

The work is represented in the data on the physical and chemical contaminants and pursuit of living organisms, including those on negative impacts on human health.

О РЕШЕНИИ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

А.М. Хачатрян, А.Б. Товмасян, Г.А. Петросян

Обсуждается вопрос построения решения типа пограничного слоя для прямоугольной ортотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы однородные значения компонентов тензора напряжения, а на нижней лицевой плоскости - смешанные однородные условия. С помощью асимптотического метода построено решение типа пограничного слоя, определены собственные числа, характеризующие скорости затухания найденных решений.

Классические краевые задачи для изотропных пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2]. Классические и неклассические краевые задачи для анизотропных однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек тем же методом решены в [3,4]. Напряженно-деформированное состояние пластин с общей анизотропией исследовано в [5]. Внутреннее решение для смешанных краевых задач для анизотропной пластинки асимптотическим методом построены в [6, 7].

1. Требуется найти решение типа пограничного слоя смешанной краевой задачи для анизотропной прямоугольной пластинки в области $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, |z| \leq h, h \ll a\}$, на лицевых плоскостях которой заданы следующие однородные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, w = 0 & \quad \text{при } z = -h \\ \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_z = 0 & \quad \text{при } z = h. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для построения решения типа пограничного слоя вблизи края $x = 0$ в трехмерных уравнениях теории упругости анизотропного тела [8,9] вводятся безразмерные координаты $t = x/h, \eta = y/l, \zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U = u/l, V = v/l, W = w/l$, в результате чего получаем сингулярно возмущенную систему уравнений относительно малого геометрического параметра $\varepsilon = h/l$, где $l = \max(a, b)$. Эту систему уравнений удобно решать асимптотическим методом интегрирования [3-6].

Решение полученных уравнений отыскивается в виде функций типа погранслоя [3,4]

$$R_p = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\chi_p + s} R_p^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda t) \quad (1.2)$$

где R_p любое из напряжений и перемещений, при этом $\text{Re } \lambda > 0$.

Непротиворечивые значения для χ_p подбираются следующим образом

$$\chi_{\sigma_i} = \chi, \quad \chi_{u_i} = \chi + 1, \quad (1.3)$$

где χ произвольное число, которое определится из условия взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием, λ характеризует изменяемость напряжений и перемещений погранслоя.

Подставляя (1.2), с учетом (1.3), в преобразованные уравнения теории упругости и, выразив все неизвестные величины пограничного слоя через напряжения $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$, получим известные формулы[3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + R_x^{(s-1)}, \quad \sigma_{xyp}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{xy}^{(s-1)}, \quad \sigma_{xzp}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{xz}^{(s-1)}, \\ \sigma_{yp}^{(s)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left(\frac{a_{12}}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a_{25}}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{a_{26}}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{23} \sigma_{zp}^{(s)} + a_{24} \sigma_{yzp}^{(s)} \right) + R_y^{(s-1)}, \\ u_p^{(s)} &= -\frac{A_{11}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{15}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{16}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{13}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(s)} - \frac{A_{14}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(s)} + R_u^{(s-1)}, \\ v_p^{(s)} &= -\frac{A_{16}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{A_{56}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{66}}{\lambda^2} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{36}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(s)} - \frac{A_{46}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(s)} + R_v^{(s-1)}, \\ w_p^{(s)} &= -\frac{A_{11}}{\lambda^4} \frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^3} - \frac{A_{16}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\lambda^2} (A_{13} + A_{55}) \frac{\partial \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{2A_{15}}{\lambda^3} \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2} (A_{14} + A_{56}) \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{35}}{\lambda} \sigma_{zp}^{(s)} - \frac{A_{45}}{\lambda} \sigma_{yzp}^{(s)} + R_w^{(s-1)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где использованы следующие обозначения[3]

$$A_{ij} = (a_{22} a_{ij} - a_{2i} a_{2j}) a_{22}^{-1}, \quad (i, j = 1, 3, 4, 5, 6), \quad (1.5)$$

