



лическими заземленными ленточными штампами с нулевыми потенциалами. На граничных полосах ( $|x| < a, y = h, |z| < \infty$ ) и ( $|x| < b, y = -h, |z| < \infty$ ) расположены электроды с потенциалами  $\varphi_+(x)$  и  $\varphi_-(x)$  соответственно. При этом посредством этих же электродов возможно сформулировать соответствующие механические граничные условия (напряжения или перемещения), если принять их в качестве жесткого штампа или тонкого металлизированного слоя с нулевой жесткостью.

Рассмотрим задачу распространения электроупругой волны в указанной выше конструкции, когда со стороны левой части волновода ( $x < 0$ ) из бесконечности по направлению оси  $Ox$  набегают проходящая гармоническая, чисто сдвиговая, плоская упругая волна антиплоской деформации (SH-волна) с сопутствующим потенциалом электрического поля:

$$w_N^{(\infty)}(x, y) = C_N e^{i\gamma_N x} \sin \lambda_N (y - h); \quad \varphi_N^{(\infty)} = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w_N^{(\infty)}(x, y) \quad (2.1)$$

$$\gamma_N = \sqrt{k^2 - \lambda_N^2}; \quad \lambda_N = \pi N / 2h; \quad k > \lambda_N; \quad N = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Здесь  $w(x, y)$  – амплитуда единственного, отличного от нуля, компонента упругого перемещения  $U_z(x, y, t) = w(x, y)e^{-i\omega t}$ ,  $\varphi(x, y)$  – амплитуда потенциала электрического поля,  $\omega$  – частота колебаний падающей волны,  $t$  – время,  $C_N$  – постоянная,  $k = \omega/c$  – волновое число,  $c = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость распространения сдвиговой волны в слое,  $e_{15}$  – пьезомодуль,

$\epsilon_{11}$  – диэлектрическая постоянная слоя,  $N$  – натуральное число, удовлетворяющее условию  $N < 2kh$ , которое обеспечивает условие проходящей волны (1.1) [1,2]. Отметим, что в (1.1) и в дальнейшем гармонический множитель  $e^{i\omega t}$  опускается, т.е. задача решается в амплитудах. Отметим также, что рассматриваемый слой-волновод по своим краевым поверхностям  $y = \pm h$  контактирует с вакуумом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ .

Полагая, как отмечалось выше, что слой находится в условиях антиплоской деформации, которая характеризуется тем, что волна поляризуется в направлении  $z$ , но распространяется в плоскости  $(x, y)$ , требуется определить электроупругое волновое поле в слое  $|y| < h$  и в вакууме  $|y| > h$ , амплитуды касательных напряжений под штампами, число отраженных и проходящих волн и их волновые характеристики в зависимости от физических и геометрических параметров волновода и внешних нагрузок.

Решение поставленной задачи сводится к следующей краевой задаче относительно амплитуд упругого перемещения  $w(x,y)$  и потенциалов электрического поля в слое  $\varphi(x,y)$  и в вакууме  $\varphi_0(x,y)$ :

$$\Delta w(x,y) + k^2 w(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega \quad (2.3)$$

$$\Delta \varphi(x,y) + (e_{15} k^2 / \varepsilon_{11}) w(x,y) = 0,$$

$$\Delta \varphi_0(x,y) = 0, \quad (-\infty < x < \infty, |y| > h) \quad (2.4)$$

$$w(x, \pm h) = 0, \quad \begin{cases} |x| \geq a, & y = h \\ |x| \geq b, & y = -h \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = G_{44} \begin{cases} q_+(x), & |x| < a \\ q_-(x), & |x| < b \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\varphi(x, \pm h) = \varphi_0(x, \pm h) = \begin{cases} [H(x+a) - H(x-a)] \varphi_+(x), & y = h \\ [H(x+b) - H(x-b)] \varphi_-(x), & y = -h \end{cases}, \quad (2.7)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа,  $H(x)$  – функция Хевисайда,  $G_{44} = \mu$  – модуль сдвига материала слоя,  $q_{\pm}(x)$  – заданные функции,  $\varphi_+(x), \varphi_-(x)$  – заданные значения электрического потенциала на электродах.

**3. Вывод определяющих уравнений.** Доопределим смешанное граничное условие (2.5) – (2.6) условиями:

$$w(x, \pm h) = \begin{cases} [H(x+a) - H(x-a)] g_+(x) \\ [H(x+b) - H(x-b)] g_-(x) \end{cases}, \quad |x| < \infty \quad (3.1)$$

где  $g_{\pm}(x)$  – неизвестные функции.

Построим решение краевой задачи (2.3)-(2.4), (2.7), (3.1). Введем, как обычно, функции

$$\begin{aligned} W(x,y) &= w(x,y) - w_N^{(\infty)}(x,y), \\ \Phi(x,y) &= \varphi(x,y) - \varphi_N^{(\infty)}(x,y), \end{aligned} \quad (x,y) \in \Omega \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.3), после преобразования Фурье приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{W}}{dy^2} - \gamma^2 \bar{W}(\sigma, y) &= 0, & |y| < h, \quad |\sigma| < \infty \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}^2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}(\sigma, y) + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{W}(\sigma, y) &= 0, & |y| < h, \quad |\sigma| < \infty \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}_0}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_0(\sigma, y) &= 0, & |y| > h, \quad |\sigma| < \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ ,  $\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$ .

Общее решение системы (3.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{W}(\sigma, y) &= A \operatorname{ch}(\gamma y) + B \operatorname{sh}(\gamma h) \\ \bar{\Phi}(\sigma, y) &= C \operatorname{ch}(\gamma y) + D \operatorname{sh}(\gamma y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{W}(\sigma, y) \\ \bar{\Phi}_0(\sigma, y) &= E e^{-|\sigma|y} + F e^{|\sigma|y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где коэффициенты  $A - F$ , подлежащие определению, – постоянные интегрирования.

При помощи (3.2) и (3.4), удовлетворяя граничным условиям (2.7) и (3.1), для решения краевой задачи (2.3), (2.7), (3.1) после некоторых несложных выкладок получаем:

$$w(x, y) = \int_{-a}^a J_+(x - \xi, y) g_+(\xi) d\xi + \int_{-b}^b J_-(x - \xi, y) g_-(\xi) d\xi + w_N^{(\infty)}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.5)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(x, y) + \int_{-a}^a I_+(x - \xi, y) \varphi_+(\xi) d\xi + \int_{-b}^b I_-(x - \xi, y) \varphi_-(\xi) d\xi, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.6)$$

$$\varphi_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} g_+(\xi) + \varphi_+(\xi) \right] \frac{(y - h) d\xi}{(x - \xi)^2 + (y - h)^2}, & y > h \\ \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left[ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} g_-(\xi) + \varphi_-(\xi) \right] \frac{(y + h) d\xi}{(x - \xi)^2 + (y + h)^2}, & y < -h \end{cases} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}
J_{\pm}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh} \gamma(h \pm y)}{\text{sh}(2\gamma h)} e^{-i\sigma z} d\sigma \\
I_{\pm}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh} |\sigma|(h \pm y)}{\text{sh} 2|\sigma|h} e^{-i\sigma z} d\sigma
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\gamma = \sqrt{\sigma^2 - k^2} = \begin{cases} \sqrt{\sigma^2 - k^2}, & \sigma > k \\ i\sqrt{k^2 - \sigma^2}, & \sigma < k \end{cases} \tag{3.9}$$

Имея в виду соотношение

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{x^2 + y^2} = \pi \delta(x),$$

где  $\delta(x)$  – известная дельта-функция Дирака, нетрудно убедиться, что решения (3.5)-(3.7) удовлетворяют граничным условиям (2.7), (3.1) и, тем самым, условию (2.5).

В тех случаях, когда функции  $g_{\pm}(x)$  считаются заданными, волновое поле можно вычислить непосредственно при помощи (3.5).

Для определения  $g_{\pm}(x)$  обратимся к граничному условию (2.6), которое представим в виде

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm 0} = q_{\pm}(x), \quad \begin{cases} |x| < a, & y = h \\ |x| < b, & y = -h \end{cases} \tag{3.10}$$

Подставляя сюда выражения  $w(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  из (3.5) и (3.6), после несложных выкладок для определения неизвестных  $g_{\pm}(x)$  придем к системе интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{cases} \int_{-a}^a K_{11}(x-t) g_+(t) dt - \int_{-b}^b K_{12}(x-t) g_-(t) dt = R_1(x), & |x| < a, \\ \int_{-a}^a K_{21}(x-t) g_+(t) dt - \int_{-b}^b K_{22}(x-t) g_-(t) dt = R_2(x), & |x| < b, \end{cases} \tag{3.11}$$

где

$$K_{11}(z) = K_{22}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma(\sigma) \operatorname{cth}(2h\gamma) \cos(\sigma z) d\sigma \quad (3.12)$$

$$K_{21}(z) = K_{12}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma(\sigma)}{\operatorname{sh}(2h\gamma)} \cos(\sigma z) d\sigma$$

$$R_1(x) = \int_{-a}^a \Lambda_{11}(x-t) \varphi_+(t) dt - \int_{-b}^b \Lambda_{12}(x-t) \varphi_-(t) dt + M_{11} q_+(x) - f_N(x)$$

$$R_2(x) = \int_{-a}^a \Lambda_{21}(x-t) \varphi_+(t) dt - \int_{-b}^b \Lambda_{22}(x-t) \varphi_-(t) dt + M_{22} q_-(x) - (-1)^N f_N(x) \quad (3.13)$$

$$\Lambda_{11}(z) = \Lambda_{22}(z) = \frac{\Lambda_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma \operatorname{cth}(2|\sigma|h) \cos(\sigma z) d\sigma \quad (3.14)$$

$$\Lambda_{21}(z) = \Lambda_{12}(z) = \frac{\Lambda_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma \cos(\sigma z)}{\operatorname{sh}(2h\sigma)} d\sigma.$$

$$f_N(x) = C_N \lambda_N e^{i\lambda_N x}, \quad M_{11} = M_{22} = \frac{1}{1+k_{15}^2}, \quad (3.15)$$

$$\Lambda_0 = \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}} \frac{k_{15}^2}{1+k_{15}^2}; \quad k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{G_{44} \varepsilon_{11}}$$

Система интегральных уравнений (3.11) при заданных граничных функциях  $s$  и  $f_N(x)$  представляет собой определяющую систему уравнений поставленной задачи. Полученные из (3.11) решения  $g_{\pm}(x)$  совместно с выражениями (3.5) - (3.7) дают окончательное решение задачи, т.е. распределение электроупругого поля в рассматриваемых областях.

Ядра (3.12) и свободные члены (3.13) системы интегральных уравнений (3.11) представляются при помощи несобственных интегралов, в структурах которых фигурирует и ветвящаяся функция  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ . Вопросы, связанные с вычислением или оценкой этих интегралов и исходя из этого определения рода и структуры ее решения, будут рассмотрены далее.

Следует отметить, что полученная определяющая система интегральных уравнений (3.11) может быть использована при другой постановке задачи, если в представлении (2.7) принять, что функции неизвестны. Для решения задачи в этой постановке следует к системе (3.11), считая в ней  $\varphi_{\pm}(x)$  неизвестными, присоединить еще два интегральных уравнения, получаемых из условий:

$$\left( \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm h} = 0, \quad \begin{cases} |x| < a, & y = h, \\ |x| < b & y = -h, \end{cases} \quad (3.16)$$

отражающих условие равенства электрических индукций на соответствующих контактных интервалах краев волновода с вакуумом.

В этом случае получим определяющую систему из четырех интегральных уравнений.

**4. Решение краевой задачи (2.3) - (2.7).** Обратимся к выражениям  $w(x, y), \varphi(x, y)$  из (3.5), (3.6), ядрам  $K_{ij}(x-t)$  из (3.12) и свободным членам (3.13). Во все эти выражения, как уже отмечалось, входят несобственные интегралы с ветвящейся функцией  $\gamma = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ .

Более эффективное представление волнового поля можно получить, если для вычисления интеграла  $J_{\pm}(z, y)$  из (3.8) применить метод интегрирования по вычетам.

Имея в виду, что подынтегральная функция  $\text{sh}[\gamma(h \pm y)]/\text{sh}(2\gamma h)$ , четная по  $\sigma$ , является целой функцией с простыми полюсами и точками ветвления  $\sigma = \pm k$ , после несложных вычислений для  $w(x, y)$  и аналогичным образом для  $\varphi(x, y)$ , придем к следующим разложениям по модам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{i\lambda_m}{2h\alpha_m} \left\{ \sin(\lambda_m(h+y)) \int_{-a}^a g_+(\xi) e^{i\alpha_m|x-\xi|} d\xi + \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m(h-y)) \int_{-b}^b g_-(\xi) e^{i\alpha_m|x-\xi|} d\xi \right\} + w_N^{(\infty)}(x, y), \quad \begin{cases} |y| < h \\ |x| < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{i}{2h} \left\{ \sin \lambda_m(h+y) \int_{-a}^a \varphi_+(\xi) e^{i\lambda_m|x-\xi|} d\xi + \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m(h-y)) \int_{-b}^b \varphi_-(\xi) e^{i\lambda_m|x-\xi|} d\xi \right\} \quad \begin{cases} |y| < h \\ |x| < \infty \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \lambda_m^2}; \quad \lambda_m = \pi m / 2h. \quad (4.3)$$

Сходимость рядов в (4.1) и (4.2) следует понимать в обобщенном смысле. Имея  $g_{\pm}(t)$  и  $\varphi_{\pm}(t)$ , по этим формулам можно вычислить электроупругое волновое поле в волноводе при  $|y| < h$  и контактные напряжения на участках  $(a < |x| < \infty; y = \pm h)$ .

Из разложений (4.1) и выражения (4.3) следует, что, если частота

меньше определенной положительной величины, которая в рассматриваемом случае равна  $\pi/2$ , то в волноводе могут существовать лишь волны, экспоненциально затухающие с расстоянием  $|x - \xi|$ . В противном случае, если волновое число достаточно велико, существует конечное число незатухающих проходящих волн.

Обратимся к ядрам (3.12) и свободным членам (3.13). Они слишком сложны, чтобы трактовать их в простом смысле, как в случае с (3.8).

Для получения более приемлемых результатов при конкретных вычислительных процедурах следует упростить их, применяя подход регуляризации расходящихся интегралов, основанный на теории обобщенных функций [5,13,14]. При помощи этих методов удалось получить следующие представления для  $K_{11}(z)$  и  $\Lambda_{11}(z)$ :

$$K_{11}(z) = K_{22}(z) = -\frac{2}{|z|^2} + k^2 [C + \ln|kz|] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (kz)^{2n}}{2n! 2n} + R(z) \quad (4.4)$$

$$K_{21}(z) = K_{12}(z) = 2 \int_0^k \frac{\sqrt{k^2 - \sigma^2} \cos(\sigma z)}{\sin(2h\sqrt{k^2 - \sigma^2})} d\sigma + 2 \int_k^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma^2 - k^2} \cos(\sigma z)}{\text{sh}(2h\sqrt{\sigma^2 - k^2})} d\sigma \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{11}(z) = -\frac{2}{|z|^2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sigma \cos(\sigma z)}{e^{3\sigma h} \text{sh}(\sigma h)} d\sigma \quad (4.6)$$

$$R(z) = -k^4 \int_k^{\infty} \frac{\cos(\sigma z) d\sigma}{\sigma [\sigma + \sqrt{\sigma^2 - k^2}]^2} - 2i \int_0^k [\sqrt{k^2 - \sigma^2} - i\sigma] \cos(\sigma z) d\sigma + \quad (4.7)$$

$$+ 2 \int_0^k \sqrt{k^2 - \sigma^2} [\text{tg}(2h\sqrt{k^2 - \sigma^2} - i)] \cos(\sigma z) d\sigma + 4 \int_k^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma^2 - k^2} \cos(\sigma z) d\sigma}{e^{4h\sqrt{\sigma^2 - k^2}} [1 - e^{2h\sqrt{\sigma^2 - k^2}}]}$$

где  $C = 0.5772\dots$  – постоянная Эйлера.

Представление (4.4) показывает, что ядра системы интегральных уравнений представляются в виде суммы гиперсингулярной, слабосингулярной (логарифмической) и регулярных частей.

Построение решения интегральных уравнений с гиперсингулярным и сингулярным ядром с выделенной особенностью в виде весовой функции ортогональных многочленов исследовано в [17, 18].

**5. Численный анализ частного случая рассматриваемой задачи**  
 $b = 0$ ,  $q_+(x) = 0$ ,  $\varphi_+(x) = 0$ . Для определения  $g_+(x)$  придем к следующему интегральному уравнению первого рода с ядром (4.4):

$$\int_{-a}^a K_{11}(x - \xi) g_+(\xi) d\xi = C_N \lambda_N e^{i\lambda_N x}, \quad |x| < a \quad (5.1)$$

при дополнительном условии

$$g_+(-a) = g_+(a) = 0. \quad (5.2)$$

Перейдем к безразмерным величинам, отнеся все линейные величины к ширине слоя-волновода  $h$  и сведем уравнение (5.1) к интервалу  $(-1, 1)$ .

Далее, разыскивая безразмерную искомую функцию  $g_+^*(\eta) = \frac{1}{a} g_+(a\eta)$  в виде

$$g_+^*(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) \quad (-1 < \eta < 1) \quad (5.3)$$

и используя результаты работ [17, 18], решение уравнения (4.6) с условиями (4.7) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно значений  $\psi(\eta_i)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) новой искомой функции  $\psi(\eta)$  в корнях многочлена Чебышева второго рода  $U_n(\eta)$ . Эта система здесь не приводится ввиду громоздкости.

После определения функции  $g_+^*(\eta)$  волновое поле  $w^{(-)}(x, y)$  в области  $(x < -a)$  и  $w^{(+)}(x, y)$  в области  $(x > a)$  можно определить по формуле

$$w^{(\pm)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(\pm)} \sin(\lambda_m(h+y)) e^{\pm i\alpha_m \frac{x}{h}} + C_N e^{i\gamma_N x} \sin \lambda_N(y-h) \quad (|x > a|), \quad (5.4)$$

где

$$A_m^{(\pm)} = (-1)^{m+1} \frac{i\lambda_m}{2\alpha_m^*} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) e^{\mp i\alpha_m^* \eta} d\eta, \quad \alpha_m^* = \sqrt{(kh)^2 - \left(\frac{\pi m}{2}\right)^2} \quad (5.5)$$

амплитуды проходящих и отраженных волн.

Из (5.5) нетрудно заметить, что, в общем случае при  $\alpha_m^* \rightarrow 0$   $\left(kh \rightarrow \frac{\pi m}{2}\right)$  амплитуды  $A_m^{(\pm)}$  будут неограниченно возрастать, что приводит к явлению резонанса. Однако если решение уравнения (5.1) удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) d\eta = 0, \quad (5.6)$$

то явление резонанса подавляется.

На рис.1, *a*) и *б*) представлены вещественные (сплошные линии) и мнимые (пунктирные линии) части  $g_+^*(\eta)$  при  $N=1$  и различных зна-

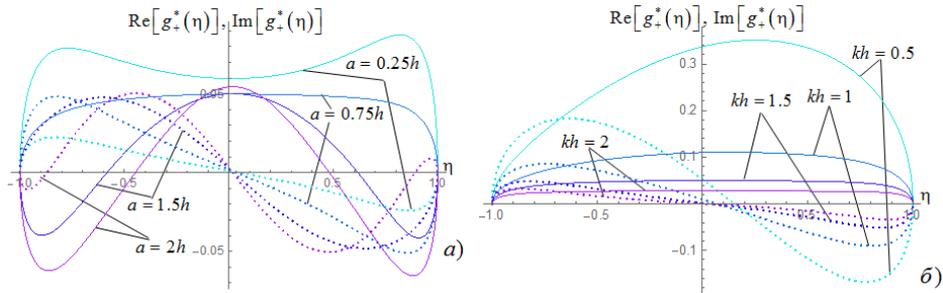


Рис. 1. Вещественные и мнимые части  $g_+^*(\eta)$  при  $N = 1$ .

чениях параметра  $a = 0.25h, 0.75h, 1.5h, 2h$  при  $kh = 1.5$  и различных значениях параметра  $kh = 0.5, 1, 1.5, 2$  при  $a = 0.75h$ .

Судя по графикам рис.1,а), выполнение условия (5.6) возможно при значениях  $a/h$ , близких к двум. Численные расчеты показали, что при  $a = 1.7869h$  интеграл в условии (5.6) принимает значение

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) d\eta = 5.36 \times 10^{-6} + 5.04 \times 10^{-4} i. \quad (5.7)$$

Похожие значения для этого интеграла имеют место и при других, больших, значениях параметра  $a$ .

Подобные расчеты при других значениях  $kh$  показали, что между  $kh$  и  $a/h$ , при котором выполняется условие (5.6), имеет место обратная зависимость. Из рис. 1,б) можно сделать вывод, что при  $a = 0.75h$  увеличение параметра  $kh$  не приводит к нулевому значению интеграла (5.6). Из сказанного следует, что существует такое значение  $a_*$ , при котором, если  $a < a_*$ , явление резонанса имеет место при любых значениях  $kh$ .

На рис. 2 представлены кривые зависимости модуля амплитуды проходящей волны при  $N = 1$  (пунктирные линии) и  $N = 2$  (сплошные линии) при разных значениях параметра  $a = h, 2h$ . Как видно из рисунка, увеличение параметра  $a$  приводит к сближению кривых, соответствующих разным значениям  $N$ . Похожая картина имеет место и для амплитуд отраженных волн  $A_m^-$ .

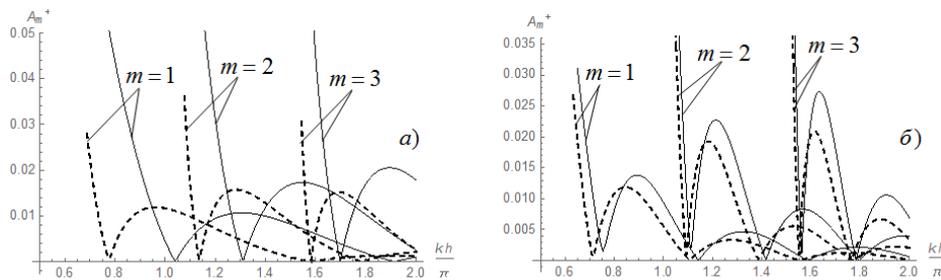


Рис. 2. Модуль амплитуды проходящей волны  $|A_m^+|$  при  $a = h$  и  $a = 2h$ .

**Заключение.** Исследованы вопросы, связанные с распространением сдвиговой электроупругой волны в пьезоэлектрическом слое-волноводе при смешанных граничных условиях на граничных поверхностях волновода. Решение задачи сведено к системе интегральных уравнений первого рода с гиперсингулярными ядрами. Получены явные выражения для амплитуд электроупругих перемещений и электрического потенциала в виде разложения по модам. По этим формулам, имея решения интегральных уравнений, можно непосредственно вычислить основные параметры, характеризующие электроупругое волновое поле в волноводе и электрическое поле в контактирующих с волноводом вакуумных полупространствах.

Для одного частного случая рассмотренной задачи проведен численный расчет. Построены графики, показывающие распределение неизвестных перемещений на участке между полубесконечными штампами для конкретных значений внешних параметров задачи. Графики, в частности, указывают на возможность отсутствия резонанса при соответствующем сочетании параметров  $N$ ,  $kh$  и  $a/h$ . Построены также графики зависимости модуля амплитуды проходящих волн от параметра  $kh$  для разных значений параметра  $a/h$ .

Институт механики НАН РА  
e-mail: karo.aghayan@gmail.com

**К. Л. Агаян**

### **Плоская сдвиговая волна в пьезоэлектрическом слое со смешанными граничными условиями**

В рамках антиплоской деформации исследуется динамическая контактная задача о направленном распространении плоских сдвиговых электроупругих волн в слое со смешанными граничными условиями. Рассматривается случай, когда на граничных плоскостях смешанными являются как механические, так и электрические условия. Решение задачи в общем случае сводится к системе из четырех интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами. Получены явные выражения волновых функций, представляющих поле электроупругих перемещений в

волноводе и электрическое поле в контактирующих с волноводом вакуумных полупространствах.

**Կ. Լ. Աղայան**

**Մահքի հարթ ալիքը խառը եզրային պայմաններով  
պիեզոէլեկտրական շերտում**

Հակահարթ դեֆորմացիայի շրջանակներում հետազոտվում է դինամիկ կոնտակտային խնդիր խառը եզրային պայմաններով շերտում հարթ էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքի տարածման վերաբերյալ: Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ սալի եզրային մակերևույթների վրա խզվում են ինչպես մեխանիկական, այնպես էլ էլեկտրական պայմանները: Ընդհանուր դեպքում խնդրի լուծումը բերվում է հիպերսինգուլյար կորիզով չորս ինտեգրալ հավասարումներից կազմված համակարգի: Ստացվել են բացահայտ արտահայտություններ շերտի էլեկտրաառաձգական տեղափոխությունների և ալիքատարի հետ փոխազդող վակուումային կիսատարածություններում էլեկտրական դաշտը ներկայացնող ալիքային ֆունկցիաների համար:

**K. L. Aghayan**

**Plane Shear Wave in a Piezoelectric Layer with  
Mixed Boundary Conditions**

Within the framework of antiplane deformation, the dynamic contact problem of the directed propagation of plane shear electroelastic waves in a layer with mixed boundary conditions is studied. The case is considered when both mechanical and electrical conditions are mixed on the boundary planes. The solution of the problem, in the general case, is reduced to a system of four integral equations with hypersingular kernels. Explicit expressions are obtained for the wave functions representing the field of electroelastic displacements in the waveguide and the electric field in the vacuum half-spaces in contact with the waveguide.

**Литература**

1. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. М. Мир. 1962. 297 с.
2. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М. Мир. 1974. 327 с.
3. *Балакирев М. К., Гихинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск. Наука. 1982. 240 с.
4. *Бардзокас Д. И., Кудравцев Б. А., Сенник Н. А.* Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М. Эдиториал УРСС. 2003. 336 с.
5. *Сумбатьян М. А., Скалия А.* Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М. Физматлит. 2013. 328 с.
6. *Мелешко В. В., Бондаренко А. А. и др.* – Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.5 1. № 2, с. 86-104; №4, с. 163-180.
7. *Григорян Э. Х., Агаян К. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60 № 3. С. 23-28.

8. *Агаян К. Л.* – Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 1. С. 13-18.
9. *Piliposyan D. G., Ghazaryan R. A., Ghazaryan K. B.* – Proc. of NAS RA. Mechanics. 2014. V. 67. № 3. P. 40-48.
10. *Avetisyan A. S., Hunanyan A. A.* – Proc. of NAS RA. Mechanics. 2017. V. 70. № 2. P. 28-42.
11. *Агаян К. Л.* В кн.: Тр. X Междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван. С. 19-23.
12. *Саакян С. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика 2019, Т. 72. № 2. С. 48-56. <http://doi.org/10.33018/72.2.4>.
13. *Агаян К. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т. 73. № 2. С. 22-34. <http://doi.org/10.33018/73.2.2>.
14. –*А. С., Саакян С. Л.* – Доклады НАН РА. 2023. Т. 123. № 1. С. 12-20.
15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 1. М. Физматгиз. 1958. 440 с.
16. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М. Наука. 1977. 287 с.
17. *Amirjanyan H. A., Sahakyan A. V., Kukudzhanov A. K.* – J. Phys. 2022. Conf. Ser. **2231** 012020. <https://doi:10.1088/1742-6596/2231/1/012020>.
18. *Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A.* In: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H. Altenbach, S. Mkhitaryan, V. Hakobyan, A. Sahakyan. 2023. P. 285-298. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_21).