

УДК 004.4+519.1

Математика

О ЦИКЛАХ ДЛИНЫ ЧЕТЫРЕ В РЕГУЛЯРНЫХ БЛОЧНО-ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЯХ

С. Аветисян, А. Кочарян

Данная работа является продолжением работы [4], где рассматривается класс регулярных блочно-иерархических сетей, и описаны новые алгоритмы вычислений свойств сети, позволившие существенно увеличить размер исследуемых сетей. В данной работе описан алгоритм вычисления числа циклов длины 4 в классе регулярных блочно-иерархических сетей. Алгоритм для рассматриваемого класса сетей, в отличие от известных алгоритмов вычисления числа циклов [6], более эффективен *как по* быстродействию, так и по использованию оперативной памяти компьютера. Алгоритм реализован в разработанной нами системе [5], которая ориентирована на эффективную имитацию случайных блочно-иерархических сетей.

1. Используемые определения и обозначения

Регулярная блочно-иерархическая сеть. Структура связей в блочно-иерархической сети. Приведем краткое описание основных определений и обозначений приведенных в [4]. Пусть p и Γ — натуральные числа, $p > 1$. Для заданных p и Γ определяется класс регулярных блочно-иерархических сетей $\mathcal{H}_{p,\Gamma}$. Число узлов сети $G_{p,\Gamma} \in \mathcal{H}_{p,\Gamma}$ равно p^Γ . Сеть конструируется по уровням. На каждом новом уровне γ , $0 \leq \gamma \leq \Gamma$, формируются новые кластеры (подсети) посредством объединения уже построенных на предыдущем уровне кластеров и соединения некоторых из них, в результате чего образуются новые связи сети $G_{p,\Gamma}$. Обозначим через M_γ — множество кластеров уровня γ , а через $M_\gamma^{(i)}$ — i -тый кластер уровня γ , где $1 \leq i \leq n_\gamma$, $n_\gamma = p^{\Gamma-\gamma}$,

$$M_\gamma = \{M_\gamma^{(1)}, M_\gamma^{(2)}, \dots, M_\gamma^{(n_\gamma)}\}.$$

На последнем уровне $\gamma = \Gamma$ образуется один кластер, представляющий сеть $G_{p,\Gamma} \in \mathcal{H}_{p,\Gamma}$:

$$G_{p,\Gamma} = M_\Gamma^{(1)}, \text{ где } V(G_{p,\Gamma}) = V(M_\Gamma^{(1)}), E(G_{p,\Gamma}) = E(M_\Gamma^{(1)}),$$

где p является индексом ветвления регулярной блочно-иерархической сети $G_{p,\Gamma}$, а Γ - уровень иерархии графа.

Пусть $G_{p,\Gamma}$ - регулярная блочно-иерархическая сеть с узлами $V(G_{p,\Gamma}) = \{x_1, \dots, x_N\}$, $N = p^\Gamma$ и M_γ - множество кластеров уровня γ , $0 \leq \gamma \leq \Gamma$. Сеть $G_{p,\Gamma}$ *упорядоченная*, если для любой пары кластеров $M_\gamma^{(n)} \in M_\gamma$, $M_\gamma^{(m)} \in M_\gamma$, где $n < m$, следует, что если $x_i \in V(M_\gamma^{(n)})$ и $x_j \in V(M_\gamma^{(m)})$, то

$i < j$. Множество узлов упорядоченной регулярной блочно-иерархической сети упорядочено по вложенности кластеров т.е. $V(M_\gamma^{(n)}) = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+s}\}$, $l = (n-1) * p^\gamma$, $s = p^\gamma$. Регулярная блочно-иерархическая сеть $G_{p,\Gamma}$ посредством переименования узлов приводится к упорядоченной блочно-иерархической сети. В дальнейшем будем рассматривать регулярные упорядоченные блочно-иерархические сети, которые будем называть блочно-иерархическими сетями или просто сетями.

Сеть $G_{p,\Gamma}$ можно описать в виде иерархии его кластеров [4]. Иерархия кластеров представляется в виде помеченного p -ичного дерева $T_{p,\Gamma}$ (дерево связи), поддеревья которого представляют кластеры сети $G_{p,\Gamma}$, а каждая вершина дерева помечена двоичным числом, описывающим соединения между вложенными кластерами. Узлам кластера $M_\gamma^{(n)}$ соответствуют листья поддеревя $T_\gamma^{(n)}$, которые обозначаются через $leaves(T_\gamma^{(n)})$,

$V(M_\gamma^{(n)}) = leaves(T_\gamma^{(n)}) = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+s}\}$, $l = (n-1) * p^\gamma$, $s = p^\gamma$, соответственно для сети $G_{p,\Gamma}$,

$$V(G_{p,\Gamma}) = V(M_\Gamma^{(1)}) = leaves(T_\Gamma^{(1)}) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad N = p^\Gamma.$$

Структура хранения сети задается деревом связи (рис1).

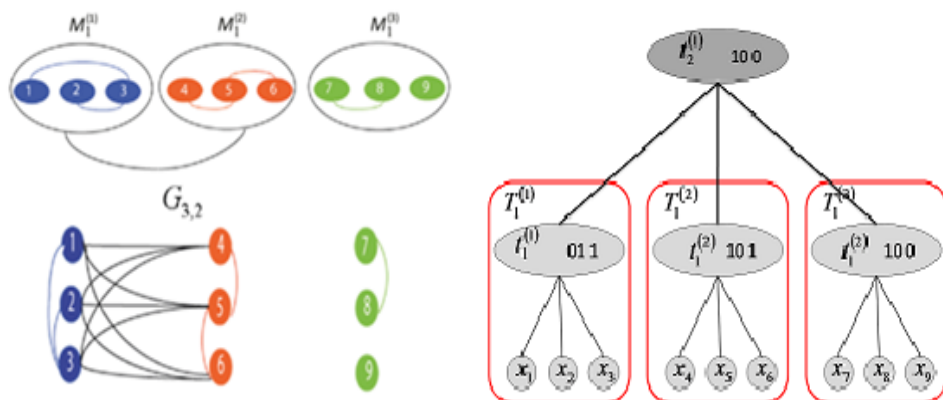


Рис.1.Блочнo-иерархическая сеть $G_{3,2}$ и его дерево связи $T_{3,2}$

Через $S(T_\gamma^{(n)})$ обозначается множество поддеревьев уровня $\gamma - 1$, вложенных в дерево $T_\gamma^{(n)}$,

$$S(T_\gamma^{(n)}) = \{T_{\gamma-1}^{(l+1)}, T_{\gamma-1}^{(l+2)}, \dots, T_{\gamma-1}^{(l+p)}\}, \quad l = (n-1) * p, \quad 1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$$

Нижне для удобства символом $S_i(T_Y^{(n)})$, $1 \leq i \leq p$ обозначается элемент $T_{Y-1}^{(l+i)}$. Таким образом, в этих обозначениях имеем:

$$S(T_Y^{(n)}) = \{S_1(T_Y^{(n)}), S_2(T_Y^{(n)}), \dots, S_p(T_Y^{(n)})\}.$$

Пусть $S_i(T_Y^{(n)}), S_j(T_Y^{(n)}) \in S(T_Y^{(n)})$. Поддеревья $S_i(T_Y^{(n)})$ и $S_j(T_Y^{(n)})$ непосредственно соединены, если соответствующие им кластеры $M_{Y-1}^{(l+i)}$ и $M_{Y-1}^{(l+j)}$, $l = (n-1) * p$ соединены. Определяется функция $\psi_{Y,n}(i, j)$ непосредственной соединенности двух вложенных поддеревьев $S_i(T_Y^{(n)}), S_j(T_Y^{(n)})$:

$$\psi_{Y,n}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если поддеревья } S_i(T_Y^{(n)}) \text{ и } S_j(T_Y^{(n)}) \text{ непосредственно соединены} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Циклической последовательностью поддеревьев дерева $T_Y^{(n)}$ назовем последовательность соединенных поддеревьев из множества $S(T_Y^{(n)})$,

$S_{i_0}(T_Y^{(n)}), S_{i_1}(T_Y^{(n)}), \dots, S_{i_r}(T_Y^{(n)}), i_j \neq i_l, \psi_{Y,n}(i_j, i_{j+1}) = 1, 1 \leq i_j, i_l \leq p$, где $S_{i_0}(T_Y^{(n)}) = S_{i_r}(T_Y^{(n)})$, r - длина цикла.

2. Алгоритм подсчета числа циклов длины 4

Структура хранения блочно-иерархической сети задается деревом связи, и генерация сети $G_{p,k}$ с p^k узлами сводится к генерации $(p^k - 1)/(p - 1)$ последовательностей двоичных цифр длины $p(p - 1)/2$ [4]. Вычисление числа циклов длины 4 в $G_{p,k}$ осуществляется по дереву связи, что дает большую эффективность как по использованию памяти, так и по времени счета.

Пусть $G_{p,g}$ - блочно-иерархическая сеть и $T_{p,g}$ - дерево связи сети $G_{p,g}$. Обозначим через $TreeCycles(T_Y^{(n)}, 4)$ - число циклов длины 4 между поддеревьями $S(T_Y^{(n)})$ дерева $T_Y^{(n)}$. Очевидно, что имеет место следующее утверждение:

$$\begin{aligned} TreeCycles(T_Y^{(n)}, 4) &= \\ &= \sum_{i_1=1}^{p-3} \sum_{i_2=i_1+1}^{p-2} \sum_{i_3=i_2+1}^{p-1} \sum_{i_4=i_3+1}^p (\psi_{Y,n}(i_1, i_2)\psi_{Y,n}(i_2, i_3)\psi_{Y,n}(i_3, i_4)\psi_{Y,n}(i_4, i_1) \\ &+ \psi_{Y,n}(i_1, i_3)\psi_{Y,n}(i_3, i_2)\psi_{Y,n}(i_2, i_4)\psi_{Y,n}(i_4, i_1) \\ &+ \psi_{Y,n}(i_1, i_2)\psi_{Y,n}(i_2, i_4)\psi_{Y,n}(i_4, i_3)\psi_{Y,n}(i_3, i_1)) \end{aligned}$$

Число циклов определяется по битовой последовательности вектора связи узла $t_\gamma^{(n)}$. Время работы алгоритма подсчета числа циклов по данной формуле равно $O(p^4)$.

Будем говорить, что между узлами x_1 и x_2 сети $G_{p,\Gamma}$ имеется *связь длины 2*, если существует простая цепь длины 2 из узла x_1 в x_2 . Обозначим через $|E_2(M_\gamma^{(n)})|$ - число связей длины 2 в кластере $M_\gamma^{(n)}$.

Утверждение 1. $|E_2(M_\gamma^{(n)})| = \sum_{i=1}^p |E_2(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| +$
 $+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^p (\psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(j,k) + \psi_{\gamma,n}(i,k)\psi_{\gamma,n}(j,k) + \psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(i,k)) p^{3(\gamma-1)}$
 $+ \sum_{i,j=1}^p 2 [\psi_{\gamma,n}(i,j) (|E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| + |E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})|) p^{(\gamma-1)}]$
 $+ \sum_{i,j=1}^p [\psi_{\gamma,n}(i,j) p^{2(\gamma-1)} (p^{(\gamma-1)} - 1)] \quad (4)$

