$

Так как $Y^{-1}(\ell,\lambda_0)a(\lambda_0) = \rho_0^{-1}a(\lambda_0)$, а $Y(t,\lambda_0)$ является S-унитарной матрицей, то с учетом соотношения (3), будем иметь

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_1}\right)_{\lambda=\lambda_0} < a(\lambda_0), a(\lambda_0) > = i\rho_0\int_0^{\ell}(A_1(t)y(t,\lambda_0), y(t,\lambda_0))dt ,$$

где $y(t,\lambda_0) = Y(t,\lambda_0)a(\lambda_0)$ — решение уравнения (1) для $\lambda = \lambda_0$, определенное начальным условием $y(0,\lambda_0) = a(\lambda_0)$. Для дефинитного собственного значения по определению $< a(\lambda_0), a(\lambda_0) > \neq 0$ и окончательно придем к формуле

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_1}\right)_{\lambda=\lambda_0} = \frac{i\rho_0}{< a(\lambda_0), a(\lambda_0) >}\int_0^{\ell}(A_1(t)y(t,\lambda_0), y(t,\lambda_0))dt .$$

Аналогично вышеизложенному, можно получить:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_2}\right)_{\lambda=\lambda_0} = \frac{i\rho_0}{< a(\lambda_0), a(\lambda_0) >}\int_0^{\ell}(A_2(t)y(t,\lambda_0), y(t,\lambda_0))dt .$$

Из последних соотношений и будет вытекать справедливость соотношений (5) и (6). Теорема доказана.

Формулы (5) и (6) позволяют определить поведение мультипликаторов при малых λ_1 и λ_2 при некоторых дополнительных предположениях относительно матриц A_1 и A_2. Действительно, предположим, что матрицы A_1 и A_2 положительно определены $\left(\int_0^{\ell}(A_k(t)y, y)dt > 0,\ k = 1,2\right)$. Примем $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0$, тогда формулы (5) и (6) примут вид

$$\rho_j(\lambda) - \rho_0[1 + i\sigma_1^j\lambda_1 + i\sigma_2^j\lambda_2 + O(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)], \qquad (10)$$

где

$$\delta_k^j = -i\sigma_k^j = \frac{1}{< a_j, a_j >}\int_0^{\ell}(A_k(t)y_j, y_j)dt, \qquad k, j = 1,2.$$

Легко получить из (10), что

$$
\begin{aligned}
|\rho_j(\lambda)|^2 &= |1 + i\sigma_1^j\lambda_1 + i\sigma_2^j\lambda_2 + O(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2)|^2 = \\
&= 1 - 2\sigma_1^j \operatorname{Im}\lambda_1 - 2\sigma_2^j \operatorname{Im}\lambda_2 + 2\sigma_1^j\sigma_2^j(\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 + \operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2) + O(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Далее, воспользовавшись легко доказываемым неравенством

$$(ab + cd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

заметим, что

$|\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 + \operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2| \le |\lambda_1||\lambda_2|,$

и, в силу малости λ_1 и λ_2, в правой части соотношения (11) можно пренебречь слагаемым вида $2\sigma_1^j, \sigma_2^j(\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 + \operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Re}\lambda_2)$. Соотношение (11) примет вид

$$|\rho_j(\lambda)|^2 = 1 - 2\sigma_1^j \operatorname{Im}\lambda_1 - 2\sigma_2^j \operatorname{Im}\lambda_2 + O(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2). \tag{12}$$

Пусть ρ_0-дефинитный мультипликатор первого рода. Поскольку $\int_0^T (A_k(t)y_j, y_j)dt > 0$ и $< a_j, a_j > > 0$, то $\sigma_k^j > 0$ $(k = 1,2)$, и, следовательно, из соотношения (12) будет следовать, что $|\rho_j(\lambda)| < 1$ при $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, $|\rho_j(\lambda)| > 1$ при $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$ $(j = 1,2)$. Аналогично ведут себя и мультипликаторы, образующие при $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0$ кратный мультипликатор второго рода. Для всех j имеем $\sigma_k^j < 0$ и, следовательно, $|\rho_j(\lambda)| > 1$ при $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \operatorname{Im}\lambda_2 > 0$, $|\rho_j(\lambda)| < 1$ при $\operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, $(j = 1,2)$. В случае, когда $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$ и ρ_0-мультипликатор первого рода, соответственно будем иметь $|\rho_j(\lambda)| < 1$ при $\begin{cases} \operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \\ \sigma_1^j |\operatorname{Im}\lambda_1| < \sigma_2^j |\operatorname{Im}\lambda_2|, \end{cases}$ и $|\rho_j(\lambda)| > 1$ при $\begin{cases} \operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \\ \sigma_1^j |\operatorname{Im}\lambda_1| > \sigma_2^j |\operatorname{Im}\lambda_2|. \end{cases}$

Если $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$ и ρ_0-мультипликатор второго рода, то соответственно будем иметь $|\rho_j(\lambda)| > 1$ при $\begin{cases} \operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \\ \sigma_1^j |\operatorname{Im}\lambda_1| < \sigma_2^j |\operatorname{Im}\lambda_2|, \end{cases}$ и $|\rho_j(\lambda)| < 1$ при $\begin{cases} \operatorname{Im}\lambda_1 < 0, \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \\ \sigma_1^j |\operatorname{Im}\lambda_1| > \sigma_2^j |\operatorname{Im}\lambda_2|. \end{cases}$

Литература

1. **И.М. Гельфанд, В. В. Лидский.** О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, УМН, 1955, 10, вып. 1(63), 3-40.
2. **М. Г. Крейн.** Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, 1950, 73, № 3, 445-448.
3. **М. Г. Крейн.** Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных диффференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Сб. Памяти А.А. Андронова. Изд. АН СССР, 1955, 413-498.
4. **И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.** Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
5. **В. А. Якубович, В. М. Старжинский.** Линейные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
6. **Г. Г. Саакян.** Теорема Флоке-Ляпунова для двупараметрической системы Дирака с периодическими коэффициентами. Ученые записки ЕрГУ, 2.2001.
7. **Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ЛКИ, 2007.

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է մի երկպարամետրանոց հավասարման մուլտիպլիկատորների անալիտիկությունը, ինչպես նաև դիտարկվում է նրանց վարքը պարամետրերի փոքր արժեքների դեպքում: