

ՄԵՆԱՆԻԿԱԿԱՆ ՓՈՋՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ՝ ՆԵՐԳՈՐԾՈՂ
ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ՈՒԺԻ ՊԱՅՄԱՆՈՒՄ

Մ.Մ.Անդրեասյան, Ա.Մ.Մինասյան, Մ.Մ.Մինասյան

Տեսական ֆիզիկայի դասընթացում լավ հայտնի է [1] ձեռնարկը, որում նյութի յուրօրինակ շարադրանքը ուղեկցվում է խնդիրներով՝ նվիրված, ի թիվ այլոց, նաև փոքր տատանումներին: Մի շարք խնդիրներ մեկնաբանում են միաշափ ստիպողական տատանումների գրգռման առանձնահատկեր: Դրանք ներկայացնող ուժերը, բացահայտ կախված լինելով ժամանակից, անկրողատ (կամ թոմսոնյան) համակարգը դարձնում են ոչ ավտոնոմ, ինչի հետ կապված՝ շարժման հավասարումն է՝

$$m\ddot{x} + kx = F(t): \quad (1)$$

Առաջարկվում է ընդհանրացնող լուծում կամայական իրական $F(t)$ -երի համար՝

$$x(t) = (i\omega)^{-1} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega t} \left[\int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau + \xi_0 \right] \right\}, \quad (2)$$

ինչը ձեռք է բերվում՝ նախապես ներմուծելով $\xi = \dot{x} + i\omega x$ կոմպլեքս փոփոխական և նվազեցնելով (1) դիֆերենցիալ հավասարման կտրվել: Նշանակումներում օգտագործված են տատանակի սեփական ω հաճախությունը և $\xi|_{t=0} = \xi_0$ պահանջը, իսկ Im -ը առյուծանվորում է $\xi(t)$ -ի կեղծ մասի առանձնացումը:

Մեզ օգտակար է թվում որոշ խնդիրների մեկնաբանումը ըստ (2) սխեմայի ուղեկցել լրացուցիչ եիմնավորումներով, որոնք ելնում են մաթեմատիկայի համալսարանական ծրագրային նյութից և այդ առումով բարձրացնում են նրա կիրառական գրառչությունը: Մասնավոր դեպքում ուժային նոր ֆունկցիայի՝ լոգարիթմի ընտրությունը չի կրկնում, այլ գումարվում է [1]-ում առկա դեպքերին, մոտիկ է ձեռնարկի թ.2 խնդիրն (որում $F(t)$ -ն ներառվում է $F = 0$, երբ $t < 0$, $F = F_0 t/T$, երբ $0 < t < T$, $F = F_0$, երբ $t > T$), նաև այն հետաքրքիր է կիրառական տեսանկյունից:

Ժամանակային $t \geq 0$ սխիսթյություն շարժման նորացված հավասարումն է՝

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_0 x = F_0 \ln \left(1 + \frac{t}{\tau_0} \right): \quad (3)$$

Նրա համար՝ $x = \dot{x} = 0$, երբ $t = 0$: Ի տարբերություն (1)-ի թույլատրվում են մեխանիկական էներգիայի կորուստներ ևս ($b \geq 0$): Այս պարագայում ընդհանրացված գրանցման ավելի հարմար տեսքն է

$$\ddot{x} + 2\lambda_1 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 A_0 \ln \left(1 + \frac{t}{\tau_0} \right), \quad (3')$$

որտեղ A_0 և τ_0 -ն հաստատուններ են; $\lambda_1 = b/2m$, $\omega_0^2 = k_0/m = \omega_1^2 + \lambda_1^2$, $A_0 = -F_0/k_0$:

Մեր քննարկելիք (3) հավասարման մոտեցությունը (1)-ին կարելի է ապահովել, եթե ազատվենք $(n-1)$ -րդ կարգի ածանցյալ պարունակող անդամից: Այդպես (3')-ում դա կվերաբերի $2\lambda_1 x$ -ին: Այդ ընթացքում՝ ըստ [2,3] ի կօգտվենք $x(t) = u(t) v(t)$ տեսքի նշանակումից, որում տեղի ունի

$$u(t) = \exp\left(-\frac{1}{n} \int \frac{f_{n-1}}{f_n} dt\right) \neq 0$$

և դրանով իսկ ապահովված է $x(t)$ -ի ու $v(t)$ -ի արմատների համընկումը: Հիշյալ նշանակումը կենթիվ ազատվող կարճեցված հավասարմանը, այն է՝ (4)-ին, եթե (3')-ի եիմքի վրա իրականացվի թայլերի հետևյալ հաջորդականությունը.