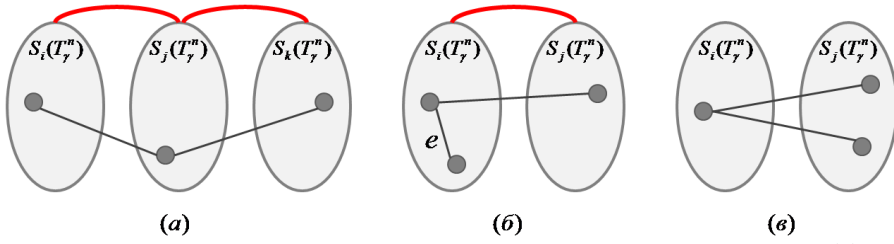
где $l = (n-1)p^\gamma$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по уровням иерархии γ , $1 \leq \gamma \leq \Gamma$.

Пусть $\gamma = 1$. Связи длины 2 между узлами кластера $M_1^{(n)}$ являются связями длины 2 между p узлами и их число определяется по вектору связи вершины $t_1^{(n)}$ (числу соединений длины 2 в $T_1^{(n)}$),

$$|E_2(M_1^{(n)})| = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^p (\psi_{1,n}(i,j)\psi_{1,n}(j,k) + \psi_{1,n}(i,k)\psi_{1,n}(j,k) + \psi_{1,n}(i,j)\psi_{1,n}(i,k)).$$

Пусть $\gamma > 1$ и выражение (4) верно для кластеров уровня $\gamma-1$. Новые связи длины 2 между узлами кластера $M_\gamma^{(n)}$ появляются за счет появления соединений длины 2 между поддеревьями из множества $S(T_\gamma^{(n)})$. Доказательство утверждения 6 для кластеров уровня γ следует из ниже перечисленных вариантов.



Րիս.2. Փորմեր սոյւնարներ միջոյց սոյւնարներ միջոյց $S(T_\gamma^{(n)})$,
 արհրարարներ կոնարներ 2 միջոյց սոյւնարներ $M_\gamma^{(n)}$.

1. Սոյւնարներ $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ և $S_k(T_\gamma^{(n)})$ արհրարարներ սոյւնարներ և $\psi_{\gamma,n}(i,j) = 1$, $\psi_{\gamma,n}(j,k) = 1$ (րիս.2 (ա)). Տոյց արհրարարներ $p^{3(\gamma-1)}$ սոյւնարներ 2:

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^p (\psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(j,k) + \psi_{\gamma,n}(i,k)\psi_{\gamma,n}(j,k) + \psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(i,k))p^{3(\gamma-1)}. \quad (5)$$

2. Սոյւնարներ 2 սոյւնարներ $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ արհրարարներ սոյւնարներ և սոյւնարներ $S_i(T_\gamma^{(n)})$ արհրարարներ e (րիս.2 (բ)). Տոյց արհրարարներ սոյւնարներ $S_j(T_\gamma^{(n)})$ արհրարարներ e սոյւնարներ 2:

$$2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^p [\psi_{\gamma,n}(i,j) (|E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| + |E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})|) p^{(\gamma-1)}]. \quad (6)$$

3. Սոյւնարներ 2 սոյւնարներ $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ արհրարարներ սոյւնարներ (րիս.2 (վ)). Տոյց արհրարարներ սոյւնարներ $S_i(T_\gamma^{(n)})$ արհրարարներ սոյւնարներ $S_j(T_\gamma^{(n)})$ սոյւնարներ 2:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^p [\psi_{\gamma,n}(i,j) p^{2(\gamma-1)} (p^{(\gamma-1)} - 1)]. \quad (7)$$

Արհրարարներ 1 արհրարարներ.

Արհրարարներ արհրարարներ սոյւնարներ (4). Ոսարներ $|E(M_\gamma^{(i)})|$, $1 \leq \gamma \leq \Gamma$, $1 \leq i \leq p^{\Gamma-\gamma}$ արհրարարներ սոյւնարներ արհրարարներ արհրարարներ $O(p^\Gamma p) = O(Np)$ արհրարարներ ([4], արհրարարներ 3).

Обозначим через $F(\gamma)$, сложность вычисления $|E_2(M_\gamma^{(n)})|$, $1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$. Время вычисления выражения (5) $O(p^3)$, а (6) и (7) $O(p^2)$. Таким образом время работы алгоритма подсчета числа связей длины 2 по выражению (4) удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{cases} F(\gamma) = 0, & \gamma = 0 \\ F(\gamma) = p^3 + p^2 + pF(\gamma - 1), & \gamma > 0 \end{cases}$$

Решив его, получаем $F(\gamma) = (p^2 + p^3)(p^\gamma - 1)/(p - 1)$. При $\gamma = \Gamma$, $O(p^{\Gamma+2}) = O(Np^2)$. С учетом вычислений $|E(M_\gamma^{(i)})|$, время работы алгоритма подсчета $|E_2(M_\gamma^{(i)})|$ равно $O(Np^2) + O(Np) = O(Np^2)$.

Утверждение 2. Пусть $T_{p,k}$ - дерево связи блочно-иерархической сети $G_{p,k}$ и $Cycles(M_\gamma^{(n)}, 4)$ число циклов длины 4 между узлами кластера $M_\gamma^{(n)}$. Тогда

$$\begin{aligned} Cycles(M_\gamma^{(n)}, 4) &= \sum_{e=1}^p Cycles(M_{\gamma-1}^{(l+e)}, 4) + TreeCycles(T_\gamma^{(n)}, 4) p^{4(\gamma-1)} + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k=1\dots p \\ i < j < k}} 2 \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) \psi_{\gamma,n}(j,k) \psi_{\gamma,n}(i,k) \left(|E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| + |E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |E(M_{\gamma-1}^{(l+k)})| \right) \right) p^{2(\gamma-1)} + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1\dots p \\ i < j}} \psi_{\gamma,n}(i,j) \left(|E_2(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| + |E_2(M_{\gamma-1}^{(l+j)})| \right) p^{(\gamma-1)} \\ &\quad + 2\psi_{\gamma,n}(i,j) \left(|E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| |E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})| \right) + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k=1\dots p \\ i < j < k}} \left((\psi_{\gamma,n}(i,j) \psi_{\gamma,n}(j,k) + \psi_{\gamma,n}(i,k) \psi_{\gamma,n}(k,j) \right. \\ &\quad \left. + (\psi_{\gamma,n}(i,j) \psi_{\gamma,n}(i,k)) \frac{p^{3(\gamma-1)}(p^{(\gamma-1)} - 1)}{2} \right) + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1\dots p \\ i < j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) \left(\frac{p^{(\gamma-1)}(p^{(\gamma-1)} - 1)}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

где $l = (n - 1)p^\gamma$, $1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по уровням иерархии γ , $1 \leq \gamma \leq \Gamma$.

Пусть $\gamma = 1$. Множество циклов между узлами кластера $M_\gamma^{(n)}$ состоит только из циклов между p узлами, а количество циклов определяется по вектору связи вершины $t_1^{(n)}$, т.е. $Cycles(M_\gamma^{(n)}, 4) = TreeCycles(T_\gamma^{(n)}, 4)$.

Пусть $\gamma > 1$ и теорема 2 верна для кластеров уровня $\gamma - 1$. Докажем справедливость теоремы для кластеров уровня γ . Рассмотрим, какие новые циклы появляются при переходе от уровня $\gamma - 1$ к уровню γ . Новые циклы в кластере могут появиться при соединении его вложенных кластеров, что соответствует соединению поддеревьев множества $S(T_\gamma^{(n)})$.

