1 (21) 2010

УДК 517.9 *Математика*

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Т. Н. Арутюнян, К. Г. Хачатрян

1. Введение.

Обозначим через $L(q,\alpha,\beta)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y = \mu y, \qquad x \in (0,\pi), \mu \in C, \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \qquad \alpha \in (0,\pi], \tag{2}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \qquad \beta \in [0,\pi), \tag{3}$$

где $q \in L_R^1[0,\pi]$, т. е. q-действительнозначная, суммируемая на $[0,\pi]$ функция. Существование, счетность и асимптотические формулы для собственных значений $\mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n = 0,1,2,\ldots$, задачи $L(q,\alpha,\beta)$ в случае гладких q были исследованны еще в XIX и в начале XX веков (см. [1],[2],[3]). Случай $q \in L_R^1[0,\pi]$ изучался в работах В.В. Жикова [4] и В. А. Марченко [5]. Наиболее полная "таблица" асимптотических формул для собственных значений задачи $L(q,\alpha,\beta)$ приведена в [6], стр. 386. Ю. Трубовиц был, по-видимому, первым, кто использовал обозначения $\mu_n(q,\alpha,\beta)$, стараясь подчеркнуть зависимость собственных значений от величин q, α и β (см. [7]).

Рассмотрим в качестве примера принятые на сегодняшний день асимптотические формулы для краевой задачи $L(q,\pi,\beta)$ (см. [6],[8],[9]):

$$\mu_n(q,\pi,\beta) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{\pi}ctg\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt + o(1), \tag{4}$$

при $\beta \neq 0$ $(\sin\beta \neq 0)$, а при $\beta = 0$

$$\mu_n(q,\pi,0) = (n+1)^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt + o(1) \tag{5}$$

(при $n \to \infty$).

Нетрудно доказать, что собственные значения $\mu_n(q,\alpha,\beta)$ гладко (даже аналитически, см. ниже) зависят от (параметров) α и β. Между тем ясно, что непосредственно из формулы (4) предельным переходом при $\beta \to 0$ невозможно получить (5). Причина заключается в неравномерности оценки остаточного члена относительно $\beta \in [0,\pi]$. Мы предлагаем новую асимтотическую формулу, в которой зависимость $\mu_n(q,\pi,\beta)$ от β прослежена более внимательно и оценка остатка равномерна относительно β. Эта формула является обобщением (4) и (5), так как они из нее следуют как частные случаи. Эта формула такова (здесь $n = 1,2,\ldots$, относительно $\mu_0(q,\pi,\beta)$ см. ниже):

$$\mu_n(q,\pi,\beta) = [n + b_n(\beta)]^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\cos[2nt + 2b_n(\beta)t]dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6}$$

где оценка $O\left(\frac{1}{n}\right)$ равномерна по всем $\beta \in [0,\pi]$, а $b_n(\beta)$ $(n \ge 1)$ есть решение трансцендентного уравнения

$$b_n(\beta) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\cos\beta}{\sqrt{[n+b_n(\beta)]^2\sin^2\beta + \cos^2\beta}} \tag{7}$$

Хотя (7) не есть представление для $b_n(\beta)$, а всего лишь уравнение, многие свойства этой функции удается исследовать. В частности, оказывается, что все $b_n(\beta)$ есть ограниченные $0 \le b_n(\beta) \le 1$, строго убывающие функции от $\beta \in [0,\pi]$, со значениями

$$b_n(0) = 1,\ b_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2},\ b_n(\pi) = 0. \tag{8}$$

В этих же точках можно вычислить значения производных:

$$\dot{b}_n(0) = -\frac{n+1}{\pi}, \quad \dot{b}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{2n+1}, \quad \dot{b}_n(\pi) = -\frac{n}{\pi}. \tag{9}$$

Кроме того, при $\beta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, $\quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

$$b_n(\beta) = \frac{1}{2} + \frac{ctg\beta}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{10}$$

Но здесь оценка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ зависит от ε и не равномерна по $\beta \in [0,\pi]$. Легко видеть, что из (10) и $b_n(0)=1$, получаются асимптотики (4) и (5). Заметим, что последовательность $b_n(\beta)$, $n = 1,2,\ldots$, представляет собой пример последовательности функций на $[0,\pi]$, аналитических во всех внутренних точках, т. е. на $(0,\pi)$, и имеющих в качестве предельной функции (при $n \to \infty$) разрывную функцию: $b(0)=1$, $b(\beta)=\frac{1}{2}$ при $\beta \in (0,\pi)$ и $b(\pi)=0$. Относительно третьего члена асимптотики в (6) можно сказать, что уже из леммы Римана-Лебега следует, что этот член есть $o(1)$ при $q \in L^1[0,\pi]$. При $q \in L^2[0,\pi]$ третий член есть r_n такой, что $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty$. Более детальное изучение скорости убывания остаточных членов проведено в [4] и [5].

