1-2 (23-24) 2011

ՀՏԴ 513 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ԱՆԱԼՈԳԻԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅՈՒՄ

Ռ.Առաքելյան, Լ.Առաքելյան

Անալոգիայի լայն կիրառությունը ուսումնական գործընթացում հնարավորություն է ստեղծում ուսումնական նյութի ավելի մատչելի և կայուն յուրացմանը, քանի որ անալոգիան հաճախ է ապահովում գիտելիքների և հմտությունների համակարգի մտավոր տեղափոխում հայտնի օբյեկտից փնտրվող օբյեկտին:

Անալոգիայի դերի մասին՝ որպես գիտական ճանաչողության մեթոդի, խոսել են շատ հայտնի գիտնականներ: Այսպես, Կեպլերը արտահայտել է հետևյալ դատողությունը. «Ես ավելի շատ վստահում եմ անալոգիաներին, իմ ամենահավատարիմ ուսուցիչներին: Նրանք գիտեն բնության բոլոր գաղտնիքները և նրանց չպետք է արհամարել»:

Հետաքրքիր է դիտել, թե ինչպես մարդիկ, երբեմն չնկատելով դա, կիրառում են անալոգիան գիտության տարբեր բնագավառներում, ընդ որում հաճախ երկու բնագավառներն էլ, որոնց միջև տարվում է անալոգիան, շահում են էականորեն:

Նշենք, որ ինդուկցիան, դեդուկցիան և անալոգիան ոչ միայն գիտական ուսումնասիրության մտահանգման հիմնական ձևեր են, այլ նաև մաթեմատիկայի ուսուցման արդյունավետ մեթոդներ: Մտածողության (ուսուցման) ընթացքում ինդուկցիան, դեդուկցիան և անալոգիան համագործակցում են այնքան սերտ, որ նրանց մասին խոսել առանձին-առանձին իմաստ ունի միայն այդ հասկացությունների մանրակրկիտ ուսումնասիրության ժամանակ:

Դատողությունների դասակարգմանն է ուղղված Ա.Ի.Ուեմովի աշխատությունը, որտեղ նա նշում է, որ նախադրյալներից մտահանգման անցման բոլոր արտածումները կարելի է բաժանել երկու խմբի: Նրանցից առաջինում առարկաների դասերը, որոնց վերաբերվում են նախադրյալները և մտահանգումը, համատեղելի են: Առավել ևս, դրանցից մեկը հանդիսանում է մյուսի ենթադաս: Այդ խմբին են վերաբերվում ինդուկցիան և դեդուկցիան, որոնք կարելի է սահմանել հետևյալ բառերով.

ա) *Դեդուկցիան* մտահանգում է, որը վերաբերում է այն առարկաներին, որոնք դուրս չեն գալիս այն առարկաների շրջանակներից, որոնց մասին խոսվում է նախադրյալների մեջ:

բ) *Ինդուկցիան* մտահանգում է, որը վերաբերում է ավելի լայն շրջանակով առարկաների, քան թե խոսվում է նախադրյալների մեջ:

Մյուս խմբի առարկաները, որոնք վերաբերում են նախադրյալներին և մտահանգմանը, տարբեր են:

գ) *Անալոգիան* մտահանգում է, որը վերաբերում է ոչ այն առարկաներին, որոնց մասին խոսվում է նախադրյալներում:

Անալոգիայի էությունը և նրա տեսակները

Մտահանգման կարևոր տեսակներից մեկն այսպես կոչված տրադուկտիվ մտահանգումն է (լատ. traductio-տեղափոխում), որի դեպքում ընդհանրության աստիճան ունեցող երկու և ավելի դատողություններից անցնում են նոր դատողության՝ ընդհանրության նույն աստիճանով:

Օրինակ, դիցուք a-ն, b-ն և c-ն որոշ իրական թվեր են, $a>b$ (առաջին դատողություն), $b>c$ (երկրորդ դատողություն), $a>c$ (նոր դատողությունն է):

<table>
<tr><th>Օբյեկտներ</th><th>Օբյեկտների հատկությունները</th><th>Մտահանգում</th></tr>
<tr><td>A</td><td>$a \quad b \quad c \quad d$ ...</td><td rowspan="2">$x = d$:</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$a \quad b \quad c \quad x$ ...</td></tr>
</table>

Տրադուկցիայի էությունը՝ որպես հետազոտման մեթոդ, կայանում է նրանում, որ, բացահայտելով երկու օբյեկտների նմանությունը որոշակի առնչությամբ, կատարում ենք մտահանգում այդ նույն օբյեկտների նմանության մասին այլ առնչությամբ ևս:

Տրադուկտիվ մտահանգման կարևոր տեսակներից է անալոգիան (հունարեն analogia- համապատասխանություն, նմանություն): Անալոգիան ճանաչողության լիարժեք արդյունավետ էվրիստիկ գործիք է:

Ըստ անալոգիայի՝ մտահանգումները կարելի է արտահայտել սխեմայով.