$R_k^{(s)}$ также известные величины и определяются по следующим рекуррентным формулам[3]:

$$\begin{aligned} R_x^{(s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{xyp}^{(s)}}{\partial \eta}, \quad R_{xy}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yp}^{(s)}}{\partial \eta}, \quad R_{xz}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(s)}}{\partial \eta}, \\ R_y^{(s)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(a_{12} R_x^{(s)} + a_{25} R_{xz}^{(s)} + a_{26} R_{xy}^{(s)} - \frac{\partial v_p^{(s)}}{\partial \eta} \right), \\ R_u^{(s)} &= \frac{1}{\lambda} (a_{11} R_x^{(s)} + a_{12} R_y^{(s)} + a_{15} R_{xz}^{(s)} + a_{16} R_{xy}^{(s)}), \\ R_v^{(s)} &= \frac{1}{\lambda} \left(a_{16} R_x^{(s)} + a_{26} R_y^{(s)} + a_{56} R_{xz}^{(s)} + a_{66} R_{xy}^{(s)} - \frac{\partial u_p^{(s)}}{\partial \eta} \right), \\ R_w^{(s)} &= \frac{1}{\lambda} \left(a_{15} R_x^{(s)} + a_{25} R_y^{(s)} + a_{55} R_{xz}^{(s)} + a_{56} R_{xy}^{(s)} + \frac{\partial R_u^{(s)}}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Удовлетворив условиям (1.1), для определения неизвестных функций $\sigma_{yzp}^{(s)}$ и $\sigma_{zp}^{(s)}$ получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_1 \sigma_{zp}^{(s)} + L_2 \sigma_{yzp}^{(s)} &= R_1^{(s-1)}, \\ L_2 \sigma_{zp}^{(s)} + L_3 \sigma_{yzp}^{(s)} &= R_2^{(s-1)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь L_i дифференциальные операторы, а $R_1^{(s-1)}, R_2^{(s-1)}$ обобщенные нагрузки:

$$\begin{aligned}
L_1 &= A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 2A_{15} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{35} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{33} \lambda^4, \\
L_2 &= A_{16} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (A_{14} + A_{56}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (A_{36} + A_{45}) \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{34} \lambda^4, \\
L_3 &= A_{66} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{46} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{44} \lambda^4, \\
R_1^{(s-1)} &= - \left(\frac{\partial R_w^{(s-1)}}{\partial \zeta} + a_{13} R_x^{(s-1)} + a_{23} R_y^{(s-1)} + a_{35} R_{xz}^{(s-1)} + a_{36} R_{xy}^{(s-1)} \right) \lambda^4, \\
R_2^{(s-1)} &= - \left(\frac{\partial R_v^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_p^{(s-1)}}{\partial \eta} + a_{14} R_x^{(s-1)} + a_{24} R_y^{(s-1)} + a_{45} R_{xz}^{(s-1)} + a_{46} R_{xy}^{(s-1)} \right) \lambda^4.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Нужно учесть, что $R_i^{(s-k)} \equiv 0$, при $s < k$.

При $s = 0$ уравнения (1.7) становятся однородными.

В дальнейшем подробно рассмотрена задача для ортотропных материалов.

2. Для ортотропных материалов имеем

$$a_{1i} = a_{2i} = a_{3i} = 0, \quad (i = 4, 5, 6), \quad a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0.$$

В связи с чем, упругие коэффициенты A_{ij} упрощаются,

$$\begin{aligned}
A_{ii} &= a_{ii}, \quad A_{1i} = A_{2i} = A_{3i} = 0 \quad (i = 4, 5, 6), \quad A_{46} = A_{56} = A_{23} = A_{45} = A_{34} = 0, \\
A_{11} &= \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{a_{22}}, \quad A_{13} = \frac{a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{22}}, \quad A_{33} = \frac{a_{22} a_{33} - a_{23}^2}{a_{22}}.
\end{aligned}$$

в результате оператор $L_2 \equiv 0$, а система уравнений (1.7) распадается на два самостоятельные уравнения, которым соответствуют решения типа плоского и антиплоского погранслоев [3-5]. При этом, поверхностные условия (1.1) и решение (1.4) также распадаются на две группы.

Построим решение типа пограничного слоя соответствующее приближению $s = 0$.

Плоский пограничный слой

$$L_1 \sigma_{zp}^{(0)} = 0, \quad \text{или} \quad A_{11} \frac{\partial^4 \sigma_{zp}^{(0)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{13} + a_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{33} \lambda^4 = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}(\zeta = -1) &= 0, \quad w(\zeta = -1) = 0, \\
\sigma_{xz}(\zeta = 1) &= 0, \quad \sigma_z(\zeta = 1) = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Для решения этой задачи необходимо рассматривать соответственное характеристическое уравнение

$$A_{11} r^4 + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 r^2 + A_{33} \lambda^4 = 0 \tag{2.3}$$

Это уравнение может иметь корни трех типов в зависимости от значения $D = (2A_{13} + A_{55})^2 - 4A_{11}A_{33}$ [3,9].

а) Корни уравнения (2.3) мнимые и отличны друг от друга ($D > 0$)

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \pm i q_1 \lambda, \quad r_{3,4} = \pm i q_2 \lambda \\
q_{1,2}^2 &= \frac{2A_{13} + A_{55} \pm \sqrt{D}}{2A_{11}}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Корням (2.4), при $s = 0$ соответствует следующее решение уравнения (2.1)

$$\sigma_{zp}^{(0)} = C_1^{(0)} \cos q_1 \lambda \zeta + C_2^{(0)} \sin q_1 \lambda \zeta + C_3^{(0)} \cos q_2 \lambda \zeta + C_4^{(0)} \sin q_2 \lambda \zeta \tag{2.5}$$

Решение (2.5) должно удовлетворить условиям (2.2). В результате получим систему однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных интегрирования. Поскольку система имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю, то приравняв определитель этой системы к нулю, для определения значения λ получим уравнение:

$$m \sin z + \sin mz = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{где } z = 2(q_1 + q_2)\lambda_n, \quad m = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}.$$

В этом случае величины плоского погранслоя определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{zpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{q_2}{q_1} \sin q_2 \lambda_n \cos q_1 \lambda_n \zeta + \sin q_1 \lambda_n \cos q_2 \lambda_n \zeta \right) A_n(\lambda_n) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_2}{q_1} \cos q_2 \lambda_n \sin q_1 \lambda_n \zeta + \cos q_1 \lambda_n \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \frac{C_n^{(0)}}{\cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(q_1 \sin q_2 \lambda_n \cos q_1 \lambda_n \zeta - q_2 \sin q_1 \lambda_n \cos q_2 \lambda_n \zeta) A_n(\lambda_n) - \right. \\ &\quad \left. - q_1 \cos q_2 \lambda_n \sin q_1 \lambda_n \zeta - q_2 \cos q_1 \lambda_n \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \frac{q_2 C_n^{(0)}}{\cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\sin q_2 \lambda_n \sin q_1 \lambda_n \zeta - \sin q_1 \lambda_n \sin q_2 \lambda_n \zeta) A_n(\lambda_n) + \right. \\ &\quad \left. + \cos q_2 \lambda_n \cos q_1 \lambda_n \zeta + \cos q_1 \lambda_n \cos q_2 \lambda_n \zeta \right] \frac{q_2 C_n^{(0)}}{\cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{ypp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-a_1 \frac{q_2}{q_1} \sin q_2 \lambda_n \cos q_1 \lambda_n \zeta + a_2 \sin q_1 \lambda_n \cos q_2 \lambda_n \zeta \right) A_n(\lambda_n) + \right. \\ &\quad \left. + a_1 \frac{q_2}{q_1} \cos q_2 \lambda_n \sin q_1 \lambda_n \zeta + a_2 \cos q_1 \lambda_n \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \frac{C_n^{(0)}}{a_{22} \cos q_1 \lambda_n} \\ u_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-A_1 \frac{q_2}{q_1} \sin q_2 \lambda_n \cos q_1 \lambda_n \zeta + A_2 \sin q_1 \lambda_n \cos q_2 \lambda_n \zeta \right) A_n(\lambda_n) + \right. \\ &\quad \left. + A_1 \frac{q_2}{q_1} \cos q_2 \lambda_n \sin q_1 \lambda_n \zeta + A_2 \cos q_1 \lambda_n \sin q_2 \lambda_n \zeta \right] \frac{C_n^{(0)}}{\lambda_n \cos q_1 \lambda_n} \\ w_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_3 \sin q_2 \lambda_n \sin q_1 \lambda_n \zeta - A_4 \sin q_1 \lambda_n \sin q_2 \lambda_n \zeta) A_n(\lambda_n) + \right. \\ &\quad \left. - A_3 \cos q_2 \lambda_n \cos q_1 \lambda_n \zeta - A_4 \cos q_1 \lambda_n \cos q_2 \lambda_n \zeta \right] \frac{q_2 C_n^{(0)}}{\lambda_n \cos q_1 \lambda_n} \\ \sigma_{yzpp}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{xyp}^{(0)} = 0, \quad v_{pp}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{12} q_1^2 - a_{23}, \quad A_1 = A_{11} q_1^2 - A_{13}, \quad A_3 = A_{11} q_1^2 - A_{13} - A_{55}, \quad A_n(\lambda_n) = \frac{q_1 \operatorname{tg} q_2 \lambda_n - q_2 \operatorname{tg} q_1 \lambda_n}{q_2 \operatorname{tg} q_2 \lambda_n - q_1 \operatorname{tg} q_1 \lambda_n} \\ a_2 &= a_{12} q_2^2 - a_{23}, \quad A_2 = A_{11} q_2^2 - A_{13}, \quad A_4 = A_{11} q_2^2 - A_{13} - A_{55}. \end{aligned}$$

Здесь, и в дальнейшем, $C_n^{(0)}$ неизвестные постоянные, через которые выражаются остальные постоянные интегрирования, и они будут определены при удовлетворении торцевым условием.

б) Корни характеристического уравнения (2.3) мнимые и кратные($D = 0$)

$$r = \pm iq\lambda . \quad (2.8)$$

$$q^2 = \frac{2A_{13} + A_{55}}{2A_{11}}$$

Этим корням соответствует следующее решение:

$$\sigma_{zp}^{(0)} = (C_1^{(0)} + C_2^{(0)}\zeta)\cos\lambda q_3\zeta + (C_3^{(0)} + C_4^{(0)}\zeta)\sin\lambda q_3\zeta \quad (2.9)$$

Для величин плоского погранслоя будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{zpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} \left[\frac{\sin q\lambda_n + q\lambda_n \cos q\lambda_n}{q\lambda_n \sin q\lambda_n} \cos q\lambda_n \zeta - \frac{\cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \zeta \cos q\lambda_n \zeta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos q\lambda_n - q\lambda_n \sin q\lambda_n}{q\lambda_n \sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \sin q\lambda_n \zeta + \zeta \sin q\lambda_n \zeta \right] \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} q \left[\frac{\sin q\lambda_n - q\lambda_n \cos q\lambda_n}{\lambda_n \sin q\lambda_n} \cos q\lambda_n \zeta + \frac{q \cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \zeta \cos q\lambda_n \zeta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos q\lambda_n + q\lambda_n \sin q\lambda_n}{\lambda_n \sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \sin q\lambda_n \zeta - q\zeta \sin q\lambda_n \zeta \right] \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} q \left[-B_n(\lambda_n) \cos q\lambda_n \zeta + \zeta \cos q\lambda_n \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} \sin q\lambda_n \zeta + \frac{\cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \zeta \sin q\lambda_n \zeta \right] \\ \sigma_{ypp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{a_{22}} \left[-\left(\frac{b_1}{q\lambda_n} - \frac{b_2 \cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} \right) \cos q\lambda_n \zeta - \frac{b_2 \cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \zeta \cos q\lambda_n \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b_1 \cos q\lambda_n}{q\lambda_n \sin q\lambda_n} + b_2 \right) B_n(\lambda_n) \sin q\lambda_n \zeta + b_2 \zeta \sin q\lambda_n \zeta \right] \\ u_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\lambda_n} \left[-\left(\frac{B_1}{q\lambda_n} - \frac{B_2 \cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} \right) \cos q\lambda_n \zeta - \frac{B_2 \cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \zeta \cos q\lambda_n \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{B_1 \cos q\lambda_n}{q\lambda_n \sin q\lambda_n} + B_2 \right) B_n(\lambda_n) \sin q\lambda_n \zeta + B_2 \zeta \sin q\lambda_n \zeta \right] \\ w_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\lambda_n^2} \left[-\left(q\lambda_n B_3 + 2A_{11}q^2 \frac{\cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} \right) B_n(\lambda_n) \cos q\lambda_n \zeta + q\lambda_n B_3 \zeta \cos q\lambda_n \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(q\lambda_n B_3 \frac{\cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} - 2A_{11}q^2 \right) \sin q\lambda_n \zeta + q\lambda_n B_3 \frac{\cos q\lambda_n}{\sin q\lambda_n} B_n(\lambda_n) \zeta \sin q\lambda_n \zeta \right] \\ \sigma_{yzpa}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{xypa}^{(0)} = 0, \quad v_{pa}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{12}q^2 + a_{23}, \quad B_1 = A_{11}q^2 + A_{13}, \quad B_3 = A_{11}q^2 - A_{13} - A_{55} \\ b_2 &= a_{12}q^2 - a_{23}, \quad B_2 = A_{11}q^2 - A_{13}, \quad B_n(\lambda_n) = \frac{2q\lambda_n + \sin 2q\lambda_n}{2q\lambda_n - \sin 2q\lambda_n} \end{aligned}$$

а λ_n корень трансцендентного уравнения

$$\sin 4q\lambda + 4q\lambda = 0, \quad (2.11)$$

в) Корни уравнения (2.3) комплексно-сопряженные ($D < 0$)

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= (p \pm iq)\lambda, \quad r_{3,4} = (-p \pm iq)\lambda \\ p^2 &= (2\sqrt{A_{11}A_{33}} + A_{55} + 2A_{13})/(4A_{11}) \\ q^2 &= (2\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{55} - 2A_{13})/(4A_{11}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение задачи (2.5)-(2.6) представится в виде:

$$\sigma_{zp}^{(0)} = C_1^{(0)} \varphi_1 + C_2^{(0)} \varphi_2 + C_4^{(0)} \varphi_4 + C_4^{(0)} \varphi_4, \quad (2.13)$$

где $\varphi_1 = chp\lambda\zeta \cos q\lambda\zeta$, $\varphi_1 = shp\lambda\zeta \sin q\lambda\zeta$, $\varphi_1 = chp\lambda\zeta \sin q\lambda\zeta$, $\varphi_1 = shp\lambda\zeta \cos q\lambda\zeta$,

где собственные числа λ_n определяются из следующего трансцендентного уравнения

$$m \sin z + shmz = 0, \quad (2.14)$$

где $z = 4q\lambda$, $m = p/q$.

а все величины плоского погранслоя определяются аналогичным образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{zpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{p\psi_2 + q\psi_1} [((p\psi_3 + q\psi_4)\varphi_1 - (p\psi_4 - q\psi_3)\varphi_2)C_n(\lambda_n) - \\ &\quad - (p\psi_1 - q\psi_2)\varphi_3 + (p\psi_2 + q\psi_1)\varphi_4] \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}(p^2 + q^2)}{p\psi_2 + q\psi_1} [((p\psi_3 - q\psi_4)\varphi_1 - (p\psi_4 + q\psi_3)\varphi_2)C_n(\lambda_n) - \\ &\quad - (p\psi_1 + q\psi_2)\varphi_3 + (p\psi_2 - q\psi_1)\varphi_4] \\ \sigma_{xpp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}(p^2 + q^2)}{p\psi_2 + q\psi_1} [(\psi_3\varphi_4 - \psi_4\varphi_3)C_n(\lambda_n) - \psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1] \\ \sigma_{ypp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{a_{22}(p\psi_2 + q\psi_1)} [(-(c_1\psi_3 - c_2\psi_4)\varphi_1 + (c_1\psi_4 + c_2\psi_3)\varphi_2)C_n(\lambda_n) + \\ &\quad + (c_1\psi_1 + c_2\psi_2)\varphi_3 - (c_1\psi_2 - c_2\psi_1)\varphi_4] \\ u_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{\lambda_n(p\psi_2 + q\psi_1)} [(-(C_1\psi_3 - C_2\psi_4)\varphi_1 + (C_1\psi_4 + C_2\psi_3)\varphi_2)C_n(\lambda_n) + \\ &\quad + (C_1\psi_1 + C_2\psi_2)\varphi_3 - (C_1\psi_2 - C_2\psi_1)\varphi_4] \\ w_{pp}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}(p^2 + q^2)}{\lambda_n(p\psi_2 + q\psi_1)} [(-(C_3\psi_3 - 2A_{11}pq\psi_4)\varphi_4 + (C_3\psi_4 + 2A_{11}pq\psi_3)\varphi_3)C_n(\lambda_n) + \\ &\quad + (C_3\psi_1 + 2A_{11}pq\psi_2)\varphi_2 - (C_3\psi_2 - 2A_{11}pq\psi_1)\varphi_1] \\ \sigma_{yzpa}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{хура}^{(0)} = 0, \quad v_{pa}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_1 &= p(a_{12}(p^2 + q^2) + a_{23}), \quad C_1 = p(A_{11}(p^2 + q^2) + A_{13}), \quad C_3 = A_{11}(p^2 - q^2) + A_{13} + A_{55}, \\ c_2 &= q(a_{12}(p^2 + q^2) - a_{23}), \quad C_2 = q(A_{11}(p^2 + q^2) - A_{13}), \quad C_n(\lambda_n) = \frac{p \sin 2q\lambda_n - qsh2p\lambda_n}{p \sin 2q\lambda_n + qsh2p\lambda_n} \end{aligned}$$

Антиплоский пограничный слой

$$L_3 \sigma_{yzp}^{(0)} = 0 \quad \text{или} \quad a_{66} \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \lambda^2 = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma_{yz}(\zeta = -1) = 0, \quad \sigma_{yz}(\zeta = 1) = 0. \quad (2.17)$$

Общее решение уравнения (2.16) представится в виде

$$\sigma_{yzp}^{(0)} = C_1 \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + C_2 \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta. \quad (2.18)$$

Решением (2.18) удовлетворив условиям (2.17) получим систему однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных интегрирования. Приравнявая определитель этой системы к нулю, получим уравнение, позволяющее определить значения λ :

$$\sin 2\lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0 \\ \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Если λ_n корень уравнения $\cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0$, то есть

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad (2.20)$$

то величины антиплоского погранслоя определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{yzpa}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} \sin \frac{\pi}{2} (2n-1) \zeta, \\ \sigma_{хурра}^{(0)} &= \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} \cos \frac{\pi}{2} (2n-1) \zeta, \\ v_{pa}^{(0)} &= \frac{2a_{44}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{2n-1} \cos \frac{\pi}{2} (2n-1) \zeta, \\ \sigma_{zpa}^{(0)} &= \sigma_{хра}^{(0)} = \sigma_{хзра}^{(0)} = \sigma_{ура}^{(0)} = u_{pa}^{(0)} = w_{pa}^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

Если же λ_n корень уравнения $\sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0$, то есть

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \pi, \quad (2.22)$$

то для определения неизвестных величин получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{yzpa}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} \cos \pi \zeta, \\ \sigma_{хурра}^{(0)} &= -\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(0)} \sin \pi \zeta, \\ v_{pa}^{(0)} &= -\frac{a_{44}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(0)}}{n} \sin \pi \zeta, \\ \sigma_{zpa}^{(0)} &= \sigma_{хра}^{(0)} = \sigma_{хзра}^{(0)} = \sigma_{ура}^{(0)} = u_{pa}^{(0)} = w_{pa}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Уравнения, входящие в систему (1.7) при $s \geq 1$ становятся неоднородными и они должны быть решены при двух различных вариантах. В первом варианте λ есть корень трансцендентного уравнения (2.6), (2.11) или (2.14) плоского погранслоя. Во втором варианте λ соответствует антиплоскому погранслою и совпадает с (2.21) или же с (2.22). Решения уравнений, входящие в систему (1.7) в каждом варианте запишутся в виде[3]

$$Q_p^{(s)} = Q_{0p}^{(s)} + Q_{*p}^{(s)}, \quad (p, a) \quad (2.24)$$

где $Q_0^{(s)}$ является решением однородной системы, а $Q_*^{(s)}$ частное решение неоднородной системы. Решения однородных систем плоского погранслоя первого варианта и антиплоского погранслоя второго варианта будут тождественно удовлетворять граничным условиям (1.1), в силу неизменности структуры решения однородной задачи для каждого s и удовлетворения этих условий при $s = 0$.

Аналогичным образом можно построить решения типа пограничного слоя вблизи торцов $x = a$ и $y = 0, b$.

Решение пространственной краевой задачи есть сумма внутренней задачи и пограничных слоев

$$J = Q_{\text{вн}} + Q_p + Q_a, \quad (2.25)$$

где $Q_{\text{вн}}, Q_p, Q_a$ соответственно решение внутренней задачи, интегралы плоского и антиплоского погранслоев.