Коротко скажем о доказательстве формулы (6).

Рассмотрим семейство краевых задач Штурма-Лиувилля $\{L(tq,\alpha,\beta), \alpha \in (0,\pi], \beta \in [0,\pi), t \in R\}$. Через $h_n(x,tq,\alpha,\beta)$ $n = 0,1,2,\ldots$, будем обозначать нормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\mu_n(tq,\alpha,\beta)$ задачи $L(tq,\alpha,\beta)$. Доказывается, что имеет место формула (в случае $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ эта формула доказана в [10]):

$$\mu_n(q,\alpha,\beta) = \mu_n(0,\alpha,\beta) + \int_0^1\left(\int_0^{\pi} q(x)h_n^2(x,tq,\alpha,\beta)dx\right)dt. \tag{11}$$

В случае $\alpha = \pi$ оказывается, что собственные значения задачи с нулевым потенциалом имеют вид $(n = 1,2,3,\ldots)$:

$$\mu_n(0,\pi,\beta) = (n + b_n(\beta))^2, \tag{12}$$

а для $h_n^2(x,tq,\pi,\beta)$ мы получаем выражение

$$h_n^2(x,tq,\pi,\beta)=\frac{1}{\pi}\left[1-\cos\{2nx+2b_n(\beta)x\}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (13)$$

где оценка остатка $O\left(\frac{1}{n}\right)$ равномерна по всем $t\in[0,1]$, $\beta\in[0,\pi]$ и q из ограниченных подмножеств $L_R^1[0,\pi]$. Из (11), (12) и (13) следует (6).

2. **Доказательство формулы (11).**

Из того, что $h_n(x,tq)$ обращают в тождества уравнение $-y''+tq(x)y=\mu_n(tq)\cdot y$, стандартным методом получаем тождества $(n=0,1,2,...)$:

$$\frac{d}{dx}\left[h_n'(x,tq)\cdot h_n(x,t_1q)-h_n'(x,t_1q)\cdot h_n(x,tq)\right]+$$
$$+(t_1-t)q(x)h_n(x,t_1q)\cdot h_n(x,tq)\equiv\left[\mu_n(t_1q)-\mu_n(tq)\right]\cdot h_n(x,t_1q)\cdot h_n(x,tq). \qquad (14)$$

Интегрируя последнее по x от 0 до π и учитывая, что собственные функции удовлетворяют краевым условиям (2) и (3), получаем, что

$$(t_1-t)\int_0^\pi q(x)h_n(x,t_1q)\cdot h_n(x,tq)dx=\left[\mu_n(t_1q)-\mu_n(tq)\right]\int_0^\pi h_n(x,tq)h_n(x,t_1q)dx.$$

Разделив обе части на t_1-t, устремив $t_1\to t$, и, учитывая гладкую зависимость решений уравнения (1) от потенциала q (см. [10] и [12]), получаем формулу

$$\frac{\partial\mu_n(tq,\alpha,\beta)}{\partial t}=\int_0^\pi q(x)\cdot h_n^2(x,tq,\alpha,\beta)dx.$$

Интегрируя последнее равенство по t от 0 до 1, получаем формулу (11).

3. **Функция собственных значений семейства операторов** $\{L(q,\pi,\beta),\beta\in[0,\pi)\}$.

Вначале рассмотрим собственные значения (с. з.) $\mu_n(0)=\mu_n(q,\pi,0)$ задачи $L(q,\pi,0)$, пронумерованные в порядке возрастания индекса

$$\mu_0(0)<\mu_1(0)<...<\mu_n(0)<... \qquad (15)$$

Из теоремы о перемежаемости собственных значений операторов $L(q,\pi,0)$ и $L(q,\pi,\beta)$ при $\beta\in(0,\pi)$ (см. [5], стр. 261), следует, что с. з. $\mu_n(\beta)=\mu_n(q,\pi,\beta)$ задачи $L(q,\pi,\beta)$ можно пронумеровать так, чтобы имели место неравенства

$$\mu_0(\beta)<\mu_0(0)<\mu_1(\beta)<...<\mu_{n-1}(0)<\mu_n(\beta)<\mu_n(0)<..., \qquad (16)$$

которые вместе с (15) дают однозначную (корректную) нумерацию с. з. операторов $L(q,\pi,\beta)$ при каждом $\beta\in[0,\pi)$; Разобъем полуось $(-\infty,\pi)$ на отрезки $...,[-\pi(n+1),-\pi n),...,[-2\pi,-\pi),[-\pi,0),[0,\pi)$, покрывающие эту полуось и заметим, что каждое $\gamma\in(-\infty,\pi)$ можно записать в виде $\gamma=\beta-\pi n$, где $\beta\in[0,\pi]$, $n=0,1,2,...$.

Определение. Функцию $\mu(\gamma)$ определенную на $(-\infty,\pi)$ по формуле

$$\mu(\gamma)=\mu(\beta-\pi n)=\mu_n(\beta),\quad \beta\in[0,\pi],\quad n=0,1,2,...,$$

где $\mu_n(\beta)$ есть собственные значения оператора $L(q,\pi,\beta)$, пронумерованные согласно (15) и (16), назовем функцией собственных значений (ФСЗ) семейства операторов $\{L(q,\pi,\beta),\beta\in[0,\pi)\}$.

Обозначим через $\varphi(x,\mu)$ и $\psi(x,\mu,\beta)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$\varphi(0,\mu)=0, \qquad \varphi'(0,\mu)=1,$$
$$\psi(\pi,\mu,\beta)=\sin\beta, \qquad \psi'(\pi,\mu,\beta)=-\cos\beta.$$

Собственные значения $\mu_n(\beta)=\mu_n(q,\pi,\beta)$, $n=0,1,2,...$ задачи $L(q,\pi,\beta)$ есть нули (по μ) целой функции

$$\chi(\mu)=\chi(\mu,\beta)=\varphi(\pi,\mu)\cos\beta+\varphi'(\pi,\mu)\sin\beta$$

которая является целой функцией и по β. Докажем, что ФСЗ $\mu(\gamma)$ аналитична в каждой точке полуоси $(-\infty,\pi)$. Пусть $\gamma_0=\beta_0-\pi n\in(-\infty,\pi)$ и $\mu_0=\mu(\gamma_0)=\mu(\beta_0-\pi n)=\mu n(\beta_0)$, $(\beta_0\in[0,\pi))$, есть значение ФСЗ в точке γ_0. Тогда $\chi(\mu_0,\gamma_0)=0$. В силу простоты собственных значений задачи $L(q,\pi,\beta)$ (см.[9]) $\dfrac{\partial\chi(\mu_0,\gamma_0)}{\partial\mu}\neq 0$. Отсюда, по теореме о неявной функции (см.[11], стр. 166), следует, что существует некоторая комплексная окрестность V_{γ_0} действительной точки γ_0, на которой определена однозначная аналитическая функция $\tilde{\mu}(\gamma)$ такая, что $\tilde{\mu}(\gamma_0)=\mu_0$, $\chi(\tilde{\mu}(\gamma),\gamma)=\chi(\mu_0,\gamma_0)=0$ для всех $\gamma\in V_{\gamma_0}$. В частности, для действительных . Поскольку γ_0 произвольная точка из $(-\infty,\pi)$, то доказано аналитичность ФСЗ $\mu(\gamma)$ на полуоси $(-\infty,\pi)$.

Докажем также, что область значений ФСЗ $\mu(\gamma)$ есть вся действительная ось. Для этого достаточно доказать, что для любого $\mu_0\in R$ существует $\beta_0\in[0,\pi)$ такое, что $\chi(\mu_0,\beta_0)=\varphi(\pi,\mu_0)\cos\beta_0+\varphi'(\pi,\mu_0)\sin\beta_0=0$. В самом деле, если $\varphi(\pi,\mu_0)=0$, то возьмем $\beta_0=0$, если же $\varphi(\pi,\mu_0)\neq 0$, то возьмем $ctg\beta_0=-\dfrac{\varphi'(\pi,\mu_0)}{\varphi(\pi,\mu_0)}$ (заметим, что при $\mu_0\in R$ решение $\varphi(x,\mu_0)$ можно выбрать действительнозначным).