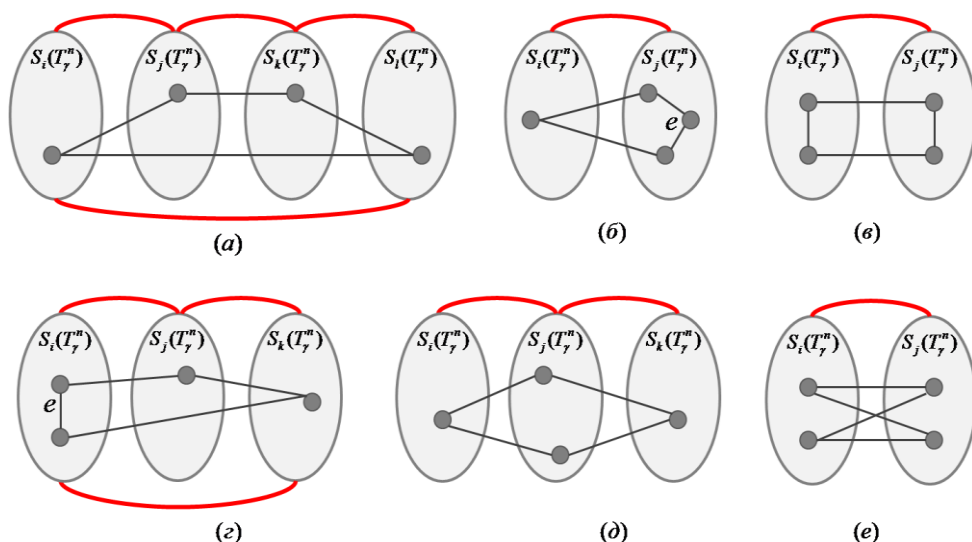


Рис. 3. Формы соединений между поддеревьями множества $S(T_\gamma^{(n)})$, приводящие к циклам длины четыре в кластере $G_\gamma^{(n)}$.

Рассмотрим варианты появления циклов длины 4 в кластере $G_\gamma^{(n)}$.

1. Пусть поддеревья $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ и $S_k(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены и $\psi_{\gamma,n}(i, j) = 1$, $\psi_{\gamma,n}(j, k) = 1$ (рис.3 (a)). Если существует поддерево $S_l(T_\gamma^{(n)})$ такое, что $\psi_{\gamma,n}(k, l) = 1$ и $\psi_{\gamma,n}(i, l) = 1$, то формируется $p^{4(\gamma-1)}$ циклов. Число таких поддеревьев равно $TreeCycles(T_\gamma^{(n)}, 4)$, следовательно число циклов равно

$$TreeCycles(T_\gamma^{(n)}, 4) p^{4(\gamma-1)}. \quad (9)$$

2. Пусть три вложенных поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ и $S_k(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены и кластер $M_{\gamma-1}^{(l+i)}$, соответствующий

поддереву $S_i(T_\gamma^{(n)})$, содержит ребро e (рис.3 (з)). Тогда каждая пара вершин из $S_j(T_\gamma^{(n)})$ и $S_k(T_\gamma^{(n)})$ образует с e цикл, т.е. добавляется $p^{2(\gamma-1)}$ новых циклов. Число таких циклов равно

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\dots p \\ i < j < k}} \left(2 * \psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(j,k)\psi_{\gamma,n}(i,k) \left(|E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| + |E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})| + |E(M_{\gamma-1}^{(l+k)})| \right) \right) p^{2(\gamma-1)}. \quad (10)$$

3. Пусть 2 вложенных поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены и поддерево $S_j(T_\gamma^{(n)})$ имеет соединение длины 2 (рис.3 (б)). Тогда каждая вершина из $S_i(T_\gamma^{(n)})$ образует с e цикл, всего $p^{(\gamma-1)}$ циклов, т.е. число таких циклов равно

$$\sum_{\substack{i,j=1\dots p \\ i < j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) \left(|E_2(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| + |E_2(M_{\gamma-1}^{(l+j)})| \right) \right) p^{(\gamma-1)}. \quad (11)$$

4. Пусть 2 вложенных поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены и поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$ и $S_j(T_\gamma^{(n)})$ содержат ребро (рис.3 (в)). Число таких циклов равно

$$\sum_{\substack{i,j=1\dots p \\ i < j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) 2 \left(|E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})| |E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})| \right) \right). \quad (12)$$

5. Пусть вложенные поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$ и $S_j(T_\gamma^{(n)})$, а также $S_j(T_\gamma^{(n)})$ и $S_k(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены (рис.3 (д)), число таких циклов равно

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\dots p \\ i < j < k}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(j,k) + \psi_{\gamma,n}(i,k)\psi_{\gamma,n}(k,j) + (\psi_{\gamma,n}(i,j)\psi_{\gamma,n}(i,k)) \frac{p^{3(\gamma-1)}(p^{(\gamma-1)} - 1)}{2} \right). \quad (13)$$

6. Пусть 2 вложенных поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$, $S_j(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены (рис.3 (е)), число таких циклов равно

$$\sum_{\substack{i,j=1\dots p \\ i < j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) \left(\frac{p^{(\gamma-1)}(p^{(\gamma-1)} - 1)}{2} \right)^2 \right). \quad (14)$$

Утверждение 2 доказано.

Для сети $G_{p,\Gamma}$ будем иметь $Cycles(G_{p,\Gamma}, 4) = Cycles(M_{\Gamma}^{(1)}, 4)$.

Рассмотрим алгоритм подсчета по приведенной формуле (8). Как было рассмотрено выше, все $|E_2(M_{\gamma}^{(i)})|$, а следовательно и все $|E(M_{\gamma}^{(i)})|$, $1 \leq \gamma \leq \Gamma$, $1 \leq i \leq p^{\Gamma-\gamma}$, вычисляются перед началом работы алгоритма, что требует $O(Np^2)$. Время вычисления выражения (9) $O(p^4)$, выражения (11), (12) и (14) $O(p^2)$, а для вычисления выражения (10) и (13) $O(p^3)$. Таким образом время работы алгоритма вычисления числа циклов длины 4 по выражению (8) удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{cases} F(\gamma) = 0, & \gamma = 0 \\ F(\gamma) = p^2 + p^3 + p^4 + pF(\gamma - 1), & \gamma > 0, \end{cases}$$

где через $F(\gamma)$, обозначена сложность $Cycles(M_{\gamma}^{(n)}, 4)$, $1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$. Решив его, получаем $F(\gamma) = p^2(p^{\gamma} - 1)/(p - 1) + \gamma p^2(p^3 - 1)/(p - 1)$. Для уровня $\gamma = \Gamma$ имеем $O(p^{\Gamma+1} + \Gamma p^4) = O(Np + \log_p N p^4)$. С учетом вычислений $|E_2(M_{\gamma}^{(i)})|$, время работы алгоритма подсчета $Cycles(G_{p,\Gamma}, 4)$ равно $O(Np^2) + O(Np + \log_p N p^4) = O(Np^2 + \log_p N p^4)$. Заметим, что индекс ветвления p является константой и определяется перед вычислением, что дает оценку $O(N + \log_p N)$ для всего алгоритма.

Существуют универсальные формулы для числа циклов заданной длины k , в которых подсчитываются все замкнутые маршруты длины k для различных подмножеств вершин графа [6]. Само перечисление указанных подмножеств осуществляется со сложностью $O(n^k)$ или $O(n^{k-1})$, в данном случае $O(N^4)$.

	Размер сети	Количество циклов порядка 4	Время работы переборного алгоритма	Время работы алгоритма с использованием дерева связи
$G_{2,5}$	32	102795	100мс	17мс
$G_{2,7}$	128	6795521	8с, 800мс	18мс
$G_{2,10}$	1 024	$\approx 33.88 * 10^9$	1ч	20мс
$G_{2,20}$	1 048 576	$\approx 9 * 10^{18}$	-	2с, 965мс
$G_{2,25}$	33 554 432		-	1м, 23с, 465мс

$G_{3,15}$	14 348 907		-	27с, 46мс
$G_{5,11}$	48 828 125		-	4м, 13с, 244мс

Таблица 1. Время вычисления числа циклов длины 4 для регулярных блочно - иерархических сетей $G_{p,\Gamma}$, при различных p и Γ

Таким образом, в таблице 1 приведены результаты вычислений алгоритма подсчета циклов порядка четыре, полученные с использованием предложенного алгоритма и переборного алгоритма. Как видно из таблицы, использование данного алгоритма позволяет исследовать сети, число узлов которых существенно больше 10^7 .

Литература

1. Albert R, Barabási A-L Statistical mechanics of complex networks. Rev. Mod. Phys. 74: 47–97. (2002).
2. V.A. Avetisov, A.V. Chertovich, S.K. Nechaev, O.A. Vasilyev. On spectra of random hierarchical networks. Stat. Mech: Theory and Exper. 07 07008 (2009).
3. В.А. Аветисов, А.Х. Бикулов, О. А. Васильев, С. К. Нечаев, А. В Чертович. О некоторых физических приложениях случайных иерархических матриц. ЖЭТФ 136(3) 566 (2009); V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, O. A. Vasilyev, S. K. Nechev, and A. V. Chertovich, JETP, 109(3) 485 (2009).
4. С. Аветисян, А. Кочарян «О регулярных блочно-иерархических сетях и их свойствах» ...Ученые записки 1(27), 2013г., АрГУ.
5. S. Avetisyan, A. Kocharyan. The System of Generation of Random Networks and Computation of Their Topological Properties. 9-th International Conference of Computer Science and Information Technologies (CSIT-2013), Yerevan 2013, pp. 381-384.
6. Воронаев А.Н., Вывод явных формул для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах. // Информационные процессы, Том 11, № 1, 2011, стр. 90–113.

Չորս երկարությամբ ցիկլերի մասին ռեգուլյար
բլոկ-հիերարխիկ ցանցերում

Ս. Ավետիսյան, Ա.Քոչարյան

Ամփոփում

Տվյալ աշխատանքը հանդիսանում է [4]–ի շարունակություն, որում դիտարկվել է ռեգուլյար բլոկ-հիերարխիկ ցանցերի դասը, և նկարագրվել են նոր ալգորիթմներ, որոնք թույլ են տվել էապես մեծացնել հետազոտվող ցանցերի չափը: Տվյալ աշխատանքում նկարագրված է ռեգուլյար բլոկ-հիերարխիկ ցանցերի դասում 4 երկարությամբ ցիկլերի

քանակի հաշվարկման ալգորիթմ: Ի տարբերություն ցիկլերի քանակի հաշվարկման հայտնի ալգորիթմների [6], դիտարկվող դասի ցանցերի համար ալգորիթմը ավելի էֆֆեկտիվ է ինչպես արագագործության, այնպես էլ համակարգչի օպերատիվ հիշողության օգտագործման տեսանկյունից: Ալգորիթմը իրականացված է մեր կողմից մշակված համակարգում [5], որը ուղղված է պատահական բլոկ-հիերարխիկ ցանցերի էֆֆեկտիվ իմիտացիային:

On Cycles of Length Four in Regular Block-Hierarchical Networks

S.Avetisyan, A.Kocharyan

Summary

The current work is a continuation of the work [4], in which is considered a class of regular Block-Hierarchical networks, and the new algorithms of computation of the network properties are described. The current work describes an algorithm of computation the number of cycles of length 4 in the class of regular Block-Hierarchical networks. In contrast to the known algorithms of calculating the number of cycles [6], the algorithm for considered class of networks is effective both in terms of time, and the operative memory it uses. The algorithm is implemented in the system developed by us [5], which is oriented towards an effective simulation of random Block-Hierarchical networks.