Представление (2.25) содержит достаточное количество неизвестных констант, позволяющие удовлетворить торцевым условиям.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости//ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 415с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468с.
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К вопросу определения напряженно-деформированного состояния пластинок с общей анизотропией// В сб.: "XI Всес. конф. по теории оболочек и пластин". Тезисы докладов. М.: 1977. с. 5.
6. Агаловян Л.А., Товмасын А.Б. Асимптотическое решение смешанной трехмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки//Изв. АН Армении. Механика. 1993. N3-4. С. 3-11.
7. Петросян Г.А., Хачатрян А. М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки//Изв. НАН РА. Механика. 2009. т.62. N4.
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1967. 268с.
9. Лехницкий С.Г. Теории упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416с.

Անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի սահմանային
շերտի տիպի լուծումների մասին

Ա.Մ.Խաչատրյան, Ա.Բ.Թովմատյան, Գ.Ա.Պետրոսյան

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է անիզոտրոպ սալի մի խառը եզրային խնդրի սահմանային շերտի տիպի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի նկարագրմանն ու վերլուծությանը: Սահմանային շերտի տիպի լուծումը բերվում է սնվական արժեքների և սնվական ֆունկցիաների որոշման խնդրի:

Օրթոտրոպ նյութերի դեպքում սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակի հավասարումները տրոհվում են երկու հավասարումների համակարգերի, որոնք նկարագրում են հարթ և հակահարթ սահմանային շերտի տիպի լարվածային վիճակները:

Ստացված են ռեկուրենտ բանաձևեր սահմանային շերտի տիպի լուծման բոլոր լարումների և տեղափոխությունների որոշման համար:

About boundary layer type solution of mixed boundary
layer problem of anisotropic plate

The asymptotic method of integration is applied and the boundary layer type solution is constructed for anisotropic plate, on the surface of which are given mixed homogeneous conditions of the theory of elasticity.

The values of stresses and displacements of the boundary layer for an orthotropic plate are determined. The eigenvalues characterizing the rate of damping of solution are received.

ԱՐՅԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵԼԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ АРЦАХСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

1(25) 2012

УДК. 621.1.016.4+

Энергетика

К ВОПРОСУ УЧЕТА И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Р.С.Бабаян, С.А.Григорян

Учет электрической энергии и потери в элементах энергосистемы всегда были в центре внимания специалистов энергетической системы. Однако сложно было осуществлять контроль за процессами, происходящими в системе. Помеха заключалась в том, что необходим был сбор показаний многочисленных счетчиков в каждой квартире, в связи с чем, содержали огромное количество людей для сбора и обработки полученной информации. К тому же, установленные механические счетчики имели низкую точность, и не было возможности передавать информацию по каналу связи. Устройства и принцип работы механических счетчиков приводится в [1].

Развитие микроэлектроники и микроконтролерной системы наметило качественный переворот в области создания промышленных и бытовых систем контроля и управления. Тенденция к такому переходу обусловлена, с одной стороны, снижением цен на микроэлектронные изделия и с расширением их ассортимента, с другой стороны, теми преимуществами, которыми обладают цифровые системы управления по сравнению с их существующими аналогами. Преимущество счетчика электрической энергии - очевидное преимущество, связанное с переходом на микроконтролерное управление. В цифровых счетчиках электрической энергии практически можно достичь любого класса точности, при условии выбора соответствующей элементной базы.

Отсутствие механически трущихся частей значительно повышает надежность и долговечность устройства.

Обработка аналогового сигнала в цифровом виде позволяет одновременно определять активную и реактивную составляющую мощности. Автоматические системы, работающие с цифровой информацией, рассматриваются в [2,3]

Активная энергия за один период определяется по общеизвестной формуле

$$w = \int_0^T P(t) \cdot dt \text{ [Дж]}$$

где

$P(t)$ - мгновенная активная мощность Вт

T - время (период) за которое производятся замеры.

В цифровой СЭ появляется возможность создания многофункциональных счетчиков, в которых проинтегрируется мгновенное значение энергии, а выбор тарифов может осуществляться автоматически в зависимости от условий. Такие счетчики могут быть организованы в единой сети с централизованным доступом.

Показания всех счетчиков могут по внешнему интерфейсу и модему входить на телефонную линию и поступать в диспетчерский пункт.

Таким образом, диспетчер или контролирующий персонал может в любое время смотреть и анализировать состояние электросети. При более сложной системе это может выполнить микропроцессор и сообщить о неполадках в учете.