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{2\lambda_1}{1} dt\right) = e^{-\lambda_1 t}, \\ x(t) &= e^{-\lambda_1 t} v(t), \\ \ddot{x} &= \left(v e^{-\lambda_1 t}\right)'' = (\ddot{v} - 2\lambda_1 \dot{v} + \lambda_1^2 v) e^{-\lambda_1 t}, \\ 2\lambda_1 \dot{x} &= 2\lambda_1 \left(v e^{-\lambda_1 t}\right)' = (2\lambda_1 \dot{v} - 2\lambda_1^2 v) e^{-\lambda_1 t}, \\ \ddot{x} + 2\lambda_1 \dot{x} + \omega_0^2 x &= [\ddot{v} + (\omega_0^2 - \lambda_1^2) v] e^{-\lambda_1 t} = (\ddot{v} + \omega_1^2 v) e^{-\lambda_1 t}, \\ \ddot{v} + \omega_1^2 v &= -\omega_0^2 A_0 e^{-\lambda_1 t} \ln\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right): \end{aligned} \quad (4)$$

Վերջինիս լուծումը կարելի է որոնել կամայական հաստատունների վարիացիայի մեթոդով, որում պետք է օգտվել, $\ddot{v} + \omega_1^2 v = 0$ համասեռ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալից՝ $v_1(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t$, և C_1, C_2 հաստատունները փոխարինել համապատասխանորեն

$$w_1(t) = -\frac{1}{\omega_1} \int_0^t R(\xi) \sin \omega_1 \xi d\xi \quad \text{և} \quad w_2(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t R(\xi) \cos \omega_1 \xi d\xi \quad \text{ժամանակային ֆունկցիաներով}$$

[2] Այդ դեպքում իբրև (4)-ի մասնավոր լուծում կունենանք՝

$$v(t) = -\frac{\cos \omega_1 t}{\omega_1} \int_0^t R(\xi) \sin \omega_1 \xi d\xi + \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \int_0^t R(\xi) \cos \omega_1 \xi d\xi,$$

որտեղ նշանակված է

$$R(\xi) = -\omega_0^2 A_0 e^{-\lambda_1 \xi} \ln\left(1 + \frac{\xi}{\tau_0}\right): \quad (5)$$

կարելի է $\cos \omega_1 t$ և $\sin \omega_1 t$ գործակիցները $v(t)$ լուծման մեջ տեղափոխել ինտեգրալների տակ: Այդ դեպքում

$$v(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t R(\xi) \sin[\omega_1(t - \xi)] d\xi: \quad (6)$$

Այժմ, երբ ստացված են անհրաժեշտ բաղադրիչները, վերադառնում ենք $x(t) = u(t) v(t)$ -ին՝

$$= -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A_0 \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} \ln \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0} \right) \sin[\omega_1(t-\xi)] d\xi :$$

Նշանակելով $t - \xi = \tau$, $t + \tau_0 = \vartheta$ այս լուծումը բերում ենք ավելի սեղմ տեսքի՝

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A_0 \int_0^t e^{-\lambda_1 \tau} \ln \left(1 + \frac{t-\tau}{\tau_0} \right) \sin \omega_1 \tau d\tau = \\ &= -\frac{\omega_0^2}{\omega_1} A_0 \int_0^t e^{-\lambda_1 \tau} \ln \frac{\vartheta - \tau}{\tau_0} \sin \omega_1 \tau d\tau : \end{aligned}$$

Քանի որ [1]-ից փոխառնված թ.2 խնդրում դիտարկվում է անկորդատ տատանակի ապա (7) և (2) լուծումներին կարելի է գուգահեռաբար հետևել, եթե պահանջներ $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_1 \ll \omega_0$ ։ Առաջին դեպքում (7)-ից ստանում ենք

$$x_1(t) = -\omega_0 A_0 \int_0^t \ln \frac{\vartheta - \tau}{\tau_0} \sin \omega_0 \tau d\tau,$$

և կարող ենք հետագա պարզեցումների գալ՝ օգտվելով մասերով ինտեգրումից.

$$\begin{aligned} \frac{x_1(t)}{A_0 \omega_0} &= \left(\ln \frac{\vartheta - \tau}{\tau_0} \cdot \frac{\cos \omega_0 \tau}{\omega_0} \right) \Big|_0^t - \int_0^t \frac{\cos \omega_0 \tau}{\omega_0} \frac{d(\vartheta - \tau)}{\vartheta - \tau} = \\ &= -\frac{1}{\omega_0} \ln \frac{\vartheta}{\tau_0} + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \frac{\cos \omega_0 \tau}{\vartheta - \tau} d\tau = \frac{1}{\omega_0} \left[-\ln \frac{\tau_0}{\tau_0} + t + \int_0^t \frac{\cos \omega_0 \tau}{\vartheta - \tau} d\tau \right] \end{aligned}$$

Վերջինում կատարում ենք փոփոխականի փոխարինում՝ $\vartheta - \tau = \theta$, $d\tau = -d\theta$ և ստանք

$$\begin{aligned} -\int_0^t \frac{\cos \omega_0 \tau}{\vartheta - \tau} d\tau &= \int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\cos(\omega_0 \vartheta - \omega_0 \theta)}{\theta} d\theta = \int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\cos \omega_0 \vartheta \cdot \cos \omega_0 \theta + \sin \omega_0 \vartheta \cdot \sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta = \\ &= \cos \omega_0 \vartheta \int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta + \sin \omega_0 \vartheta \int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta : \end{aligned}$$

Երկու ինտեգրալներից առաջինը Էվանսակերպենք՝ նպատակ ունենալով ինտեգրալային կոսինուսի՝

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta &= -\int_{\tau_0}^{\vartheta} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta = -\left[\int_{\tau_0}^{\vartheta} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta - \int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta \right] = \\ &= -\int_{\tau_0}^{\vartheta} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta - \left[-\int_{\vartheta}^{\tau_0} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta \right] = -\int_{\tau_0}^{\vartheta} \frac{\cos(\omega_0 \theta)}{\omega_0 \theta} d(\omega_0 \theta) - \left[-\int_{\omega_0 \vartheta}^{\omega_0 \tau_0} \frac{\cos(\omega_0 \theta)}{\omega_0 \theta} d(\omega_0 \theta) \right] = \\ &= Ci(\omega_0 \tau_0) - Ci(\omega_0 \vartheta), \quad \tau_0 > 0, \quad \vartheta > 0 : \end{aligned}$$

Լրացուցիչ հնարավոր է Ci -ից անցում $-ci$ -ի, ընդունելով (ըստ [4,5] -ի)

$$ci(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du \quad (10)$$

Այդպիսի սահմանման շնորհիվ տեղի ունի

$$\int_0^{\tau_0} \frac{\cos \omega_0 \theta}{\theta} d\theta = ci(\omega_0 \vartheta) - ci(\omega_0 \tau_0): \quad (11)$$

Այժմ նույնանման փոխակերպումներ ենք կատարում նաև երկրորդ ինտեգրալի հետ և բերում այն ու տարրական մեկ այլ ֆունկցիայի՝ ինտեգրալային սինուսի.

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta &= - \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta = - \left[\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta - \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta \right] = \\ &= - \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta - \left[- \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \theta}{\theta} d\theta \right] = - \int_{\omega_0 \tau_0}^{\infty} \frac{\sin(\omega_0 \theta)}{\omega_0 \theta} d(\omega_0 \theta) - \left[- \int_{\omega_0 \vartheta}^{\infty} \frac{\sin(\omega_0 \theta)}{\omega_0 \theta} d(\omega_0 \theta) \right] = \\ &= si(\omega_0 \tau_0) - si(\omega_0 \vartheta), \end{aligned} \quad (11')$$

որտեղ սահմանված է (ըստ [4,5]-ի).

$$si(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \quad (10')$$

Վերջապես վերագտնում ենք (8'), կատարում (11) և (11')-ից բխող տեղադրումներ և ստանում.

$$x_1 = -A_0 \left\{ \ln \frac{\vartheta}{\tau_0} + [ci(\omega_0 \vartheta) - ci(\omega_0 \tau_0)] \cos \omega_0 \vartheta - [si(\omega_0 \vartheta) - si(\omega_0 \tau_0)] \sin \omega_0 \vartheta \right\}, \quad (12)$$

որտեղ $\vartheta = \tau_0 + t$:

Այսպիսով կորուստներից ազատ միլիսանիկական համակարգում դիտվում են ժամանակի մեջ m զանգվածի մոնոտոն հեռացում գրոյական դիրքից (լուգարիթմական օրենքով) և ժամանակակից տեղաշարժեր, որոնք «պարբերված են» լուգարիթմին: Ստիպարիական շարժման լուգարիթմի, երբ $t = 0_+$, այդ երկու տեղաշարժերը հակաձագ են: Ավելի ուշ ժամանակներում, երբ $t \gg 2\pi/\omega_0$, տատանումը միակ արագ շարժումն է, քանի որ հեռացումը հետզհետե դադարում է: Եթե վերջինս մոտարկվի որպես ժամանակի ընթացքում հազնցող, ապա խնդիրների սահմանադրումը կարող է արդյունքների որակական մոտիկություն բացահայտել:

Դրա ընկալման հարմարավետության համար համեմատենք նաև տարբեր խնդիրներից առկա գրաֆիկները, նույնը լեղանելով տատանակի մի հավասարակշռ վիճակից մյուսին «նեղափոխվելու» ժամանակահատվածը, օրինակ, պահելով այն հավասար սեփական տատանման պարբերության քառորդին:

Թող տատանակի պարամետրերն են՝ $b = 0$, $\omega = 600$ ռադ/վ, և նրանում տեղաշարժի ամպլիտուդան լինի $F_0/m\omega^2$: Սկսելով թ.2 խնդրից, վերաբրտադրենք ուժի գծային աճի դեպքում համապատասխանող լուծումը՝

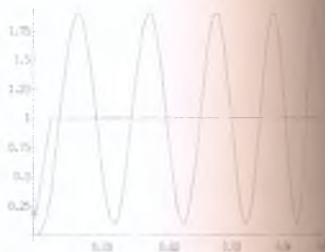
$$x(t) = \frac{F_0}{mT\omega^3} (\omega t - \sin \omega t): \quad (13)$$

Եթե $T \gg \pi/2\omega$, ապա նկատի ունենալով $T = 0.05$ վ և $\omega T = 30$ ռադ պարամետր
կկառուցենք նորմավորված տեղաշարժի գրաֆիկը ըստ նկ.1-ի: Նույն ժամանակ
տեղամասում ($0 < t < 0.05$ վ) պատկերը այլ է, եթե ուժի վերընթացը ավելի կտրուկ է (չեղ
 $\omega T = \pi/2$ պահանջի): Դա պատկերված է նկ.2-ում՝ ներառելով հավասարակշռության
տեղափոխությունը, ինչպես տեղի ունի հիշյալ խնդրում ([1], նկ.24), և լրացնելով
 $t \geq T$ տիրույթին համապատասխանող լուծմամբ, այն է՝

$$x(t \geq T)/(F_0 / m\omega^2) = 1 + 0.9 \sin(\omega t - 3\pi/4) = 1 - 0.9 \cos(\omega t - \pi/4):$$



Նկ.1.



Նկ.2.

Բնական է սպասել, որ ուժի վերընթացի ժամանակամիջոցի հետագա նվազեցումը
հնարավոր դարձնի ձեռնարկի նաև թ.1.ա խնդրի լուծման ստացումը, այն է՝

$$x(t > 0) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t):$$

Իրոք, (14)-ին համապատասխանող $a = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$ լայնույթը, որում $\omega T = \pi/2$
դնպքում ունենք $\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} = 0.9$ գործակից, աճող է ընդհուպ մինչև $\omega T = 0$ սահմանը

արժեքի իրականացումը: Հիշենք, որ $\omega T \rightarrow 0$ սահմանում տեղի ունի $\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} = 1$, և (14)

փոխարեն կունենանք $x(t)/(F_0 / m\omega^2) = 1 - \cos \omega t$: Փուլային $\omega T/2 = \pi/4$ տարբերություն
որ առկա է (14)–ում, նույնպես վերանում է $\omega T \rightarrow 0$ սահմանում:

Լայնույթային փափախությունների տեղ են թողնում նաև լոգարիթմորեն աճող ամպլի
Արձագանքը պայմանավորված է ներգործող ուժի դինամիկայով, իսկ վերջինս է՝
ընտրությամբ: Նկ.3-ի դնպքում $\tau_0 = 1.51 \times 10^{-3}$ վ: Գրգիռը ստացված է նորմավորված
տեղաշարժը գնահատող ինտեգրալի օգնությամբ, այն է՝

$$\frac{x(t)}{-A_0} = \omega \int_0^t \ln(1 + \frac{t-\tau}{\tau_0}) \sin \omega \tau d\tau = 600 \int_0^t \ln[1 + 662.25(t-\tau)] \sin 600\tau d\tau, \quad (15)$$