Докажем также строгую убываемость ФСЗ $\mu(\gamma)$ на $(-\infty,\pi)$. Для этого заметим, во-первых, что если в решении $\psi(x,\mu,\gamma)$ соответствующей задачи Коши взять $\mu=\mu(\gamma)$, то полученная функция $\psi(x,\mu(\gamma),\gamma)$ будет собственной функцией задачи $L(q,\pi,\beta)$ $(\gamma=\beta-\pi n,\mu(\gamma)=\mu_n(\beta))$, соответствующей собственному значению $\mu(\gamma)=\mu_n(\beta)$; и во-вторых, что

$$\frac{\partial\mu(\gamma)}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\int_0^\pi\psi^2(x,\mu(\gamma),\gamma)dx}, \qquad \gamma\in(-\infty,\pi). \tag{17}$$

В самом деле, также как получается тождество (14), для собственных функций $\psi(x,\gamma)=\psi(x,\mu(\gamma),\gamma)$ и $\psi(x,\gamma_1)$ получаем тождество

$$\frac{d}{dx}[\psi'(x,\gamma_1)\psi(x,\gamma)-\psi(x,\gamma_1)\psi'(x,\gamma)]=[\mu(\gamma)-\mu(\gamma_1)]\psi(x,\gamma)\psi(x,\gamma_1),$$

Интегрируя последнее и учитывая краевые условия, которым удовлетворяют собственные функции, получаем равенство

$$\sin(\gamma_1-\gamma)=[\mu(\gamma)-\mu(\gamma_1)]\int_0^\pi\psi(x,\gamma)\psi(x,\gamma_1)dx,$$

Из которого, деля на $\gamma-\gamma_1$ и устремляя $\gamma_1-\gamma$ к нулю, получаем (17).

4. Наименьшее собственное значение $\mu_0(0,\pi,\beta)$.

Собственные значения $\mu_n(0,\pi,\beta)$ суть корни (по μ) уравнения

$$\frac{\sin\sqrt{\mu}\cdot\pi}{\sqrt{\mu}}\cos\beta+\cos\sqrt{\mu}\pi\sin\beta=0 \tag{18}$$

Отсюда получаем, что $\mu_n(0,\pi,0)=(n+1)^2$, а $\mu_n\left(0,\pi,\frac{\pi}{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, $n=0,1,2,\ldots$

Учитывая доказанную выше строгую убываемость и аналитичность (здесь достаточно непрерывности) функции $\mu_0(\beta)=\mu_0(0,\pi,\beta)$, а также то, что ФСЗ должна принимать все действительные значения, получаем, что при изменении β на $[0,\pi)$ собственное значение $\mu_0(0,\pi,\beta)$ принимает все значения от 1 до $-\infty$ ($\lim\limits_{\beta\to\pi}\mu_0(0,\pi,\beta)=-\infty$).

Совершенно аналогично доказывается, что и в общем случае наименьшее собственное значение $\mu_0(q,\alpha,\beta)$ при изменении β на $[0,\pi)$ принимает все значения от $\mu_0(q,\alpha,0)$ до $-\infty$, в частности $\lim\limits_{\beta\to\pi}\mu_0(q,\alpha,\beta)=-\infty$.

5. Собственные значения $\mu_n(0,\pi,\beta), n\geq 1$ (доказательство формулы (12)).