Ըստ անալոգիայի՝ մտահանգման գիտելիքները, որոնք ստացվում են որոշակի օբյեկտի (մոդելի) դիտարկումից, տեղափոխվում են ուրիշ, քիչ ուսումնասիրված (քիչ մատչելի ուսումնասիրության համար, քիչ տեսանելի և այլն) օբյեկտ՝ ըստ որոշակի իմաստի: Ըստ անալոգիայի՝ տվյալ կոնկրետ օբյեկտի մասին մտահանգումը կրում է ընդհանրապես միայն հավանական բնութագիր, այն հանդիսանում է գիտական հիպոթեզի աղբյուրներից մեկը և խաղում է կարևոր դեր գիտական հայտնագործությունների համար: Հասկանալի է, որ ոչ բոլոր նմանություններն են անալոգիա: Բանաստեղծը, համեմատելով աղջկան ծաղիկի հետ, նկատի ունի որոշակի նմանություն աղջկա և ծաղիկի գեղեցկության միջև, բանաստեղծը հեռու է նրանց միջև անալոգիա անցկացնելուց: Անալոգիան գիտական ուսումնասիրության ամենատարածված ձևերից մեկն է: Անալոգիայի լայն կիրառությունը հաճախ հետազոտողին բերում է շատ կամ քիչ ճշմարտանման ենթադրության ուսումնասիրվող օբյեկտի հատկությունների մասին, որոնք հետագայում կարող են հաստատվել կան ժխտվել փորձի կամ ավելի խիստ դատողությունների օգնությամբ: Այսպիսով, իմաստ ունի խոսել «օգտակար» և «վնասակար» անալոգիաների մասին:

Որպես «վնասակար անալոգիայի» օրինակ՝ քննարկենք վերջավոր գումարի հատկութ-յունների տեղափոխումը անվերջ գումարելիներին: Ահա թե ինչպիսի «արդյունքների» կարելի է հանգել, մասնավորապես, եթե կիրառենք նշված անալոգիան շարքի գումարը գտնելու համար:

$S=1-1+1-1+1-1+\dots$:

ա) օգտվելով տարբերության գումարման հատկությունից՝ կստանանք.

$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots=0+0+0+\dots=0$:

բ) օգտվելով տարբերության հանման հատկությունից՝ կստանանք.

$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)=1-0-0-0\dots=1$:

գ) օգտվելով գումարի զուգորդական հատկությունից՝ կստանանք.

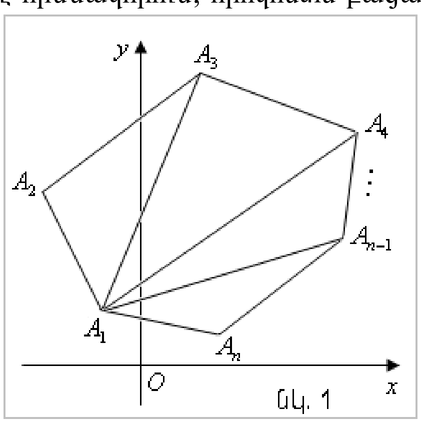
$S=1-(1-1+1-\dots)$, կամ $S=1-S$, որտեղից $2S=1$ և $S=1/2$:

Հասկանալի է, որ այստեղ օգտագործված անալոգիան արդարացված չէ, չափազանց խոր որակական տարբերության առկայությունը վերջավոր և անվերջ գումարների միջև մաթեմատիկայում սահմանափակում է նրանց անալոգ հատկությունների թիվը:

Անալոգիան մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում

Մաթեմատիկայում ուսուցման գործընթացում ուսուցիչը պետք է սովորողներին ուսուցանի ինքնուրույն կատարելու մտահանգում ըստ անալոգիայի:

Սովորողները պետք է հասկանան, որ անալոգիայով ստացված մտահանգումը պահանջում է հիմնավորում, որովհետև բացառված չէ, որ այն լինի կեղծ: Օրինակ, հայտնի է հայտանիշ, ըստ որի, եթե թիվը բաժանվում է 2-ի և 3-ի, ապա այն բաժանվում է նաև 6-ի: Նույն անալոգիայով սովորողը ձևավորում է 27-ի բաժանման հայտանիշը, այսինքն, եթե թիվը բաժանվում է 3-ի և 9-ի, ապա այն բաժանվում է նաև 27-ի, ստացվեց կեղծ առաջադրություն: Իրոք, 63-ը բաժանվում է և 3-ի և 9-ի, բայց չի բաժանվում 27-ի:



Նկ. 1

Ճիշտ և լայն անալոգիայի կիրառությունը մաթեմատիկայում հնարավորություն է ստեղծում աշակերտների կողմից ուսումնական նյութի դյուրին և կայուն յուրացմանը, որովհետև անալոգիան ապահովում է գիտելիքների և հմտությունների որոշակի համակարգում, օբյեկտների հատկությունների մտավոր տեղափոխում հայտնի օբյեկտից անհայտ օբյեկտին: Այդ պատճառով օգտակար է հատուկ ընտրված վարժությունների կատարում անալոգիայի մեթոդի կիրառությամբ:

1. ***Անալոգիայի կիրառության օրինակ վերլուծական երկրաչափությունից:***

Եթե ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրված է $A_1(x_1y_1)$, $A_2(x_2y_2)$ և $A_3(x_3y_3)$ գագաթներով եռանկյուն, ապա

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ կամ } 2S_{A_1A_2A_3}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1\right): \quad (1)$$

Հարց է ծագում, նույն անալոգիայով կարո՞ղ ենք հաշվել ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը, եթե տրված են A_1, A_2, A_3, A_4 գագաթները $A_i\left(x_i, y_i\right)$ $i=1,2,3,4$ կոորդինատներով (նկ.1): Նկարից երևում է, որ ստացված քառանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել որպես երկու եռանկյուն-ների մակերեսների գումար, այսինքն $S_{A_1A_2A_3A_4}=S_{A_1A_2A_3}+S_{A_1A_3A_4}$:

$$2S_{A_1A_2A_3A_4}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1\right):$$

Հարթության վրա կառուցելով ուռուցիկ բազմանկյուն $A_i\left(x_i, y_i\right)$ $i=1,2,3,...,n$ կոորդի-նատներին ունեցող գագաթներով և իրականացնելով մաթեմատիկական ինդուկցիա՝ դժվար չէ ապացուցել, որ

$$2S_{A_1A_2...A_n}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}+...+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=x_1y_2+x_2y_3+...+x_{n-1}y_n+x_ny_1-\left(y_1x_2+y_2x_3+...+y_{n-1}x_n+y_nx_1\right): \quad (2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, (2) բանաձևը (1) բանաձևի անալոգն է:

Գործնական հաշվումների ժամանակ որոշիչների արժեքները պետք վերցնել դրական նշանով, որևհետև նրանք ցույց են տալիս եռանկյունների մակերեսների մեծությունները:

Ուրեմն ուռուցիկ բազմանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

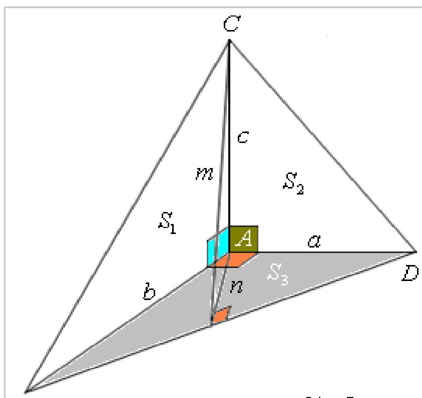
$$S=0,5\left[x_1y_2+x_2y_3+...+x_{n-1}y_n+x_ny_1-\left(y_1x_2+y_2x_3+...+y_{n-1}x_n+y_nx_1\right)\right];$$

որտեղ $A_i\left(x_i, y_i\right)$ $i=1,2,3,...,n;$ բազմանկյան գագաթի կոորդինատներն են: Այսպիսով բանաձևի արտածումը կատարվեց անալոգիայի կիրառությամբ:

2. ***Պյութագորասի թեորեմի անալոգը եռաչափ տարածությունում:***

Պյութագորասի թեորեմը չափական առնչություն է, ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի միջև, որի համաձայն $c^2=a^2+b^2$:

Ուղղանկյուն եռանկյան անալոգը եռաչափ տարածությունում ուղղանկյուն քառանիստն է՝ A գագաթում 3 ուղղանկյուն եռանկյուն նիստերով: Կատարենք նշանակումներ:



նկ. 2

$S_{BAC}=S_1; \quad S_{DAC}=S_2; \quad S_{ABD}=S_3; \quad S_{BCD}=S:$

Թեորեմ: $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$:

Ապացուցում: Գրենք A գագաթի նիստերի մակերեսների կրկնապատիկների քառակուսին՝

$4S_1^2=b^2c^2; \; 4S_2^2=a^2c^2; \; 4S_3^2=a^2b^2; \; 2S=BD\cdot m:$

Կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները.

$$4S^2 = BD^2 \cdot m^2 = BD^2\left(c^2+n^2\right) = BD^2c^2 + BD^2n^2 =$$
$$=\left(a^2+b^2\right)c^2 + 4S_3^2 = a^2c^2+b^2c^2+4S_3^2 = = 4S_1^2+4S_2^2+4S_3^2: \qquad S^2 = S_1^2+S_2^2+S_3^2:$$

Ստացված բանաձևը $c^2 = a^2 + b^2$ բանաձևի անալոգն է քառանիստի համար:

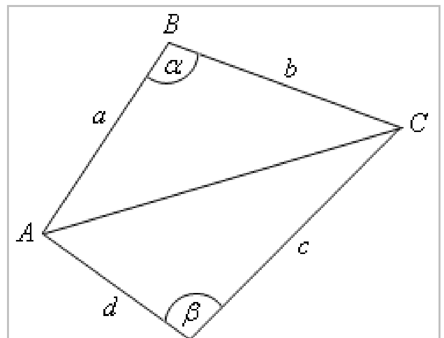
4.***Քառանկյան մակերեսի բանաձևը որպես եռանկյան Հերոնի բանաձևի անալոգ:***

Դպրոցական ծրագիրը նախատեսում է եռանկյան, զուգահեռագծի, սեղանի և որոշ ուռուցիկ քառանկյունների մակերեսների բանաձևերի արտածում: Մենք կցուցադրենք կամայական քառանկյան մակերեսի բանաձևի արտածումը և նրա տեսքի նմանությունը Հերոնի բանաձևին:

Թեորեմ: Ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով:

$S=\sqrt{A-abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta)}$, որտեղ $A=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$; a,b,c,d -ն քառանկյան կողմերն են, իսկ α և β քառանկյան հակադիր անկյունները:

Ապացուցում: Թող $ABCD$ քառանկյան մեջ $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d;\ \angle ABC=\alpha,$ $\angle ADC=\beta$: ΔABC -ից (նկ. 3), կոսինուսների թեորեմի համաձայն կգրենք.



նկ. 3

$AC^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha \quad (1)$

ΔADC -ից՝ $AC^2 = c^2+d^2-2cd\cos\beta \quad (2)$

(1) -ից և (2)-ից կստանանք.

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta,$

$a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha-2cd\cos\beta. \quad (3)$

Հաշվենք $ABCD$ քառանկյան մակերեսը, որպես ABC և ADC եռանկյունների մակերեսների գումար, կստանանք.

$S=1/2\cdot ab\sin\alpha+1/2\cdot cd\sin\beta; \qquad 4S=2ab\sin\alpha+2cd\sin\beta \quad (4):$

(3)-ի և (4)-ի երկու մասերը քառակուսի բարձրացնենք և գումարենք անդամ առ անդամ, կստանանք.

$$\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2+16S^2=\left(2ab\cos\alpha-2cd\cos\beta\right)^2+\left(2ab\sin\alpha+2cd\sin\beta\right)^2=$$
$$=4a^2b^2\cos^2\alpha+4c^2d^2\cos^2\beta-8abcd\cos\alpha\cos\beta+$$
$$+4a^2b^2\sin^2\alpha+4c^2d^2\sin^2\beta+8abcd\sin\alpha\sin\beta=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=4a^2b^2+4c^2d^2+8abcd-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta)=\left(2ab+2cd\right)^2-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta);$$

$$16S^2=\left(2ab+2cd\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta);$$
$$16S^2=\left(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right)\left(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right)-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta);$$

$$16S^2=\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta);$$
$$16S^2=(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta)=$$

$$=2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-d)-16abcd\cos^2 0,5(\alpha+\beta);$$

$$16S^2 = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd\cos^2 0{,}5(\alpha+\beta);$$

$$S^2 = A - abcd\cos^2 0{,}5(\alpha+\beta);$$

$S = \sqrt{A - abcd\cos^2 0{,}5(\alpha+\beta)} \quad (5),$ այն ինչ պետք էր ստանալ:

Հետևանք 1. Թող քառանկյունը ներգծված է շրջանագծին, այդ դեպքում

$\alpha+\beta = 180^\circ \Rightarrow \cos 0{,}5(\alpha+\beta) = \cos 90^\circ = 0$:

Այս դեպքում ստացած բանաձևը ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (6)$:

Այսպիսով՝

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$: $\quad S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$:

Եռանկյան մակերեսի Հերոնի բանաձևի և շրջանին ներգծած քառանկյան մակերեսի բանաձևի միջև անալոգիայի առկայությունը բացատրվում է նրանով, որ կամայական եռանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

Ստանանք Բրահմագուպտայի բանաձևի մի մասնավոր դեպք ևս:

Հետևանք 2. Շրջանագծին արտագծյալ քառանկյան մակերեսը հաշվում են հետևյալ բանաձևով.

$S = \sqrt{abcd \cdot \sin^2 0{,}5(\alpha+\beta)}$:

Ապացույց: Քանի որ շրջանագծին արտագծյալ քառանկյան հակադիր կողմերի գումարը իրար հավասար են, ապա

$a+c=b+d;\quad a+c=b+d \Rightarrow p-a=c;\quad p-b=d;\quad p-c=a;\quad p-d=b$:

Ստացված արժեքները տեղադրենք (5) բանաձևի մեջ. կստանանք

$S = \sqrt{abcd - abcd\cos^2 0{,}5(\alpha+\beta)} = \sqrt{abcd\sin^2 0{,}5(\alpha+\beta)} \quad (7)$:

Հետևանք 3. Եթե շրջանագծին արտագծված քառանկյանը արտագծված է շրջանագիծ, ապա նրա մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$S = \sqrt{abcd} \quad (8)$:

