1-2 (23-24) 2011

ՀՏԴ 511.2 *Մաթեմատիկա*

Պ. ԷՐԴՅՈՇԻ ԱՌԱՋԱԴՐԱԾ ԽՆԴՐԻ ՈՐՈՇ ԴԵՊՔԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

Ռ.Ծ. Մուսայելյան

Պ. Էրդյոշը արեց այն ենթադրությունը (տես [1], էջ 78), ըստ որի ցանկացած բնական $k(k>1)$ թվի համար միշտ պետք է գոյություն ունենան x,y,z բնական թվեր՝ այնպիսիք, որ տեղի կունենա

$$\frac{4}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \tag{1}$$

հավասարությունը: Ըստ [1] գրքի այս խնդիրը մինչև հիմա լուծված չէ (խնդիրը գրված է [1] գրքի պարագրաֆ 3-ում՝ «Մի քանի լուծված և չլուծված պրոբլեմներ բարձրագույն թվաբանությունից» բաժնում):

Այս աշխատանքում լուծված է Պ.Էրդյոշի կողմից առաջադրված վերը նշված խնդիրը, բացառությամբ այն դեպքերի, երբ k թիվը ունի միայն 8r+1 տեսքի պարզ արտադրիչներ, վերջացող 1 կամ 9 թվանշաններով:

Նշենք, որ դիտարկվող խնդիրը, երբ k>1 բնական թիվ է՝ 3n, 3n-1, և 6n-2, n∈N[1] տեսքի, լուծված է (տես [2]):

Այժմ անդրադառնանք առաջադրված խնդրի լուծմանը:

Թեորեմ 1. Եթե k=2m, m∈N, ապա գոյություն ունեն x,y,z այնպիսի բնական թվեր, որ

$$\frac{4}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}:$$

Ապացույց: Դիցուք k=2m (m=1,2,3…): Ըստ թվաբանության հիմնական թեորեմի՝ մեկից տարբեր ցանկացած բնական թիվ կարելի է գրել կանոնական վերլուծության տեսքով, ընդ որում՝ միակ ձևով: Դիցուք

$$k=P_1^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\cdots P_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

որտեղ $P_1<P_2<\ldots<P_n$ պարզ թվեր են, իսկ $\alpha_i\in N$ (i=1,2,3,…,n):

Պարզ է, որ դիտարկված դեպքում $P_1=2$: Վերցնենք $x=y=2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}$, իսկ $z=2^{\alpha_1-1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}$: Կստանանք՝

$$\frac{4}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}=\frac{1}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}+\frac{1}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}+\frac{1}{2^{\alpha_1-1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}:$$

Իրոք,

$$\frac{1}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}+\frac{1}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}+\frac{1}{2^{\alpha_1-1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}=\frac{1+1+2}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}=\frac{4}{2^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\ldots P_n^{\alpha_n}}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2: Եթե k=2m+1, m∈N, (2)-ի մեջ գոնե մեկ $P_i=4r+3$ (i=1,2,3,…, n) տեսքի պարզ թիվ է, ապա գոյություն ունեն x,y,z այնպիսի բնական թվեր, որ $\frac{4}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$:

[1] *Այստեղ և հետագայում N-ով նշանակված է բնական թվերի բազմությունը:*

Ապացույց: Դիցուք k=2m+1, m∈N թիվը տված է (2) կանոնական դեպքով: Պարզ է, որ $P_1 \neq 2$: Հարց է ծագում. գոյություն ունեն $\lambda, \upsilon, \sigma$ այնպիսի բնական թվեր, որ տեղի ունենա

$$\frac{4}{P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}} = \frac{2P_1}{\lambda \cdot P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}} + \frac{\upsilon}{\lambda P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}} + \frac{\sigma}{\lambda P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}} \quad (3)$$

հավասարությունը: Հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք $\lambda, \upsilon, \sigma$-ի նկատմամբ հետևյալ անորոշ հավասարումը.

$$\frac{2P_1}{\lambda} + \frac{\upsilon}{\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda} = 4: \quad (4)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ եթե (4) անորոշ հավասարումը ունենա բնական թվերով լուծումներ, ընդ որում՝ այդ լուծումները բավարարեն $\lambda = \upsilon k_1, \lambda = \sigma k_2$ պայմաններին, որտեղ k_1-ը և k_2-ը որևէ բնական թվեր են, λ-ն զույգ թիվ, ապա տրված խնդիրը լուծված կհամարվի: Փնտրենք (4)-ի լուծումները բավարարող հետևյալ պայմաններին՝ $0 < \frac{\upsilon}{\lambda} \leq 1$ և $0 < \frac{\sigma}{\lambda} \leq 1$: Այդ է մեզ հուշում խնդրի դրվածքը: Այնուհետև (4) հավասարությունից կստանանք՝

$$2 \leq \frac{2P_1}{\lambda} < 4:$$

Հաշվի առնելով, որ λ-ն զույգ թիվ է, վերջինից կստանանք՝

$$\frac{P_1}{2} < \lambda \leq P_1 - 1:$$

Քանի որ P_1-ը պարզ կենտ թիվ է, λ-ն զույգ թիվ, ուստի λ-ն կարող է ընդունել հետևյալ արժեքները՝

$$\frac{P_1+1}{2}, \frac{P_1+3}{2}, \frac{P_1+5}{2}, \ldots, P_1 - 1:$$

Այժմ ենթադրենք, որ թեորեմի պայմանում նշված 4r+3 տեսքի պարզ թիվը P_1-ն է: Որպես λ վերցնենք $\frac{P_1+1}{2}$ թիվը: Պարզ է, որ (P_1+1) թիվը 4-ի բազմապատիկ է: Այնուհետև (3) բանաձևում վերցնելով $\upsilon = \sigma = 1$ կստանանք, որ թեորեմն ապացուցված է: Իրոք՝

$$\frac{4P_1}{k(P_1+1)} + \frac{2}{k(P_1+1)} + \frac{2}{k(P_1+1)} = \frac{4(P_1+1)}{k(P_1+1)} = \frac{4}{k},$$

որտեղ $k = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \ldots P_n^{\alpha_n}$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3: Դիցուք $k = 2m+1$, m∈N, (2) վերլուծության մեջ գոնե մեկ $P_i = 4r+1 (i = 1,2,\ldots n)$ տեսքի պարզ թիվ է: Եթե այդ 4r+1 տեսքի պարզ թիվը 1 կամ 9 թվանշանով վերջացող 8q+1 տեսքի պարզ թիվ չէ, ապա գոյություն ունեն այնպիսի x,y,z բնական թվեր, որ $\frac{4}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$:

Ապացույց: Որոշակիության համար ընդունենք, որ 4r+1 տեսքի պարզ թիվը, որի մասին ասվում է թեորեմում, P_1-ն է: Պարզ է, որ $P_1+3=4f$: Դիտարկենք f-ի զույգ կամ կենտ լինելու տարբերակները:

Եթե f-ը զույգ թիվ է, ապա անդրադառնանք (3) հավասարությանը, վերցնելով $\lambda = \frac{P_1+1}{2}, \upsilon, \sigma$ թվերից մեկը 2, մյուսը 4՝ կստանանք՝

$$\frac{4P_1}{k(P_1+3)} + \frac{8}{k(P_1+3)} + \frac{4}{k(P_1+3)} = \frac{4P_1+12}{k(P_1+3)} = \frac{4}{k}:$$

Այժմ ենթադրենք՝ f թիվը կենտ է: Կստացվի, որ P_1 պարզ թիվը 8q+1 տեսքի է: Այսինքն՝ $P_1 = 8q+1$: Նշենք, որ կենտ պարզ թվերի գրության մեջ վերջին թվանշանը կարող է լինել 1,3,7 կամ 9:

Դիցուք P_1 թվի գրության վերջին թվանշանը 3 է: P_1+7 թիվը կբաժանվի 8-ի, ուրեմն՝ նաև 4-ի: Բայց մյուս կողմից այն վերջանում է զրոյով, ուստի կբաժանվի նաև 5-ի: Քանի որ 4 և 5 թվերը փոխադարձաբար պարզ թվեր են, ուստի P_1+7 թիվը կբաժանվի 20-ի: Կստանանք՝

$$\frac{4P_1}{k(P_1+7)}+\frac{20}{k(P_1+7)}+\frac{8}{k(P_1+7)}=\frac{4P_1+28}{k(P_1+7)}=\frac{4}{k}:$$

Այժմ ենթադրենք՝ P_1 թվի գրության մեջ վերջին թվանշանը 7 է: Այս դեպքում P_1+3 թիվը կբաժանվի 4-ի և 10-ի, որովհետև թիվը վերջանում է զրոյով: Հետևաբար՝

$$\frac{4P_1}{k(P_1+3)}+\frac{10}{k(P_1+3)}+\frac{2}{k(P_1+3)}=\frac{4P_1+12}{k(P_1+3)}=\frac{4}{k}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, ստուգվեց (1) բանաձևի ճշտությունը բոլոր բնական k (k>1) թվերի դեպքում, բացառությամբ, երբ k-ն կունենա միայն 8q+1 տեսքի 1 կամ 9 թվանշաններով վերջացող պարզ արտադրիչներ:

Գրականություն

1. Տոնոյան Գ.Ա. Մաթեմատիկական ընտրովի թեորեմներ և խնդիրներ: Երևան, «Լույս» հրատարակչություն, 1970:
2. Ասլանյան Է.Խ. Պ.Էրդյոշի առաջադրած խնդրի լուծման մի տարբերակ բնական {3n}, {3n-1} և {6n-2} տեսքի թվերի n∈N բազմությունների վրա: Տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ և կառավարում, Երևան, 2008, №4:

Резюме

В статье рассмотрена задача П.Эрдюша: для любого натурального числа k (k>1) всегда существуют такие натуральные числа x,y,z, что $\frac{4}{k}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. В работе решена задача для всех k (k>1), кроме таких, которые имеют одни простые множители вида 8q+1, последняя цифра которых 1 или 9.