Обозначим $\mu=\lambda^2$ и запишем характеристическое уравнение (18) в виде

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\cos\beta+\cos\lambda\pi\sin\beta=0\,. \tag{18'}$$

Поскольку левая часть этого уравнения четная функция от λ и при $n\geq 1$ с.з $\mu_n(\beta)=\mu_n(0,\pi,\beta)=\mu(\beta-\pi n)\geq 1$, то будем рассматривать только положительные корни уравнения (18'). Учитывая перемежаемость с.з. (см.[5], стр. 261) задач $L(q,\pi,0)$ и $L(q,\pi,\beta)$ при $\beta\in(0,\pi)$, получим, что строго убывающая функция,

$$\lambda(\gamma)=\sqrt{\mu(\gamma)}=\sqrt{\mu(\beta-\pi n)}=\sqrt{\mu_n(\beta)}=\lambda_n(\beta)$$

при $\beta\in(0,\pi)$ и $n=1,2,\ldots$ удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_n(\pi)\stackrel{def}{=}\lambda_{n-1}(0)=\sqrt{\mu_{n-1}(0)}=n<\lambda_n(\beta)<n+1=\sqrt{\mu_n(0)}=\lambda_n(0).$$

Поэтому естественно искать $\lambda_n(\beta)$ в виде $\lambda_n(\beta)=n+b_n(\beta)$, где $b_n(\beta)$ должна быть строго убывающей функцией, принимающей значения

$$b_n(0)=1,\ b_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2},\ b_n(\pi)=0, \tag{19}$$

и удовлетворять уравнению

$$\sin\pi b_n(\beta)\cdot\cos\beta+[n+b_n(\beta)]\cdot\cos\pi b_n(\beta)\cdot\sin\beta=0\,,\quad n=1,2,\ldots\,. \tag{20}$$

После некоторых элементарных преобразований находим, что трансцендентное уравнение (20) можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{\cos^2\beta+[n+b_n(\beta)]^2\cdot\sin^2\beta}}{n+b_n(\beta)}\cdot\sin(\pi b_n(\beta)+\theta_n(\beta))=0\,, \tag{21}$$

где $\theta_n(\beta)=\arccos\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+[n+b_n(\beta)]^2\sin^2\beta}}$. Из (21), учитывая условия (19), находим, что $b_n(\beta)$ должна удовлетворять уравнению (7).

Продифференцировав (20) по β, для производной $\dfrac{\partial b_n(\beta)}{\partial\beta}=\dot{b}_n(\beta)$ получим выражение

$$\dot b_n(\beta)=\frac{\sin\pi b_n(\beta)\cdot\sin\beta-[n+b_n(\beta)]\cos\pi b_n(\beta)\cdot\cos\beta}{[\pi\cos\beta+\sin\beta]\cdot\cos\pi b_n(\beta)-[n+b_n(\beta)]\sin\pi b_n(\beta)\cdot\sin\beta}.$$

В частности, используя (19), получаем значения

$$\dot b_n(0)=-\frac{n+1}{\pi}=\dot b_{n+1}(\pi),\quad \dot b_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{2n+1},\quad \dot b_n(\pi)=-\frac{n}{\pi}=\dot b_{n-1}(0).$$

Заметим также, что при $\beta\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, т. е. когда $\sin\beta\neq 0$, из (20) получается (см., например, [9], стр. 19), что

$$\lambda_n(\beta)=n+b_n(\beta)=n+\frac{1}{2}+\frac{ctg\beta}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

но здесь $ctg\pi b_n(\beta)=-\frac{ctg\beta}{n}+\frac{b_n(\beta)ctg\beta}{n(n+b_n(\beta))}=-\frac{ctg\beta}{n}+r_n(\beta)$ и $r_n(\beta)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ только для ограниченных $ctg\beta$, т.е. оценка неравномерна по $\beta\in[0,\pi]$.

Таким образом, доказано (12), т.е. $\mu_n(\beta)=\lambda_n^2(\beta)=(n+b_n(\beta))^2$.

6. **Асимптотика** $h_n(x,tq,\pi,\beta)$. Доказательство формулы (13).

Очевидно, что в качестве $h_n(x,tq,\pi,\beta)$ можно взять

$$h_n(x)=\frac{\varphi(x,\mu_n(tq,\pi,\beta))}{\|\varphi(\cdot,\mu_n)\|}.$$

Для решения $\varphi(x,\mu)$ в [12] при $q\in L_C^1[0,\pi]$ получена оценка (при $|\mu|\geq 1$)

$$\left|\varphi(x,\mu)-\frac{\sin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}}\right|\leq\frac{\sigma_0(x)}{|\mu|}e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\mu}|x+\frac{\sigma_0(x)}{|\mu|}},$$