Ապացույց: Քանի որ $a+c=b+d$ ապա,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} =$$

$$= \sqrt{\frac{b+d+c-a}{2}\cdot\frac{a+c+d-b}{2}\cdot\frac{a+b+d-c}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2}} = \sqrt{\frac{2c}{2}\cdot\frac{2d}{2}\cdot\frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2}} = \sqrt{abcd}:$$

Անալոգիայի կիրառությունը կառուցման խնդիրների լուծման ժամանակ:

Խնդիր 7: Կառուցել կանոնավոր 8-անկյուն տրված հատվածին հավասար կողմերով:

Լուծում: Տրված AB հատվածի C միջնակետում կանգնեցնենք ուղղահայաց և անջատենք $CD = AB/2$, (նկ. 4), այնուհետև $DO = AD$: Այդ դեպքում AO հատվածը կծառայի որպես AB կողմով կանոնավոր 8-անկյանն արտագծված շրջանագծի շառավիղ:

Եվ իրոք, գտնենք AOC անկյան մեծությունը: Քանի որ $AC = CB$, ապա ACD եռանկյունը հավասարասրուն է, ուստի ADO եռանկյունը հավասարասրուն է և AOD անկյունը հավասար է $45^\circ/2$, որից հետևում է, որ AB աղեղը շրջանագծի աղեղի $1/8$ մասն է: Այժմ կարող ենք OA շառավղով շրջանագծի վրա A կետից տեղադրել հաջորդ- դաբար AB-ին հավասար 7 լար: Կստանանք կանոնոնավոր 8-անկյան գագաթները: Նույն անալոգիայով լուծենք հաջորդ խնդիրները :

Խնդիր 8: Կառուցել տրված հատվածին հավասար 12 կողմերով կանոնավոր բազմանկյուն:

Լուծում: Կառուցենք ACB հավասարակողմ եռանկյունը (նկ. 5): Կառուցենք C կետով անցնող AB-ին ուղղահայացը և նրա վրա անջատենք $CO = AB$: Այդ դեպքում AO-ն հանդիսանում է AB կողմով կանոնավոր 12-անկյան արտագծված շրջանագծի շառավիղը: Այդ փաստը ապացուցելու համար բավական է ապացուցել, որ $\angle AOB = 30^\circ$: Եվ իրոք, C կետը հավասարահեռ է A, B և O կետերից, այսինքն C կետը AOB եռանկյանն արտագծված շրջանագծի կենտրոնն է, հետևաբար $\angle AOB = 0,5 \cdot \angle ACB = 30^\circ$:

Խնդիր 9: Կառուցել տրված հատվածին հավասար 16 կողմերով կանոնավոր բազմանկյուն:

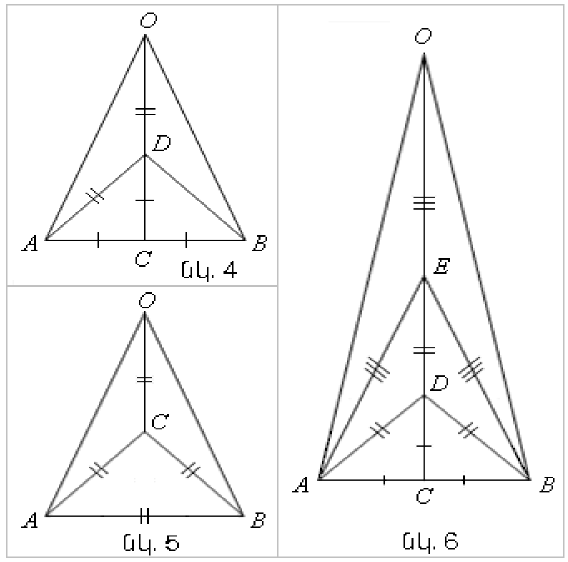
Լուծում: Ինչպես նախորդ խնդիրներում, կառուցում ենք (նկ. 6),

$\angle AEB = 1/2 \cdot \angle ADB = 45^\circ$

$\angle AOB = 1/2 \cdot \angle AEB = 45^\circ/2;$

$\angle AOB = 360^\circ/16;$

Այժմ AO շառավղով շրջանագծի վրա հաջորդաբար տեղադրում ենք AB աղեղին հավասար աղեղներ և ստանում կանոնավոր 16-անկյան գագաթները :



նկ. 4 նկ. 5 նկ. 6

Բաժանելիության հայտանիշների անալոգներ:

Թեորեմ 1: Որպեսզի թվարկության տասնորդական համակարգում գրառված թիվը բաժանվի 9-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ թվի թվանշանների գումարը բաժանվի 9-ի:

Այս թեորեմի անալոգը ստանալու համար նախ վերհիշենք ապացուցման քայլերը:

$$a_n 10^{n-1} + a_{n-1}10^{n-2} + \ldots + a_3 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1 = a_n\left(\underbrace{99\ldots9}_{n-1}+1\right) + a_{n-1}\left(\underbrace{99\ldots9}_{n-2}+1\right) +$$

$$+\ldots + a_3(99+1) + a_2(9+1) + a_1 = 9\cdot A + (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = 9A + B:$$

Եթե B-ն՝ $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1}$ թվի թվանշանների գումարը, բաժանվում է 9-ի, ապա $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1}$ թիվը ևս բաժանվում է 9-ի:

Այս թեորեմի ապացուցման ժամանակ օգտվեցինք թիվը $10^n = \underbrace{99\ldots9}_{n}+1$ տեսքով ներկայացման տեսքից: Ցույց տանք, որ թվի ներկայացման այդ տեսքը ճշմարիտ է թվարկության այլ համակարգերում ևս: Ընտրենք 8-ական համակարգ և ապացուցենք, որ $8^3 = 777 + 1$: Եվ իրոք՝

$$777 + 1 = 7\cdot 8^2 + 7\cdot 8 + 7 + 1 = (8-1)8^2 + (8-1)8 + 8 = 8^3 :$$

Կիրառելով անալոգիան կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Թվարկության p-ական համակարգում գրառված թիվը որպեսզի բաժանվի $(p-1)$-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա թվանշանների գումարը բաժանվի $(p-1)$-ի:

Ապացուցում:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1} = a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \ldots + a_2 p + a_1 =$$

$$= a_n\left[\underbrace{(p-1)(p-1)\ldots(p-1)}_{n-1}+1\right] + a_{n-1}\left[\underbrace{(p-1)(p-1)\ldots(p-1)}_{n-2}+1\right] + \ldots + a_2\left[(p-1)+1\right] + a_1 =$$

$$= A\cdot(p-1) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1) = A\cdot(p-1) + B:$$

Տրված թվի թվանշանների գումարը նշանակել ենք B -ով:

Այսպիսով՝ $\left[A\cdot(p-1)+B\right]$-ն $(p-1)$-ի բաժանվելու հարցը կախված է թվի թվանշանների գումարից, ինչն էլ ապացուցում է թեորեմը:

Օրինակ, 8-ական համակարգում գրառված թիվը կբաժանվի 7-ի, եթե նրա թվանշանների գումարը բաժանվի 7-ի: Ասվածը ցուցադրենք օրինակի վրա:

$$534376_8 = 5\cdot 8^5+3\cdot 8^4+4\cdot 8^3+3\cdot 8^2+7\cdot 8+6 = 5(77777+1)+3(7777+1)+4(777+1)+$$

$$+3(77+1)+7(7+1)+6 = 7\cdot A+(5+3+4+3+7+6) = 7\cdot A+28_{10}:$$

Առաջին գումարելին բաժանվում է 7-ի, մնում է պարզել երկրորդ գումարելիի՝ այսինքն տրված թվի թվանշանների գումարը 7-ի բաժանվելը: Դիտարկվող օրինակում դա 28-ն է, որը բազմապատիկ է 7-ին: Հետևաբար 734356_8 թիվը բաժամվում է 7-ի:

Դիտողություն: Եթե թիվը բազմապատիկ է 7-ին 8-ական համակարգում, ապա այն բազմապատիկ է 7-ին թվարկության ցանկացած համակարգում: Օրինակ 34_8-ը բազմապատիկ է 7-ն, $34_8 = 28_{10}$, որը ևս բազմապատիկ է 7-ին: Ահա թե ինչու թեորեմի կիրառության ժամանակ թվանշանների գումարը դիտարկում ենք տասնորդական համակարգում:

Օգտագործելով անալոգիան 3-ական համակարգի նկատմամբ՝ կստանանք, որ թիվը բաժանվում է երկուսի, (կամ թիվը 3-ական համակարգում զույգ է), եթե գրառման թվանշանների գումարը զույգ է: Օրինակ 1111_3, 20101_3 թվերը զույգ են, իսկ 102_3, 1110_3 թվերը՝ կենտ:

Հետևանք 1: Թիվը 3-ական համակարգում զույգ (կենտ) է, եթե նրա գրառումը պարունակում է զույգ (կենտ) թվով 1 թվանշանը:

Հետևանք 2: Տասնորդական և 4-ական համակարգում թիվը բաժանվում է 3-ի, եթե նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի:

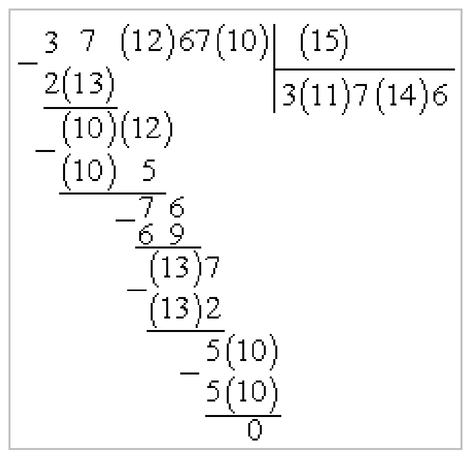
Հետևանք 3: Տասնմեկերորդական համակարգում թիվը բաժանվում է 10-ի, եթե նրա թվանշանների գումարը վերջանում է զրոյով:

Օրինակ: 8912_{11} թիվը բաժանվում է 10-ի, որովհետև թվանշանների գումարը՝ $8+9+1+2=20$ վերջանում է 0-ով:

Դիտարկենք 16-ական համակարգը, որտեղ թվանշաններն են $0,1,2,\ldots,9,(10),(12),(13),(14),(15)$:

Օրինակ: $37(12)67(10)_{16}$ թիվը բաժանվում է 15-ի, որովհետև թվանշանների գումարը՝ $3+7+12+6+7+10=45$ բաժանվում է 15-ի, և իրոք՝

$$37(12)67(10)_{16} : (15)_{16} = 3(11)7(14)6_{16}:$$



Այս համակարգում բաժանման գործողությունն ունի իր յուրահատկությունն, այն ցուցադրենք օրինակի վրա:

Զույգության վերաբերյալ հարցը դիտարկենք ավելի ընդհանուր դեպքերի համար: Թող գրված է $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}_{(p)}$ թիվը, որտեղ p -ն կենտ բնական թիվ է:

$$a = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}_{(p)} = a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}+\ldots+a_2 p + a_1 : \quad (1)$$

Քանի որ p -ի աստիճանները կենտ թվեր են, ապա հավասարման աջ մասի գումարի կենտ կամ զույգ լինելը կախված է a_i -ի գործակիցներից: Այսինքն, եթե $(a_n + a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1)$-ը զույգ (կենտ) է,
ապա a -ն ևս զույգ (կենտ) է: Այսպիսով, ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 3: Թվարկության կենտ համակարգում գրառված թիվը զույգ (կենտ) է, եթե նրա թվանշանների գումարը զույգ (կենտ) է:

Օրինակ: 3487_9 թիվը զույգ է, որովհետև $3+4+8+7=22$; 23682_9-ն կենտ է:

16_{10} թիվը գրառենք տարբեր համակարգերում և ստուգենք թեորեմի իմաստը: $16_{10}=17_9=22_7=31_5=51_3$; $1+7=8$, $2+2=4$, $3+1=4$, $5+1=6$:

Ինչպես տեսնում ենք թվանշանների գումարը նշված բոլոր համակարգերում զույգ է:

Հետևանք 1: Կենտ համակարգում թվի թվանշանների տեղափոխությունից նրա զույգությունը չի փոխվում:

Օրինակ: 3487_9, 4378_9, 7348_9, 7843_9 բոլորը զույգ թվեր են:

Թեորեմ 4: Զույգ հիմքով համակարգում գրառված թիվը զույգ է, եթե նրա վերջին թվանշանը զույգ է:

Ապացուցում: (1) գրառման մեջ բոլոր գումարելիները զույգ են, բացառությամբ a_1-ի, որովհետև p-ն զույգ թիվ է: Հետևաբար a թվի զույգությունը կախված է a_1 թվանշանից:

Օրինակ: 372_{10}, 674_8, 16_4, 10_2 թվերը զույգ են, իսկ 379_{10}, 675_8 թվերը՝ կենտ:

Այժմ դիտարկենք 11-ի բաժանելիության հայտանիշը տասնորդական համակարգում և նրա անալոգ թեորեմները թվարկության այլ համակարգերում:

Նախ վերհիշենք թե ինչպես է այդ թեորեմն արտածվում թվարկության տասնորդական համակարգում:

$$a_n(11-1)^{n-1}+a_{n-1}(11-1)^{n-2}+...+a_2(11-1)+a_1=11\cdot A+a_n(-1)^{n-1}+a_{n-1}(-1)^{n-2}+...+$$

$$+a_3(-1)^2+a_2(-1)+a_1=11\cdot A+B,$$

որտեղ $B=-(a_n+a_{n-2}+...+a_2)+(a_{n-1}+a_{n-3}+...+a_1)$:

Այսպիսով, a թիվը տասնորդական համակարգում բաժանվում է 11-ի, եթե նրա նշանափոխ թվանշանների գումարը բաժանվում է 11-ի:

Օրինակ: $28116_{10} \vdots 11$, որովհետև $2-8+1-1+6=0$: $0 \vdots 11$:

$1419_{10} \vdots 11$, որովհետև $1-4+1-9=-11$: $-11 \vdots 11$:

Անալոգիայի օգնությամբ ստանանք 8-ական համակարգում թիվը 11_8-ի բաժանելիության հայտանիշը, $(9_{10}=11_8)$:

8-ական համակարգում գրառված թիվը բաժանվում է 11_8-ի, եթե թվի նշանափոխ թվանշանների գումարը տասնորդական համակարգում բաժանվում է 9-ի:

Օրինակ: $43536_8 \vdots 11_8$; $4-3+5-3+6=9$; $9 \vdots 9$: $32175_8 \vdots 11_8$; $3-2+1-7+5=0$; $0 \vdots 9$:

8-ական համակարգում 11_8-ին բազմապատիկ թիվ գտնելու համար կարելի է վարվել հետևյալ կերպ. $703060407_8 \vdots 11_8$; որովհետև $7+3+6+4+7=27$; $27 \vdots 9$: Եվ իրոք՝

$703060407_8=62076217_8\cdot 11_8$: Նման ձևով $70306040502_8=6207621662_8\cdot 11_8$:

Թեորեմ 5: p-ական համակարգում գրառված թիվը որպեսզի բաժանվի p-ի, անհրաժեշտ է և բավարար որ այն վերջանա 0-ով:

Ապացուցում: $a=\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1}_{(p)}=a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+...+a_2p+a_1=p\cdot A+a_1$:

Որպեսզի $p\cdot A+a_1$ բաժանվի p-ի անհրաժեշտ է և բավարար, որ a_1-ը բաժանվի p-ի, բայց p-ական համակարգում $p_p=10$: Այսպիսով, p-ական համակարգում գրառված թիվը որպեսզի բաժանվի p-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ թվի գրառումը վերջանա 0-ով: Օրինակ. $235(13)70_{16}:10_{16}=235(13)7_{16}$:

Անալոգիայի կիրառությունը տնքստային խնդիրների լուծման ժամանակ

Խնդիր: Մի հռոմեացի մեռնելիս իր ունեցվածքը կտակեց կնոջն ու երեխային, որ նոր պիտի ծնվեր: Եթե տղա ծնվեր, պիտի ստանար ունեցվածքի երկու երրորդը, իսկ մայրը՝ մեկ երրորդը: Եթե աղջիկ աշխարհ գար, նա պիտի ստանար մեկ երրորդը, իսկ մայրը՝ երկու երրորդը: Բայց ծնվեցին երկվորյակներ՝ տղա և աղջիկ: Ինչպե՞ս պետք էր բաժանել ժառանգությունը:

Լուծում: Անկախ ծնված երեխաների թվից՝ տղայի, մոր և աղջկա ստանալիք ժառանգությունների ծավալները հարաբերում են այնպես, ինչպես 4:2:1՝ համաձայն կտակի: Նշանակենք մոր ստանալիք ժառանգությունը $2a$-ով, այդ դեպքում տղան կստանա $4a$, իսկ աղջիկը՝ a:

Հետևաբար $4a+2a+a=1$, որտեղից $a=1/7$:

Այսինքն , տղան կստանա հարստության $4/7$-ը, մայրը՝ $2/7$ -ը, իսկ աղջիկը՝ $1/7$ -ը:

Այժմ կիրառենք անալոգիան նույն բովանդակությամբ խնդրի լուծման համար՝ ենթադրելով, որ ծնվել են թվով n տղա և թվով m աղջիկ:

Լուծում: Եթե մոր հարստությունը նշանակենք a-ով, ապա $2na+a+0,5ma=1$, որտեղից $a=2/(4n+m+2)$: Այսպիսով, յուրաքանչյուր տղա կստանա հարստության $4/(4n+m+2)$ մասը, իսկ յուրաքանչյուր աղջիկ՝ $1/(4n+m+2)$ մասը:

Օրինակ, եթե ծնվել են 2 տղա և 3 աղջիկ, ապա յուրաքանչյուր տղա կստանա հարստության $4/13$, յուրաքանչյուր աղջիկ՝ $1/13$ մասը, մայրը՝ $2/13$:

Կարելի է կատարել ընդհանրացում և կազմել հետևյալ բովանդակությամբ խնդիր, որի լուծումը իրականացվում է նույն անալոգիայով:

Խնդիր: Արտադրությունում աշխատում են թվով m վարպետ առաջին կարգի, n թվով՝ երկրորդ կարգի և p վարպետ՝ երրորդ կարգի: Որքա՞ն պետք է ստանա յուրաքանչյուր կարգի վարպետ արտադրանքի իրացումից, եթե հայտնի է, որ նրանց աշխատավարձի չափերը հարաբերում են այնպես, ինչպես $a:b:c$:

Լուծում: Եթե միավոր աշխատավարձի չափը նշանակենք x -ով, ապա առաջին կարգի վարպետը կստանա ax, երկրորդ կարգի վարպետը՝ bx և երրորդ կարգի վարպետը՝ cx աշխատավարձ, հետևաբար. $max+nbx+pcx=1$ կամ $x=1/(ma+nb+pc)$:

Պատասխան: $a/(ma+nb+pc)$; $b/(ma+nb+pc)$; $c/(ma+nb+pc)$:

Литература

1. Д.Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. Издательство, Наука, Москва, 1975.
2. И.Н.Сергеев, С.Н. Олехник, С.Б.Гашков. Примени математику. Москва, Наука, 1990.
3. У.У. Сойер, Прелюдия к математике, Просвещение, 1972.

Резюме

Аналогия очень важна как в развитии науки, так и в обучении математике. Аналогия помогает учащимся находить предположительное решение новых вопросов, учебных проблем и этим способствует активации познавательного процесса, эффективному развитию их самостоятельного продуктивного мышления, математической интуиции. Аналогия, кроме того, является важнейшим источником ассоциации, обеспечивающим глубокое и прочное усвоение предмета учащимися.