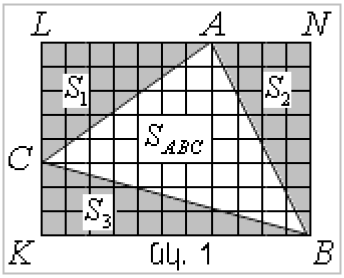
ՀՏԴ 371.31:51 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅԱՆ ԴԻՐՔԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ռ. Առաքելյան

Քառակուսի վանդակներով թղթի վրա դժվար չէ կառուցել քառակուսի այնպես, որ նրա գագաթները գտնվեն թղթի ուղիղների հատման կետերում, այսուհետ մենք դրանց կանվանենք թղթի հանգույցներ: Բնականորեն հարց է ծագում՝ կարելի՞ է արդյոք կառուցել կանոնավոր եռանկյուն այնպես, որ նրա գագաթները ևս պատկանեն թղթի հանգույցներին:



Նկ. 1

Թեորեմ 1: Գոյություն չունի կանոնավոր եռանկյուն, որի գագաթները գտնվում են քառակուսի վանդակներով թղթի հանգույցներում:

Ապացուցում: Ապացույցը կատարենք հակասող ընդունելիության մեթոդով: Թող եռանկյուն ABC այդպիսինն է: Կատարենք նշանակում՝ $LKBN$ ուղղանկյան գունավոր եռանկյունների մակերեսները նշանակենք տառերով՝ S_1, S_2, S_3 (նկ. 1): Այդ թվերը ռացիոնալ են, որովհետև 3 ուղղանկյուն եռանկյունների կողմերը ամբողջ թվեր են: Հավասարակողմ ABC եռանկյան կողմի քառակուսին՝ a^2-ն, ևս ռացիոնալ թիվ է (որպես ամբողջ էջերով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգ): Հաշվենք եռանկյան մակերեսը.

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot a^2 \cdot \sin 60^\circ = a^2\sqrt{3}/4:$$

Ստացված թիվը իռացիոնալ է: Բայց մյուս կողմից

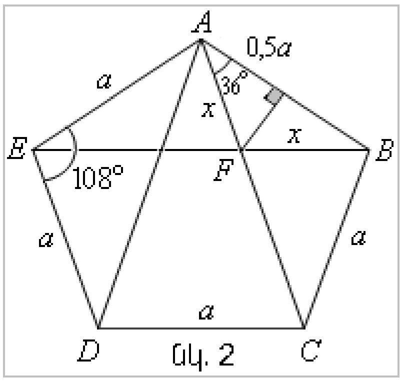
$$S_{ABC} = S_{LKBN} - \ S_1 + S_2 + S_3 \ :$$

Հավասարության աջ մասում բոլոր մեծությունները ռացիոնալ թվեր են, ստացանք հակասություն, որն էլ ապացուցում է թեորեմը:

Թեորեմ 2: $sin 36^\circ$-ը իռացիոնալ թիվ է:

Ապացուցում. Թող $ABCDE$-ն կանոնավոր հնգանկյուն է, հետևաբար

$$\angle EAD = \angle DAC = \angle CAB = 36^\circ:$$



Նկ. 2

$\Delta ABF \sim \Delta ACB$, որտեղից

$$\frac{a}{x}=\frac{a+x}{a}\Rightarrow a^2=ax+x^2 \qquad x^2+ax-a^2=0$$

$$x=\ a\sqrt{5}-a\ \Big/2=0,5\cdot a\ \ \sqrt{5}-1\ :$$

$$0,5\cdot a:x=\cos 36^\circ$$

$$\cos 36^\circ=\frac{0,5a}{x}=\frac{0,5a}{0,5a\ \ \sqrt{5}-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}:$$

$$\sin^2 36^0=1-\cos^2 36^\circ=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}=\frac{8-3-\sqrt{5}}{8}=\frac{5-\sqrt{5}}{8};$$

$$\sin 36^\circ=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \qquad 1\ :$$

1 -ից երևում է, որ $\sin 36^\circ$-ն իռացիոնալ թիվ է:

Թեորեմ 3: Եթե $ABCDE$ կանոնավոր հնգանկյան DC կողմը ռացիոնալ թիվ է, ապա ADC եռանկյան մակերեսը իռացիոնալ թիվ է (նկ. 2):

Ապացուցում.

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin 36^\circ=\frac{1}{2}AC^2\cdot\sin 36^\circ :$$

$$AC=a+x=a+\frac{a\sqrt{5}-a}{2}=\frac{a\ \ 1+\sqrt{5}}{2};$$

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}\left[\frac{a\ \ 1+\sqrt{5}}{2}\right]^2\cdot\sin 36^\circ=\frac{a^2}{8}\ \ 6+2\sqrt{5}\ \ \cdot\sin 36^\circ=\frac{a^2}{4}\ \ 3+\sqrt{5}\ \ \cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}=$$

$$=\frac{a^2}{8}\cdot\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}\ \ \ 5-\sqrt{5}}{2}}=\frac{a^2}{8}\cdot\sqrt{\frac{40+16\sqrt{5}}{2}}=\frac{a^2}{8}\cdot\sqrt{\frac{8\ \ 5+2\sqrt{5}}{2}}=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}:\ \ 2$$

Քանի որ 2 -ի մեջ a-ն ռացիոնալ է, ապա եռանկյան մակերեսը իռացիոնալ է:

Թեորեմ 4. Գոյություն չունի կանոնավոր հնգանկյուն, որի գագաթները գտնվում են քառակուսի վանդակներով թղթի հանգույցներում:

Ապացույց. Ենթադրենք ընդհակառակը, այսինքն գոյություն ունի կանոնավոր հնգանկյուն, որը բավարարում է թեորեմի պայմանին:

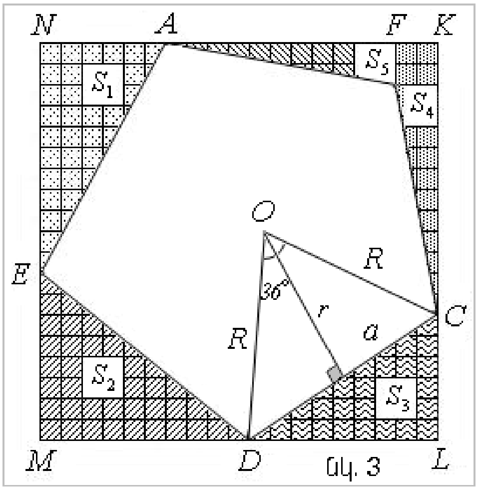
Հնարավոր են հնգանկյան դասավորության երկու դեպք:

Դեպք I. Կանոնավոր հնգանկյան կողմերից մեկը պատկանում է քառակուսի թղթի զուգահեռ ուղիղներից մեկին (նկ. 2): Համաձայն թեորեմի պայմանի հնգանկյան A գագաթը նշված DC կողմից հեռացված է ամբողջ թվով արտահայտվող միավորով:

$S_{ADC} = 0,5\cdot a\cdot h;$ որտեղ a -ն և h-ը ամբողջ թվեր են, հետևաբար S_{ADC} ռացիոնալ թիվ է: Բայց ստացվածը հակասում է թեորեմ 2-ին: Հակասությունը ապացուցում է թեորեմ 4-ի ճշմարիտ լինելը:

Դեպք II. Ենթադրենք կանոնավոր հնգանկյունը թերթի վրա ունի (նկ. 3)- ի դիրքը:

Կանոնավոր հնգանկյան կողմը նշանակենք a-ով: Դիտարկենք COD եռանկյունը:



նկ. 3

$$DC = a = 2R\cdot\sin\ 180^{\circ}/5\ = 2R\cdot\sin 36^{\circ}\quad 3\ ,$$

$$DO = CO = R$$

$$r/R = \cos 36^{\circ} \Rightarrow r = R\cdot\cos 36^{\circ};$$

$$S_{\Delta COD} = 0,5\cdot a\cdot r =$$

$$= 0,5\cdot 2R\cdot\sin 36^{\circ}\cdot R\cos 36^{\circ} = 0,5\cdot R^2\cdot\sin 72^{\circ}:$$

ΔEMD-ից $ED^2 = a^2 = EM^2 + MD^2,$

բայց EM և MD-ն արտահայտվում են ամբողջ թվերով, հետևաբար a^2 - ին ևս ամբողջ թիվ է:

3 - ից $R = \dfrac{a}{2\sin 36^{o}} \Rightarrow R^2 = \dfrac{a^2}{4\sin^2 36^{o}}$:

$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\cdot\sin^2 36^{o}}\cdot 2\sin 36^{o}\cdot\cos 36^{o} = \frac{a^2\cos 36^{o}}{4\cdot\sin 36^{o}} = \frac{a^2}{4}\cdot\mathrm{ctg}36^{o} :$$

a^2 -ն ամբողջ թիվ է: Ապացուցենք, որ $\mathrm{ctg}36^{o}$ -ը իռացիոնալ թիվ է:

$$\mathrm{ctg}36^{o} = \frac{\cos 36^{o}}{\sin 36^{o}} = \frac{\sqrt{5}+1\ /4}{1/2\cdot\sqrt{\ 5-\sqrt{5}\ /2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}\quad 5+\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} :$$

$S_{COD} = a^2/4\cdot\sqrt{1+2\sqrt{5}/5}$; $S_{ABCDE} = 5a^2/\ 4\sqrt{\ 1\sqrt{+}\ /2}\quad 5$, որը իռացիոնալ թիվ է:

Մյուս կողմից, նկ.2 - ից երևում է, որ կանոնավոր հնգանկյան մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով.

$$S_{ABCDE} = S_{NKlM} - \ S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \ : \quad 5$$

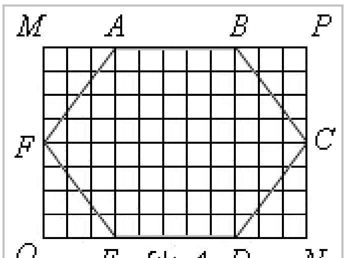
Փակագծի ներսում գրառված մակերեսներն արտահայտվում են ռացիոնալ թվերով՝ $KLMN$ ուղղանկյան կողմերը, S_1, S_2, S_3, S_5 ուղղանկյան եռանկյունների էջերն, ինչպես նաև S_4 սեղանի հիմքերը և բարձրությունն, ամբողջ թվեր են:

Հետևաբար նշված պատկերների մակերեսները ռացիոնալ թվեր են: Այսպիսով, 4 հավասարության ձախ մասը իռացիոնալ թիվ է (տես 5 հաշվումները), իսկ աջ մասը՝ ռացիոնալ:

Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ կանոնավոր հնգանկյուն, որի գագաթները գտնվում են վանդակավոր թղթի հանգույցներում, գոյություն չունի:

Այժմ դիտարկենք հաջորդ բազմանկյունը:

Թեորեմ 5. Գոյություն չունի կանոնավոր վեցանկյուն, որի գագաթները գտնվում են քառակուսի վանդակներով թղթի հանգույցներում:



նկ. 4

Ապացուցում: Ենթադրենք ընդհակառակն, այսինքն, գոյություն ունի կանոնավոր վեցանկյուն, որը բավարարում է թեորեմի պայմանին:

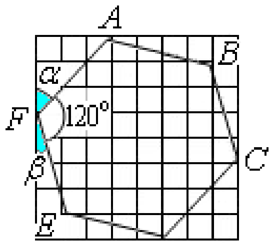
Հնարավոր են վեցանկյան դասավորության երկու դեպք:

Դեպք I. 6 - անկյունը ունի նկ. 4-ի տեսքը:

Թող $ABCDEF$ -ն որոնելի 6 - անկյունն է:

$S_{ABCDEF} = S_{ABDE} + 2 \cdot S_{BCD}$: 6 - անկյան կողմի քառակուսին՝ a^2 -ն ամբողջ թիվ է:

$$S_{BCD} = \frac{a^2}{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} :$$



նկ. 5

Ստացանք իռացիոնալ թիվ:

$S_{ABCDEF} = MP \cdot PN - 4 \cdot S_{CDN}$:

Այս հավասարության աջ մասը ռացիոնալ թիվ է:

$$S_{ABCDEF} = S_{AEDB} + 2 \cdot S_{AFM} = S_{AEDB} + 2 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = S_{AEDB} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} :$$

Հավասարության աջ մասը իռացիոնալ թիվ է: Ստացվեց հակասություն, որը ապացուցում է թեորեմը:

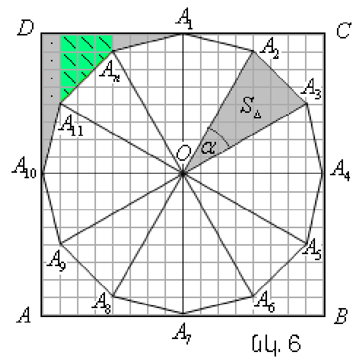
Դեպք II. Կանոնավոր 6-անկյունն ունի նկ. 5-ի տեսքը:

$$\mathrm{tg}\left(\alpha + \beta\right) = \mathrm{tg}\left(180^\circ - 120^\circ\right) = \mathrm{tg}60^\circ; \quad \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta} = \sqrt{3}; \quad \frac{m/n + q/p}{1 - mq/np} = \sqrt{3};$$

որտեղ m, n, p, q -ն բնական թվեր են.

$\dfrac{mp + nq}{np - mq} = \sqrt{3}$: Այս հավասարության ձախ մասը ռացիոնալ է, իսկ աջ մասը՝ իռացիոնալ: Ստացված հակասությունն ապացուցում է թեորեմը:

Դպրոցական երկրաչափության դասընթացում կանոնավոր բազմանկյուններից հիմնականում ուսումնասիրում են եռանկյունը, քառակուսին, հնգանկյունը և վեցանկյունը, որոնց մասին էլ տեղադրված են հետազոտությունները:



նկ. 6

Այժմ խոսենք կանոնավոր n - անկյան մասին նույն տեսանկյունից:

Կանոնավոր բազմանկյունը տրոհենք հավասարասրուն եռանկյունների այնպես, ինչպես պատկերված է նկ. 6-ում, որոնք ունեն մակերես՝

$$S_\Delta = 0{,}5 \cdot a^2 \sin\left(360^\circ / n\right), \ n \ge 3, \ n \in N :$$

Բազմանկյան մակերեսը հավասար է

նշված n եռանկյունների մակերեսների գումարին: S_Δ արտահայտության մեջ a^2 ամբողջ թիվ է, հետևաբար բազմանկյան մակերեսի ռացիոնալ լինելը կապված է $\sin\ 360^\circ/n$ արտահայտության արժեքի հետ:

Եթե $ABCD$ քառակուսու մակերեսից հանենք $DA_{10}A_{11}A_nA_1$ բազմանկյան մակերեսի քառապատիկը, ապա կստանանք $A_1A_2A_3...A_n$ բազմանկյան մակերեսը՝

$$S_{ABCD} - 4S_{DA_{10}A_{11}A_nA_1} = S_{A_1A_2A_3...A_n} \qquad 6$$

6 հավասարության ձախ մասի արժեքը ռացիոնալ է, հետևաբար եթե $A_1A_2A_3...A_n$ բազմանկյան մակերեսը ևս ռացիոնալ է, ապա կանոնավոր բազմանկյուն թղթի հանգույցներում գտնվող գագաթներով գոյություն ունի:

Այսպիսով կանոնավոր բազմանկյան կառուցման հնարավոր լինելը կապված է բազմանկյան մակերեսի ռացիոնալ լինելու հետ, իսկ վերջինս կախված է $\sin\ 360^\circ/n$ արտահայտության արժեքից:

Մասնավոր դեպքում, երբ $n=4$, կստանանք $\sin\ 360^\circ/4 = \sin 90^\circ = 1$, քառակուսի, իսկ $n=12$ դեպքում կստանանք $\sin\ 360^\circ/12 = \sin 30^\circ = 1/2$, տասներկու կողմ ունեցող կանոնավոր բազմանկյուն՝ նկ. 6:

Գրականություն

1. Г.Радемахер, О.Теплиц, Числа и фигуры, изд. „Наука'', М., 1968
2 А.Ероров, Решетки и правильные многоугольники. Квант, N12, 1974
3. index. files/Estrella_3.htm

Теоремы о расположении правильного многоугольника

Р.Аракелян

Резюме

В статье рассматривается задача построения правильного многоугольника, вершины которого расположены в углах бумаги в клетку. Доказываются соответственные теоремы о правильном треугольнике, пятиугольнике и шестиугольнике. Делается обобщение о правильном n-угольнике.

Доказывается, что такое построение возможно для таких n-угольников, для которых значение $\sin 360^\circ/n$ является рациональным числом.

Theorems of an Arrangement of the Regular Polygon

R. Arakelyan

Summary

The article considers the task of building regular polygon the tips of which are situated in the angles of cross section paper. Homologous theorems on regular triangles, pentagons and hexagons are proved as well. A summary is made concerning a regular polygon having n-angle.

It is proved that such a construction is possible for those n-angles $\sin 360^\circ/n$ of which is rational number.