где $\sigma_0(x)=\int_0^x|q(t)|dt$. Эта оценка несколько уточняет и обобщает оценки, полученные ранее (см., например, [5], [9], [10], [13]). Поскольку $\operatorname{Im}\mu_n=0$, то

$$\varphi^2(x,\mu_n(tq,\beta))=\frac{\sin^2\sqrt{\mu_n(tq,\beta)}x}{\mu_n(tq,\beta)}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

причем оценка остатка равномерна по всем $t\in[0,1]$, $\beta\in[0,\pi]$ и всем q из ограниченных подмножеств $L_R^1[0,\pi]$. Отсюда для $\|\varphi(\cdot,\mu_n)\|$ получаем

$$\|\varphi(\cdot,\mu_n)\|^2=\int_0^\pi\varphi^2(x,\mu_n(tq,\beta))dx=\frac{\pi}{2\mu_n}\left(1-O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Наконец, из этих оценок, учитывая равномерную ограниченность $h_n^2(x,tq)$ и следующую из (11) и (12) оценку $\sin\sqrt{\mu_n(tq)}x=\sin(n+\beta_n(\beta))x+O\left(\frac{1}{n}\right)$ для h_n^2 получаем оценку

$$h_n^2(x,tq,\pi,\beta)=\frac{2}{\pi}\sin^2(n+b_n(\beta))x+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

которая равномерна по всем q из ограниченных подмножеств $L_R^1[0,\pi]$, по всем $t\in[0,1]$ и всем $\beta\in[0,\pi]$ и которая эквивалентна формуле (13).

7. Обобщения.

Изложенными выше методами получаются асимптотики собственных значений и других задач Штурма-Лиувилля, например

$$\mu_n\left(q,\alpha,\frac{\pi}{2}\right)=\left(n+b_n\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)\right)^2+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)\cos\left(2n(\pi-x)+2b_n\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)(\pi-x)\right)dx+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где

$$b_n\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\left(n+b_n\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}-\frac{1}{2}.$$

Литература

1. Liouville J. Sur le development des fonctions on parties de fonctions en se'ries don't les divers termes sont assuje'tis 'a satistaire 'a une même e'quation diffe'rentielle du second ordre, contenant un parame'tre variable // Journal de math. Put et appl. I (1836). P. 253-265; II (1837). P. 16-35, 418-436.
2. Hobson E. W. On a general convergence theorem and theory of the representation of function by series of normal functions // Proc. Of the London Mth. Soc. (2), 1908. V. 6. P. 349-395.
3. Kneser A. Untersurchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik // Math. Ann. 1904. V. 38.P. 81-147.
4. Жиков В. В. Об обратных задачах Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. //Изв. АН СССР, сер. матем. 1967. Т. 31. с. 965-976.
5. Марченко В. А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев. Наукова думка. 1977.
6. Марченко В. А. Некотoрые вопросы линйеных дифференцилаьных операторов второго порядка. // Труды ММО. 1952. Т. 1. с. 326-407.
7. Isaacson E., Troubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem I// Comm. Pure Appl. Math. 1983. Vol. 36. P. 767-783.
8. Dahlberg B. E. J., Troubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem III// Comm. Pure Appl. Math. 1984. Vol. 37. P. 255-267.
9. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука. 1988.
10. Pöschel J., Troubowitz E. Inverse Spectral Theory. Academic Press. 1987.
11. Бибиков Ю. Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. ЛГУ. 1981.
12. Арутюнян Т. Н., Овсепян М. О. О решениях уравнения Штурма-Лиувилля// Математика в Высшей школе. (Ереван). 2005. Т. 1. N 3. с. 59-74.
13. Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным фукциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Изд-во Иностр. Лит. 1960.

Ամփոփում

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական արժեքների դասական ասիմպտոտիկաները «համարենցված» են ֆիքսված եզրային պայմանների համար և չեն դիտարկում սեփական արժեքների ամբողջ կախվածության դեպքերը եզրային պայմանները որոշող պարամետրերից: Աշխատանքում արտածվում է ասիմպտոտիկան նկարագրող նոր բանաձև, որը մի քիչ ավելի է ընդհանրացնում ու ճշգրտում դասական բանաձևը և ընդգրկում է նաև սեփական արժեքների եզրային պայմաններից անալիտիկ կախվածության դեպքը: