1-2 (23-24) 2011

УДК 517.9 *Математика*

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Г. Саакян

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} y_1' &= p(t)y_2, \\ y_2' &= r(t)y_1, \end{aligned} \tag{1}$$

в предположении, что функции $p(t)$ и $r(r)$ определены на положительной полуоси и локально суммируемы (интегрируемы в смысле Лебега на любом конечном интервале), причем

$$p(t) \ge 0, \tag{2}$$

и

$$\int_0^{+\infty} p(s)ds = +\infty$$

(3)

(случай $\int_0^{+\infty} p(s)ds < +\infty$ был рассмотрен в [1], [2]). Под решением системы (1) в этом случае будем понимать вектор-функцию $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, каждая из компонент которой локально абсолютно непрерывна, и которая удовлетворяет системе (1) почти всюду на $[0, +\infty)$. Решение $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) будем называть нетривиальным, если $y_1(t) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности $+\infty$.

Определение 1. Нетривиальное решение $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) назовем осциллирующим, если функция $y_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль в некоторой окрестности $+\infty$.

Определение 2. Система (1) называется осциллирующей, если все его решения осциллирующие, в противном случае называется неосциллирующей.

Заметим, что линейное уравнение

$$y'' - r(t)y = 0$$

является частным случаем системы (1) $(p(t) \equiv 1)$. Осцилляционные свойства этого уравнения более или менее исследованы (см., например, [3]-[5]) . Однако, что касается системы (1), то указанные свойства до сих пор остаются не конца исследованными. В данной работе определяются некоторые достаточные условия, гарантирующие осцилляцию системы (1).

Известно (см., например, [6, теорема 10.1] или [7, лемма 2]), что если система (1), при выполнении условия (2), имеет по крайней мере одно осциллирующее решение, то тогда каждая из его нетривиальных решений является осциллирующей.

Заметим прежде всего, что если $p(t) \equiv 0$ в некоторой окрестности $+\infty$, то очевидно, что система (1) будет неосциллирующей. В связи с этим, в дальнейшем мы будем предполагать, что $p(t) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности $+\infty$.

Введем некоторые необходимые обозначения. Пусть

$$P(t) = \int_0^t p(s)ds . \tag{4}$$

В силу условий (2) и (3), очевидно, что найдется такое $a_p > 0$, что $P(t) > 0$ для $t \ge a_p$. Примем

$$\varphi(t) = \left(P(t)\right)^{-1} \int_0^t p(s) \int_0^s r(\tau) d\tau ds \quad \text{для } t \ge a_p \tag{5}$$

Следущий результат хорошо известен (см. [6], теорема 12.3).

Теорема 1. *Пусть*

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty ,$$

или

$$-\infty < \lim_{t \to +\infty} \inf \varphi(t) < \lim_{t \to +\infty} \sup \varphi(t) .$$

Тогда система (1) *осциллирующая.*

Очевидно, что теорема 1 неприменима в случаях, когда $\lim\limits_{t \to +\infty} \inf \varphi(t) = -\infty$ и когда существует конечный предел

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi_0 . \tag{6}$$

В работе мы будем рассматривать лишь последний случай (предполагается выполнения условия (6)).

Далее, нам понадобится следующее утверждение (см, [6], лемма 12.1).

Утверждение 1. *Пусть* $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *-решение системы* (1), *удовлетворяющее условию*

$$y_1(t) \ne 0 \quad \textit{для} \quad t \ge a . \tag{7}$$

Тогда

$$\int_a^{+\infty} p(s) u^2(s) ds < +\infty , \tag{8}$$

где

$$u(t) = \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \quad \textit{для} \quad t \ge a . \tag{9}$$

Имеет место

Лемма. *Пусть* $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *-решение системы* (1), *удовлетворяющее условию* (7). *Тогда для* $t \ge a$

$$u(t) = \varphi_0 + \int_0^t r(s) ds + \int_t^{+\infty} p(s) u^2(s) ds , \tag{10}$$

где $u(t)$ *определяется соотношением* (9).

Доказательство. В процессе доказательства мы будем считать, что $t \ge a$. Учитывая равенства системы (1), будем иметь

$$u'(t) = \frac{y_2'(t) y_1(t) - y_1'(t) y_2(t)}{y_1^2(t)} = r(t) - p(t) u^2(t) . \tag{11}$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от a до t, будем иметь

$$u(t) - u(a) = \int_a^t r(s) ds - \int_a^t p(s) u^2(s) ds . \tag{12}$$

Преобразуем соотношение (12) к виду

$$u(t)=u(a)-\int_0^a r(s)ds-\int_a^{+\infty} p(s)u^2(s)ds+\int_0^t r(s)ds+\int_t^{+\infty} p(s)u^2(s)ds,$$

Тогда последнее равенство можно записать и в виде

$$u(t)=\varphi(a)+\int_0^t r(s)ds+\int_t^{+\infty} p(s)u^2(s)ds, \tag{13}$$

где

$$\varphi(a)=u(a)-\int_0^a r(s)ds-\int_a^{+\infty} p(s)u^2(s)ds.$$

Из равенства (13) следует, что для доказательства равенства (10), достаточно показать, что $\varphi(a)=\varphi_0$. Помножим обе части равенства (13) на $p(t)$ и проинтегрируем полученное в пределах от a до t. Получим

$$\int_a^t u(s)p(s)ds=u(a)\int_a^t p(s)ds+\int_a^t p(s)\int_0^s r(\tau)d\tau ds+\int_0^t p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds. \tag{14}$$

Учитывая (3) и (4), при $x\ge 0$ будем иметь

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t p(s)ds\right)^{-1}\cdot\int_x^t p(s)ds=1, \tag{15}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t p(s)ds\right)^{-1}\int_a^t p(s)\int_0^s r(\tau)d\tau ds=\varphi_0. \tag{16}$$

Далее, применив интегральное неравенство Коши-Буняковского, будем иметь

$$\left(\int_a^t p(s)u(s)ds\right)^2\le\int_a^t p(s)ds\int_a^t p(s)u^2(s)ds.$$

Отсюда, с учетом соотношения (3), и утверждения 1, найдем

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t p(s)ds\right)^{-1}\cdot\int_x^t p(s)u(s)ds=0. \tag{17}$$

Воспользуемся легко доказываемым неравенством

$$\int_a^t p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds\le\int_a^x p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds+\int_x^t p(s)ds\int_x^{+\infty} p(s)u^2(s)ds \quad \text{для} \quad t\ge x\ge a.$$

Учитывая соотношения (2), (8) и (15), а также последнее неравенство, получим

$$\limsup_{t\to+\infty}\left(\int_0^t p(s)ds\right)^{-1}\int_a^{+\infty} p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds\le\int_x^{+\infty} p(s)u^2(s)ds \quad \text{для} \quad x\ge a.$$

Следовательно,

$$\limsup_{t\to+\infty}\left(\int_0^t p(s)ds\right)^{-1}\int_a^t p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds=0. \tag{18}$$

Далее, умножив обе части (14) на $\left(\int_0^t p(s)ds\right)^{-1}$, и, перейдя в полученном равенстве к пределу при $t\to+\infty$, с учетом (15)-(18), мы получим, что $\varphi(a)=\varphi_0$, что и требовалось доказать.

Положим

$$I(t)=P(t)\left(\varphi_0-\int_0^t r(s)ds\right),\quad S(t)=-\left(P(t)\right)^{-1}\int_0^t P^2(s)r(s)ds \quad \text{для } t\ge a_p,$$

$$I_1=\liminf_{t\to+\infty} I(t),\;\; I_2=\limsup_{t\to+\infty} I(t), \tag{19}$$

$$S_1=\liminf_{t\to+\infty} S(t),\;\; S_2=\limsup_{t\to+\infty} S(t).$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{P(t)}{\ln P(t)}(\varphi_0-\varphi(t))>\frac{1}{4}. \tag{20}$$

Тогда система (1) *осциллирующая.*

Доказательство. Предположим, что условие (19) имеет место и при этом система (1) неосциллирующая. Тогда найдется решение $\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ системы (1), удовлетворяющее условию (7), где $a>a_p$. Согласно лемме 1, будет верным равенство (10), где u определяется соотношением (9). Умножим обе части равенства (10) на p и проинтегрируем полученное от a до t. Получим

$$\int_a^t p(s)u(s)ds=c_0\int_a^t p(s)ds+\int_a^t p(s)\int_0^s r(\tau)d\tau ds+\int_a^t p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds$$

или

$$\int_a^t p(s)u(s)ds=c_0\left(\int_0^t p(s)ds-\int_0^{\Pi} p(s)ds\right)+\left(\int_0^t p(s)\int_0^s r(\tau)d\tau ds-\int_0^a p(s)\int_0^s r(\tau)d\tau ds\right)+$$

$$+\int_a^t p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds.$$

Учитывая (4) и (5), последнее равенство можно записать в виде

$$P(t)(\varphi_0-\varphi(t))=\int_a^t p(s)u(s)ds-\int_a^t p(s)\int_s^{+\infty} p(\tau)u^2(\tau)d\tau ds+\psi_0(a), \tag{21}$$

где

$$\psi_0(a)=P(a)(\varphi_0-\varphi(a)).$$

Интегрируя по частям второй из интегралов в (21), получим

$$P(t)(\varphi_0-\varphi(t))=\int_a^t p(s)u(s)(1-P(s)u(s))ds-P(t)\int_s^{+\infty} p(s)u^2(s)d\tau ds+\psi_1(a), \tag{22}$$

где

$$\psi_1(a)=\psi_0(a)+P(a)\int_a^{+\infty} p(s)u^2(s)ds.$$

Воспользовавшись легко доказываемым неравенством

$$P(s)u(s)(1-P(s)u(s))\le\frac{1}{4} \quad \text{для } s\ge a,$$

мы из равенства (22) получим

$$P(t)(\psi_0-\psi(t))\le\frac{1}{4}\ln P(t)+\psi_2(a), \tag{23}$$

где

$$\psi_2(a)=\psi_1(a)-\frac{1}{4}\ln P(a).$$

Тогда, из неравенства (23), с учетом (3) будет следовать

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{P(t)}{\ln P(t)}(\psi_0-\psi(t))\le\frac{1}{4},$$

что противоречит условию (20).

Следствие 1. *Пусть* $I_1>-\infty$ *и*

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\left(P(t)\right)^{-1}\int_0^t P(s)r(s)ds>\frac{1}{4}. \tag{24}$$

Тогда система (1) *осциллирующая.*

Доказательство. Действительно, при $t\ge 0$ будем иметь

$$\int_0^t P(s)r(s)ds=\int_0^t P(s)\left(\int_0^s r(\xi)d\xi\right)'ds=P(t)\int_0^t r(s)ds-\int_0^t p(s)\int_0^s r(\xi)d\xi ds\,.$$

Отсюда при $t>a_p$, получим

$$\frac{P(t)}{\ln P(t)}(\psi_0-\psi(t))=\frac{1}{\ln P(t)}\int_0^t P(s)r(s)ds+\frac{I(t)}{\ln P(t)}\,.$$

Учитывая, что $I_1>-\infty$, а также условия (24) и (3), мы получим, что имеет место условие (20). Согласно теореме 2 система (1) будет осциллирующей.

Следствие 2. *Пусть*

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\,[I(t)+S(t)]>\frac{1}{2}. \tag{25}$$

Тогда система (1) *осциллирующая.*

Доказательство. При $t>0$ имеем

$$\int_0^t P^2(s)r(s)ds=\int_0^t P^2(s)\left(\int_0^s r(\tau)d\tau\right)'ds=P^2(t)\int_0^t r(s)ds-2\int_0^t p(s)P(s)\int_0^s r(\tau)d\tau ds=$$

$$=P^2(t)\int_0^t r(s)ds+2\int_0^t p(s)I(s)ds-2\psi_0\int_0^s p(s)P(s)ds=-P(t)I(t)+2\int_0^t p(s)I(s)ds\,.$$

Отсюда будет следовать, что при $t>a_p$

$$2\left(P(t)\right)^{-1}\int_0^t p(s)I(s)ds=I(t)+S(t)\,. \tag{26}$$

Обозначив при $t>a_p$

$$M(t)=\left(P(t)\right)^{-1}\int_0^t p(s)I(s)ds\,,$$

и, учитывая (3) и (25), из соотношения (26) найдем, что

$$\lim_{t\to+\infty}\inf M(t)>\frac{1}{4}. \tag{27}$$

Учитывая (27), нетрудно найти,что

$$\lim_{t\to+\infty}\inf\left(P(t)\right)^{-1}\int_{a_p}^t\frac{p(s)}{P(s)}M(s)ds>\frac{1}{4}. \tag{28}$$

Далее, поскольку при $t>a_p$

$$\int_{a_p}^{t} \frac{p(s)}{P(s)} I(s)ds = \int_{a_p}^{t} p(s)\left(\psi_0 - \int_0^s q(\tau)d\tau\right)ds = P(t)(\psi_0 - \psi(t) - P(a_p)(\psi_0 - \psi(a_p)),$$

то тогда будем иметь

$$\frac{P(t)}{\ln P(t)}(\psi_0 - \psi(t)) = \frac{1}{\ln P(t)} \int_{a_p}^{t} \frac{p(s)}{P(s)} I(s)ds + \frac{P(a_p)(\psi_0 - \psi(a_p))}{\ln P(t)}.$$

(29)

