1(25) 2012

УДК: 517.9 *Математика*

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Г. Саакян

Теоремы сравнения играют значительную роль в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Их, как правило, применяют для выяснения свойств решений тех уравнений и систем, которые не интегрируются в квадратурах, путем их сравнения с уравнениями и системами с постоянными коэффициентами, решения которых определяются аналитически. Наиболее известной в этом смысле является теорема сравнения, доказанная для линейных однородных уравнений второго порядка, сыгравшая немаловажную роль в построении теории Штурма для подобных уравнений и в исследовании спектральных свойств задачи Штурма-Лиувилля ([1], [2]). Известны теоремы сравнения и для линейных однородных систем второго порядка (см., например, [2], [3]). В настоящей работе доказывается теорема, позволяющая сравнить такие системы с помощью определенной функции, характеризующей поведение нулей компонент решений. Обьектом исследования является система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = q(t)y_1, \end{cases} \tag{1}$$

в предположении, что функции $p(t)$ и $r(r)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Примем

$$y_1(t) = r(t)\sin\theta(t), \quad y_2(t) = r(t)\cos\theta(t). \tag{2}$$

Дифференцируя равенства (2) по t, и, заменяя y_1' и y_2' при помощи (1), получим

$$\begin{cases} r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\cdot\theta'(t) = p(t)r(t)\cos\theta(t), \\ r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\cdot\theta'(t) = q(t)r(t)\cos\theta(t), \end{cases}$$

откуда нетрудно получить следущие уравнения относительно $r(t)$ и $\theta(t)$

$$r' = \frac{1}{2}[p(t)+q(t)]r\sin 2\theta(t), \tag{3}$$

$$\theta' = p(t)\cos^2\theta - q(t)\sin^2\theta. \tag{4}$$

Решению $\bar{\varphi}(t) = \begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}$ системы (1) соответствует решение $r=\rho(t),\ \theta=\omega(t)$ уравнений (3), (4), причем из равенств (2) следует, что $\rho^2 = \varphi_1^2+\varphi_2^2,\ \omega = arctg\left(\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\right).$

Так как функции φ_1 и φ_2 одновремено в нуль не обращаются, то $\rho^2(t)>0$ на (a,b). Значит, не нарушая общности, можно считать, что $\rho(t)>0.$. Тогда, если принять

$$\psi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\rho^2(t)\sin 2\theta(t),$$

то, очевидно, что функция $\psi(t)$ будет обращаться в нуль тогда, когда обращается в нуль одна из компонент φ_1 и φ_2, и $\omega(t)$ есть целое число, кратное $\pi/2$.

Заметим, что так как функции $\cos^2\theta(t)$ и $\sin^2\theta(t)$ равномерно ограничены, то уравнение (4) имеет решение на каждом интервале. Так как правая часть уравнения (4) дифференцируема по $\theta(t)$, то решение единственно в обычном смысле.

Из (2) следует, что

$$y_1(t)\cos\theta(t) - y_2(t)\sin\theta(t) = 0. \tag{5}$$

В краевых задачах общий вид условия (5) в конечной точке будет иметь вид

$$y_1(a)\cos\alpha - y_2(a)\sin\alpha = 0.$$

Из (5) ясно, что такое условие эквивалентно более простому условию

$$\theta(a) = \alpha \ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Сравним теперь поведение решений двух систем вида (1). Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_i(t) y_2, \\ y_2' = q_i(t) y_1, \end{cases} \qquad (6)$$

где $p_i(t), q_i(t)$ $(i = 1,2)$ –действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Имеет место

Теорема. *Пусть функции* p_i *и* q_i *непрерывны на интервале* $[a,b]$ *и пусть*

$$p_2(t) \ge p_1(t), \ \ q_2(t) \le q_1(t) \qquad (7)$$

на $[a,b]$. *Пусть* $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ -- *нетривиальные решения систем* (6) *соответственно при* $i = 1$ *и* $i = 2$, *и* $\omega_2(a) > \omega_1(a)$. *Тогда*

$$\omega_2(t) \ge \omega_1(t) \qquad (a \le t \le b). \qquad (8)$$

Кроме того, если $q_2(t) < q_1(t)$ *на* $[a,b]$, *то*

$$\omega_2(t) > \omega_1(t) \qquad (a \le t \le b). \qquad (9)$$

Доказательство. Учитывая определение функции $\omega(t)$, имеем

$$\omega_1' = p_1 \cos^2 \omega_1 - q_1 \sin^2 \omega_1, \quad \omega_2' = p_2 \cos^2 \omega_2 - q_2 \sin^2 \omega_2. \qquad (10)$$

Откуда найдем

$$(\omega_2 - \omega_1)' = (q_1 + p_1)(\sin^2 \omega_1 - \sin^2 \omega_2) + h, \qquad (11)$$

где

$$h = (p_2 - p_1)\cos^2 \omega_2 + (q_1 - q_2)\sin^2 \omega_2.$$

Очевидно, что $h \ge 0$. Примем $u = \omega_2 - \omega_1$, тогда из условия (8) будет следовать, что $u(a) > 0$. Далее, из (11) получим

$$u' = fu + h, \qquad (12)$$

где

$$f = -(q_1 - p_1)(\sin \omega_2 + \sin \omega_1)\left(\frac{\sin \omega_2 - \sin \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right).$$

Очевидно, что функция f непрерывна и равномерно ограничена. Так как $h \ge 0$, то из (12) будет следовать

$$u' - fu \ge 0. \qquad (13)$$

Примем

$$F(t) = \int_t^b f(s) ds,$$

и умножим неравенство (13) на e^F. Получим

$$e^F u' + F' e^F u \ge 0.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от a до t, найдем

$$e^{F(t)} u(t) \ge e^{F(a)} u(a) \ge 0. \qquad (14)$$

Отсюда будет следовать, что $u(t) \ge 0.$ И, следовательно, неравенство (8) доказано.

Предположим теперь, что неравенство (9) не имеет места. Тогда должно существовать такое $c > a$, что

$$\omega_2(t) = \omega_1(t) \quad (a \le t \le c). \qquad (15)$$

Действительно, если допустить противное, то, согласно (8), должна существовать последовательность точек $\{t_j\}$, сходящаяся к a, такая, что $\omega_2(t_j) > \omega_1(t_j)$. Воспользовавшись неравенством (14), и, заменив в нем a на t_j, получим, что для $t > t_j$ имеет место неравенство $\omega_2(t) > \omega_1(t)$. Так как точки t_j можно брать сколь угодно близкими к a, то отсюда будет следовать неравенство (9), что противоречит нашему предположению. Следовательно, действительно, для некоторого $c > a$ имеет место равенство (15). В этом случае, из соотношения (11) получим, что для $t \in [a, c]$ имеет место равенство

$$(p_2 - p_1)\cos^2 \omega + (q_1 - q_2)\sin^2 \omega = 0\ ,$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2$. Однако, при $q_2 < q_1$ и $p_2 \geq p_1$, это равенство возможно лишь в том случае, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \pmod{\pi}\ ,$$

и когда $p_1 \equiv p_2$ на интервале (a, c). Но при $\omega_1 = \omega_2 = 0 \pmod{\pi}$, и условиях теоремы, равенства (10), очевидно, невозможны. Это противоречие и доказывает (9), когда $q_2 > q_1$. Теорема доказана.

Литература

1. Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; ЛКИ, 2007.
2. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.; Наука, 1976.
3. Г.Г. Саакян. *Об осциллирующих решениях одной задачи с линейной однородной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка.* Ученые записки АрГУ, 1(14), стр. 9-14, 2007.

Երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համասեռ կանոնական համակարգերի համար մի համեմատության թեորեմի մասին

Գ.Հ.Սահակյան

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է համեմատության թեորեմ

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = q(t)y_1, \end{cases}$$

տեսքի գծային համասեռ համակարգերի համար այն ենթադրությամբ, որ $p(t)$ և $q(t)$ ֆունկցիաները որոշված և անընդհատ են $[a, b]$ հատվածի վրա:

About one comparison theorem for two-dimentional homogeneous canonical systems of ordinary differential equations

G.H.Sahakyan

Summary

In this article has been proved the comparison theorem for linear homogeneous

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = q(t)y_1, \end{cases}$$

type of systems under the assumption, that $p(t)$ and $q(t)$ functions are define and continuous on interval $[a, b]$.