С другой стороны при $t > a_p$ имеем

$$\int_{a_p}^{t} \frac{p(s)}{P(s)} I(s)ds = \int_{a_p}^{t} \left(P(t)\right)^{-1} \left(\int_0^s p(\tau)I(\tau)d\tau\right)' ds = M(t) + \int_{a_p}^{t} \frac{p(s)}{P(s)} M(s)ds - M(a_p).$$

Тогда, из равенства (29) при $t > a_p$ получим

$$\frac{P(t)}{\ln P(t)}(\psi_0 - \psi(t)) = \left(P(t)\right)^{-1}\left[M(t) - M(a_p) + \int_{a_p}^{t} \frac{p(s)}{P(s)} M(s)ds\right] + \frac{P(a_p)(\psi_0 - \psi(a_p))}{\ln P(t)}.$$

Из последнего равенства, с учетом (2) и (28), будет следовать условие (20), и, следовательно, будет иметь место утверждение теоремы 2.

Следствие 3. *Пусть* $I_1 > \frac{1}{4}$ *или* $S_1 > \frac{1}{4}$. *Тогда система* (1) *осциллирующая.*

Доказательство. Сначала предположим, что $I_1 > \frac{1}{4}$. Тогда, из соотношения (26) будет следовать, что имеет место условие (25). Согласно следствию 2, система (1) будет осциллирующей.

Теперь предположим, что

$$S_1 > \frac{1}{4}. \tag{30}$$

Ясно, что при $t > a_p$

$$\int_{a_p}^{t} P(s)r(s)ds = S(t) - S(a_p) + \int_{a_p}^{t} \frac{p(s)}{P(s)} S(s)ds. \tag{31}$$

Отсюда, с учетом (30), мы получим

$$\liminf_{t\to+\infty} \left(P(t)\right)^{-1} \int_0^t P(s)r(s)ds > \frac{1}{4}. \tag{32}$$

С другой стороны ясно, что при $t > a_p$

$$\varphi'(t) = \frac{p(t)}{P^2(t)} \int_0^t P(s)r(s)ds.$$

Интегрируя последнее равенство от t до t_0 $\left(t_0 > t > a_p\right)$, получим

$$\varphi(t_0) - \varphi(t) = \int_t^{t_0} \frac{p(s)\ln P(s)}{P^2(s)}\left[\frac{1}{\ln P(s)} \int_0^s P(\tau)r(\tau)d\tau\right]ds.$$

Отсюда, учитывая (3) и (32), найдутся $\varepsilon > 0$ и $a > a_p$ такие, что при $t_0 > t > a$

$$\varphi(t_0) - \varphi(t) \ge \frac{1+\varepsilon}{4} \int_t^{t_0} \frac{p(s)\ln P(s)}{P^2(s)} ds.$$

Из последнего неравенства, с учетом (3) и (6), при $t > a$ получим

$$\varphi_0 - \varphi(t) \geq \frac{1+\varepsilon}{4} \frac{\ln P(t)}{P(t)}.$$

Значит, выполняется условие (20), и по теореме 2 система (1) будет осциллирующей.

Литература

1. **A. Lomtatidze.** Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equation. two-dimentional sustems of first order linear ordinary differential equations. *Georgian Math. J.,* 4 (1997), № 2, 129-138.
2. **A. Lomtatidze and N. Partsvania.** Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first order linear ordinary differential equations. *Georgian Math. J.,* 6 (1999), ·№ 3, 285-298.
3. **P. Hartman.** On-non-oscillatory linear differential equations of second order. *Amer. J. Math.* 74 (1952), 389-400.
4. **Z. Nehary.** Oscillation criteria for second order linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 85 (1957). 428-445.
5. **T. Chantladze, N. Kandelaki and A. Lomtatdze.** Oscillation and nonoscillation criteria for a second order linear equation. *Georegian Math. J.* 6(1999), ·№ 5, 401-414.
6. **J. D. Mirzov.** Asymptotic behavior of solutions of system of non-autonomous ordinary differential equations. (Russia) *Maikop,* 1993.
7. **I. V. Kamenev.** An integral comparison theorem for certain systems of linear differential equations. (Russian) *Differencial'nye Uravneniya* 8 (1972), 778-784.

Ամփոփում

Աշխատանքում որոշվում են

$$y_1' = p(t) y_2,$$
$$y_2' = r(t) y_1,$$

գծային համասեռ համակարգի օսցիլյացիայի որոշ բավարար հայտանիշներն այն ենթադրությամբ, որ $p(t)$ և $r(r)$ ֆունկցիաները որոշված են դրական կիսաառանցքի վրա և լոկալ հանրագումարելի են, ընդ որում՝ $p(t) \geq 0$, երբ $t \geq 0$ և $\int_0^{+\infty} p(s)ds = +\infty$: