

УДК: 517.9

Математика

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Т. Арутюнян

Доказывается, что ряд Фурье абсолютно непрерывной функции f по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля в случае некоторых краевых условий равномерно сходится к функции f , а в случае других краевых условий появляются некоторые добавки.

§1. Введение и формулировка результата.

Обозначим через L q, α, β краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} ly \equiv -y'' + q & x & y = \mu y, & 0 < x < \pi, \mu \in \mathbb{C}, & 1 \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, & \alpha \in [0, \pi], & 2 \\ y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, & \beta \in [0, \pi], & 3 \end{cases}$$

где $q \in L^1_R [0, \pi]$, т.е. q есть действительная, суммируемая по Лебегу функция на $[0, \pi]$.

Через $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu, \beta)$ (иногда, для краткости, мы пишем $\varphi(x, \mu)$ и $\psi(x, \mu)$) обозначим решения уравнения (1) удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0, \mu, \alpha) = \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \mu, \alpha) = -\cos \alpha, \quad 4$$

$$\psi(\pi, \mu, \beta) = \sin \beta, \quad \psi'(\pi, \mu, \beta) = -\cos \beta. \quad 5$$

Согласно формуле Лиувилля, вронскиан

$$\omega_{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, \mu, \alpha) \psi'(x, \mu, \beta) - \varphi'(x, \mu, \alpha) \psi(x, \mu, \beta) \quad 6$$

не зависит от x . Хорошо известно (см. [1], [2], [3], [4]), что при указанных условиях L q, α, β имеет счетное множество простых, действительных собственных значений, которые являются нулями функции ω и которые мы будем обозначать $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, стараясь подчеркнуть их зависимость от величин q, α, β . Легко видеть, что собственные функции, соответствующие собственному значению μ_n , получаются из решений $\varphi(x, \mu, \alpha)$ и $\psi(x, \mu, \beta)$, при $\mu = \mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е.

$\varphi_n(x) = \varphi(x, \mu_n, \alpha)$ և $\psi_n(x) = \psi(x, \mu_n, \beta)$. Поскольку собственные значения все простые, то φ_n и ψ_n линейно зависимы, т.е. существуют постоянные $c_n = c_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, такие, что

$$\varphi_n(x) = c_n \psi_n(x). \quad (7)$$

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться также нормированными собственными функциями h_n , в качестве которых можно взять, например,

$$h_n = \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|} \quad \left(\|h_n\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi |h_n(x)|^2 dx = 1 \right).$$

Через $AC(a, b)$ обозначаем множество абсолютно непрерывных функций, определенных на отрезке a, b .

Рассмотрим дифференциальный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(0, \pi)$, порожденный дифференциальным выражением l (см. (1)) на области определения

$$D_L = \{f : f, f' \in AC(0, \pi), lf \in L^2(0, \pi), f(0) \cos \alpha + f'(0) \sin \alpha = 0, \\ f(\pi) \cos \beta + f'(\pi) \sin \beta = 0\}. \quad 8$$

Известно (см. [5]), что этот оператор будет самосопряженным. Его мы также будем обозначать $L(q, \alpha, \beta)$. Одна из основных теорем спектральной теории звучит так ([5], стр. 90)

Теорема 1. Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.

Теорема 1 оставляет открытым вопрос о возможности разложения в ряд по собственным функциям оператора $L(q, \alpha, \beta)$ функций, не принадлежащих области определения этого оператора. В [3] (см. стр. 19) доказана такая теорема.

Теорема 2. Пусть $q \in L^2_R(0, \pi)$ и $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, т.е. $\sin \alpha \neq 0$ и $\sin \beta \neq 0$.

Тогда всякая функция из $AC(0, \pi)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям самосопряженного оператора $L(q, \alpha, \beta)$.

Вопрос, на который мы хотим ответить звучит так: "Верна ли теорема 2 при $q \in L^1_{\mathbb{R}} [0, \pi]$ и $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi]$?" Ответ, вообще говоря, отрицательный, а точнее мы доказываем следующую теорему

Теорема 3. Пусть $q \in L^1_{\mathbb{R}} [0, \pi]$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi]$. Тогда

1. Система собственных функций задачи (оператора) $L_{q, \alpha, \beta}$ полна в $L^2 [0, \pi]$.

2. Пусть $f \in AC [0, \pi]$, тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(h_n) h_n x$ сходится равномерно на $[0, \pi]$, причем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} \left| f(x) + C f(\alpha, \beta) - \sum_{n=0}^N f(h_n) h_n x \right| = 0, \quad (9)$$

где постоянная $C = C(f, \alpha, \beta)$ определяется следующим образом

$$C f(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha, \beta \in [0, \pi], \\ f(0), & \text{если } \alpha = \pi, \beta \in [0, \pi], \\ f(\pi), & \text{если } \beta = 0, \alpha \in [0, \pi], \\ f(0) + f(\pi), & \text{если } \alpha = \pi, \beta = 0. \end{cases}$$

§2. Некоторые предварительные результаты.

Через $y_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, обозначим решения уравнения $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= 0, & y_3(\pi) &= 1, & y_4(\pi) &= 0, \\ y_1'(0) &= 0, & y_2'(0) &= 1, & y_3'(\pi) &= 0, & y_4'(\pi) &= 1. \end{aligned} \quad 10$$

Существование, единственность и аналитическая (целая) зависимость этих решений и их производных $y_i'(x, \lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, от λ (и, следовательно, от $\mu = \lambda^2$) при $q \in L^1_{\mathbb{R}} [0, \pi]$ доказаны в [6] (см. также [1]-[3], [5], [7]). Там же получены асимптотические формулы для этих решений и их производных

y_i', x, λ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, которые несколько уточняют аналогичные формулы, приведенные в [1]-[3], [5], [7] и других работах.

Поскольку решения φ и ψ выражаются через решения y_1, y_2, y_3, y_4 формулами

$$\varphi(x, \lambda^2, \alpha) = y_1(x, \lambda) \sin \alpha - y_2(x, \lambda) \cos \alpha,$$

$$\psi(x, \lambda^2, \beta) = y_3(x, \lambda) \sin \beta - y_4(x, \lambda) \cos \beta,$$

то применяя оценки (1.10)-(1.17) из работы [6], получаем асимптотические формулы (при $|\lambda| \rightarrow \infty$)

$$\varphi(x, \lambda^2, \alpha) = \cos \lambda x \sin \alpha - \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \cos \alpha + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|}\right) \sin \alpha + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|^2}\right) \cos \alpha, \quad 11_1$$

$$\psi(x, \lambda^2, \beta) = \cos \lambda(\pi - x) \sin \beta - \frac{\sin \lambda(\pi - x)}{\lambda} \cos \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|^2}\right) \cos \beta, \quad 11_2$$

$$\varphi'(x, \lambda^2, \alpha) = -\lambda \sin \lambda x + O(e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}) \sin \alpha - \left(\cos \lambda x + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|}\right) \right) \cos \alpha, \quad (1_3)$$

$$\psi'(\lambda^2, \beta) = \left(\sin \lambda(\pi - x) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \right) \sin \beta + \left(\cos \lambda(\pi - x) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \right) \cos \beta. \quad (1_4)$$

Из этих оценок для вронскиана $\omega \mu$ (см. (6)) получаем оценку (при больших $|\lambda|$)

$$\begin{aligned} \omega(\lambda^2) &= -\varphi(x, \lambda^2, \alpha) \cos \beta - \varphi'(x, \lambda^2, \alpha) \sin \beta = \lambda \sin \lambda \pi \sin \alpha \sin \beta + \\ &+ \cos \lambda \pi \sin \beta - \alpha + \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \cos \alpha \cos \beta + O(e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}) \sin \alpha \sin \beta + \\ &+ O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right) \sin \alpha \cos \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right) \cos \alpha \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|^2}\right) \cos \alpha \cos \beta \quad 12 \end{aligned}$$

Пусть $\square$ есть множество всех целых чисел. Обозначим через $\square_{\frac{1}{6}}$ множество всех комплексных чисел, удаленных от нулей функций $\sin \pi z$ и $\cos \pi z$ не менее, чем на $\frac{1}{6}$, т.е. $\square_{\frac{1}{6}} = \left\{ z \in \square : \left| z - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{1}{6}, n \in \square \right\}$.

Лемма 2.1. Если $\lambda \in \square_{\frac{1}{6}}$, то

$$|\sin \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}, \quad |\cos \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}, \quad 13$$

Доказательство этой леммы очень похоже на доказательство аналогичной леммы из [7] и мы его опускаем.

Лемма 2.2. При $\lambda \in \square_{\frac{1}{6}}$ и $|\lambda| > \lambda^*$, где λ^* достаточно большое положительное число, имеют место оценки

$$\left| \omega \lambda^2 \right| \geq \begin{cases} C_1 |\lambda| e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}, & \text{если } \alpha, \beta \in (0, \pi), \\ C_2 e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}, & \text{если } \alpha = \pi, \beta \in (0, \pi) \text{ или } \beta = 0, \alpha \in (0, \pi), \\ C_3 \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}, & \text{если } \alpha = \pi, \beta = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{matrix}$$

где C_i , $i = 1, 2, 3$, некоторые положительные числа.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, т.е. $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$. Тогда (12) можно записать в виде (при $|\lambda| > \lambda^*$)

$$\omega \lambda^2 = \lambda \sin \lambda \pi \sin \alpha \sin \beta \left[1 + O \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right] \quad (17)$$

и, учитывая (13), получим первое неравенство леммы 2.2 (при больших $|\lambda|$, $1 < 1 + O \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) < 2$ и в качестве C_1 можно взять $\frac{1}{7} \sin \alpha \sin \beta$). Во втором

случае $C_2 = \frac{1}{7} |\sin \beta - \alpha|$ и в третьем случае $C_3 = \frac{1}{7}$. Лемма 2.2 доказана.

В дальнейшем будем использовать точку как обозначение производной по μ , т.е. $\dot{f}_{x,\mu} = \frac{\partial f_{x,\mu}}{\partial \mu}$.

§3. Полнота и разложение по собственным функциям.

Рассмотрим неоднородную задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} ly \equiv -y'' + q(x)y = \mu y - f(x), & 0 < x < \pi, \mu \in \mathbb{C}, \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, & \alpha \in [0, \pi], \\ y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, & \beta \in [0, \pi], \end{cases} \quad 18$$

где $f \in L^1_{[0,\pi]}$, а $q \in L^1_{[0,\pi]}$. Хорошо известно (см., например, [1], [5]),

что решение этой задачи дается формулой (мы обозначаем его $y(x, \mu, f)$)

$$y(x, \mu, f) = \frac{1}{\omega(\mu)} \left\{ \psi(x, \mu, \beta) \int_0^x \varphi(\xi, \mu, \alpha) f(\xi) d\xi + \varphi(x, \mu, \alpha) \int_x^\pi \psi(\xi, \mu, \beta) f(\xi) d\xi \right\}. \quad 19$$

Отсюда видно, что решение $y(x, \mu, f)$ (при фиксированных x и f) есть мероморфная функция от параметра μ , причем полюсы этой функции есть нули $\omega(\mu)$, т.е. собственные значения μ_n , $n=0,1,2,\dots$, задачи $L(q, \alpha, \beta)$.

Лемма 3.1. Для вычета функции $y(x, \mu, f)$ в полюсе μ_n , $n=0,1,2,\dots$ имеет место формула:

$$\operatorname{Res}_{\mu=\mu_n} y(x, \mu, f) = f, h_n h_n(x). \quad 20$$

Доказательство этой формулы по существу имеется в [3], стр. 20.

Лемма 3.2. Если $f, h_n = 0$ при всех $n=0,1,2,\dots$, то $y(x, \mu, f)$ есть целая функция от μ .

Доказательство. Если все вычеты мероморфной функции (у которой кроме простых полюсов других особенностей нет) равны нулю, то эта функция аналитическая, а в нашем случае - целая.

Лемма 3.3. При достаточно больших $|\lambda|$ ($|\lambda| > \lambda^*$) имеет место оценка:

$$\left| y(x, \lambda^2, f) \right| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \int_0^{\pi} f(t) dt}{|\omega \lambda^2|} \left\{ \sin \alpha \sin \beta + \frac{\sin \alpha}{|\lambda|} O(1) + \frac{\sin \beta}{|\lambda|} O(1) + \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{|\lambda|^2} O(1) + O\left(\frac{1}{|\lambda|^3}\right) \right\} \quad 21$$

Доказательство. Используя неравенства $|\sin \lambda x| \leq e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}$, $|\cos \lambda x| \leq e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}$ и асимптотические формулы (11₁) и (11₂) из (19) получаем (заметим, что $x \in [0, \pi]$):

$$\left| y(x, \lambda^2, f) \right| \leq \frac{1}{|\omega \lambda^2|} \left\{ \left| \psi(x, \lambda^2) \right| \max_{t \in [0, x]} \left| \varphi(t, \lambda^2) \right| \int_0^x |f(t)| dt + \left| \varphi(x, \lambda^2) \right| \max_{t \in [x, \pi]} \left| \psi(t, \lambda^2) \right| \cdot \right. \\ \left. \cdot \int_x^{\pi} |f(t)| dt \right\} \leq \frac{1}{|\omega \lambda^2|} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi - x} \left(\sin \beta + \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|} + C_3 \frac{\sin \beta}{|\lambda|} + C_4 \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|^2} \right) \cdot \\ \cdot e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \left(\sin \alpha + \frac{|\cos \alpha|}{|\lambda|} + C_1 \frac{\sin \alpha}{|\lambda|} + C_2 \frac{|\cos \alpha|}{|\lambda|^2} \right) \int_0^x |f(t)| dt + \\ + e^{|\operatorname{Im} \lambda| x} \left(\sin \alpha + \frac{|\cos \alpha|}{|\lambda|} + C_1 \frac{\sin \alpha}{|\lambda|} + C_2 \frac{|\cos \alpha|}{|\lambda|^2} \right) e^{|\operatorname{Im} \lambda| (\pi - x)} \cdot \\ \cdot \left(\sin \beta + \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|} + C_3 \frac{\sin \beta}{|\lambda|} + C_4 \frac{|\cos \beta|}{|\lambda|^2} \right) \int_x^{\pi} |f(t)| dt \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \int_0^{\pi} |f(t)| dt}{|\omega \lambda^2|} \cdot \\ \cdot \left\{ \sin \alpha \sin \beta + \frac{\sin \alpha}{|\lambda|} O(1) + \frac{\sin \beta}{|\lambda|} O(1) + \frac{\cos \alpha \cos \beta}{|\lambda|^2} O(1) + O\left(\frac{1}{|\lambda|^3}\right) \right\}.$$

Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. При $\lambda \in \square_{\frac{1}{6}}$ и $|\lambda| > \lambda^*$ имеет место оценка

$$|y(x, \lambda^2, f)| \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad 22$$

равномерно по всем $x \in [0, \pi]$.

Доказательство. Заметим, что оценка (21) зависит от α , β и заметим, что более подробное обозначение для решения задачи (18)-(2)-(3) могло быть $y(x, \mu, f, \alpha, \beta)$. Поэтому разберем 3 случая.

I случай: $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$. Тогда при $\lambda \in \square_{\frac{1}{6}}$ для $\omega(\lambda^2)$ имеет место оценка (14) и из (21) получаем, что

$$|y(x, \lambda^2, f)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \int_0^\pi f(t) dt}{|\lambda| e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}} \tilde{C} \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

II случай: $\alpha = \pi$, $\beta \in [0, \pi]$ или $\beta = 0$, $\alpha \in [0, \pi]$. В этом случае имеет место оценка (15) и из (21) получаем

$$|y(x, \lambda^2, f)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \int_0^\pi f(t) dt}{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}} O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

В третьем случае $\alpha = \pi, \beta = 0$ имеем (см. (16))

$$|y(x, \lambda^2, f)| \leq \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} \int_0^\pi f(t) dt}{\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}} O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right) \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Лемма 3.4 доказана.

Лемма 3.5. Система собственных функций h_n задачи (оператора) $L(q, \alpha, \beta)$ полна в $L^2[0, \pi]$.

Доказательство. Система h_n называется полной в $L^2[0, \pi]$, если из $f, h_n = 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ следует, что $f(x) = 0$ почти всюду (п.в.) на $[0, \pi]$. В лемме 3.2 мы доказали, что, при этом условии, $y(x, \mu, f)$ есть целая функция, а из леммы 3.4 следует, что эта целая функция на

окружностях с центром в начале координат и находящихся в множестве $\square_{\frac{1}{6}}$ удовлетворяет неравенствам (22). Согласно теореме о максимуме модуля (см. [8], стр. 174), отсюда следует, что функция $y_{x,\mu,f}$ ограничена в любом круге, ограниченном окружностью $\Gamma_N = \left\{ \mu : \mu \in C, |\mu| \leq \left(n + \frac{1}{4} \right)^2 \right\}$ и, следовательно, ограничена на всей плоскости. Согласно теореме Лиувилля (см. [8], стр.94) она постоянна. Но согласно (22) эта постоянная стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$ $|\sqrt{\mu}| \rightarrow \infty$, т.е. $y_{x,\mu,f} \equiv 0$. Но поскольку $y_{x,\mu,f}$ есть решение уравнения (18), то отсюда следует, что $f(x) = 0$ п.в. на $[0, \pi]$. Лемма 3.5 доказана и тем самым доказана часть 1) теоремы 3.

Перейдем теперь к теоремам о разложении по собственным функциям.

Лемма 3.6. Если $f \in AC[0, \pi]$, то выражение (19) для $y_{x,\mu,f}$ можно записать в виде

$$y_{x,\mu,f} = \frac{1}{\mu} f(x) + \frac{1}{\mu} Z_1(x, \mu, f) + \frac{1}{\mu} Z_2(x, \mu, f) \quad 23$$

где

$$Z_1(x, \mu, f) = \frac{1}{\omega \mu} \left\{ \psi(x, \mu) \int_0^x \phi'(t, \mu) f'(t) dt + \phi(x, \mu) \int_x^\pi \psi'(t, \mu) f'(t) dt \right\} \quad 23_1$$

$$Z_2(x, \mu, f) = \frac{1}{\omega \mu} \left[f(0 \cos \alpha) \psi(x, \mu) + [f(\pi \cos \beta)] \phi(x, \mu) + \right. \\ \left. + \psi(x, \mu) \int_0^x q(t, \mu) f(t) dt + \phi(x, \mu) \int_x^\pi q(t, \mu) f(t) dt \right] \quad 23_2$$

Доказательство этой леммы имеется в [3], стр. 21. Из (19) следует, что Z_2 можно записать в виде

$$Z_2 = f(0 \cos \alpha) \frac{\psi(x, \mu)}{\omega \mu} - f(\pi \cos \beta) \frac{\phi(x, \mu)}{\omega \mu} + y_{x,\mu,qf}.$$

Рассмотрим контурный интеграл (с обходом против часовой стрелки)

$$I_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} y(x, \mu, f) \quad (24)$$

Легко видеть, что в терминах параметра λ $\lambda^2 = \mu$ $\Gamma_N = \left\{ \lambda : |\lambda| = N + \frac{1}{4} \right\}$ и, следовательно $\Gamma_N \subset \square_{\frac{1}{6}}$ и на Γ_N выполняются неравенства (14), (15), (16).

Согласно теореме о вычетах (см. [8], стр. 111) интеграл (24) равен сумме вычетов функции $y(x, \mu, f)$ в полюсах, лежащих в области, ограниченной окружностью Γ_N , т.е., согласно лемме 3.1,

$$I_N = \sum_{n=0}^{\infty} f(h_n) h_n(x) \quad (25)$$

Интеграл по Γ_N от правой части (23) равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} f(x) \int_{\Gamma_N} \frac{1}{\mu} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} Z_1(x, \mu, f) d\mu + f(0) \cos \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\psi(x, \mu)}{\mu \omega(\mu)} d\mu - \\ & - f(\pi) \cos \beta \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\varphi(x, \mu)}{\mu \omega(\mu)} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{\mu} y(x, \mu, qf) d\mu = f(x) + r_N(x) \end{aligned} \quad (26)$$

В [3] доказано, что при $\sin \alpha \neq 0$ и $\sin \beta \neq 0$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} |r_N(x)| = 0$, поэтому, в указанном случае, ряд Фурье функции $f \in AC[0, \pi]$ сходится равномерно к f , т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f(h_n) h_n(x) \right| = 0.$$

Из $f \in AC[0, \pi]$ и $q \in L^1_R[0, \pi]$ следует, что $qf \in L^1_C[0, \pi]$ и, согласно лемме 3.4, имеет место оценка $|y(x, \mu, qf)| \leq \frac{C}{|\lambda|}$ при достаточно больших λ

$|\lambda| > \lambda^*$, принадлежащих $\square_{\frac{1}{6}}$. Т.к. $\Gamma_N \subset \square_{\frac{1}{6}}$, то на Γ_N эта оценка имеет

место, откуда следует что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{\mu} y(x, \mu, qf) d\mu = 0$ равномерно по

$x \in 0, \pi$ при всех $\alpha \in 0, \pi$ и $\beta \in 0, \pi$. В случае $\sin \alpha = 0, \sin \beta \neq 0$, т.е. $\alpha = \pi, \beta \in 0, \pi$ из (11₁) следует, что

$$\varphi(x, \lambda^2, \pi) = \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right), \quad 27$$

$$\omega(\lambda^2) = -\cos \lambda \pi \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right), \quad 28$$

и при $\mu \in \Gamma_N$ имеет место оценка (13), т.е.

$$\frac{1}{|\mu|} \left| \frac{\varphi(x, \mu, \pi)}{\omega(\mu)} \right| \leq \frac{C e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{C |\lambda| e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi} |\mu|} \leq \frac{C}{|\mu|^{3/2}} \text{ и поэтому}$$

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\varphi(x, \mu)}{\mu \omega(\mu)} d\mu \rightarrow 0 \quad 29$$

при $N \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in 0, \pi$.

В то же время из (11₂) следует, что

$$\psi(x, \mu, \beta) = \cos \lambda(\pi - x) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right) \quad 30$$

Поэтому

$$\frac{\psi(x, \mu, \beta)}{\omega(\mu)} = \frac{\cos \lambda(\pi - x) \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right)}{-\cos \lambda \pi \sin \beta + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right)} = \frac{\cos \lambda(\pi - x) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda|(\pi - x)}}{|\lambda|}\right)}{-\cos \lambda \pi + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right)} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos \lambda \pi \cos \lambda x + \sin \lambda \pi \sin \lambda x + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi - x}}{|\lambda|}\right)}{-\cos \lambda \pi + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}}{|\lambda|}\right)} = \frac{\cos \lambda \pi \left(\cos \lambda x + \frac{\sin \lambda \pi \sin \lambda x}{\cos \lambda \pi} + O\left(\frac{e^{-|\operatorname{Im} \lambda| x}}{|\lambda|}\right) \right)}{-\cos \lambda \pi \left(1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right)} = \\
& = -\cos \lambda x + \frac{\sin \lambda \pi}{\cos \lambda \pi} \sin \lambda x + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).
\end{aligned}$$

Разлагая теперь $\cos \lambda x$, $\sin \lambda \pi$, $\sin \lambda x$ в ряд Тейлора и учитывая, что на Γ_N $\cos \lambda \pi$ удовлетворяет оценке $|\cos \pi \lambda| \geq \frac{1}{7} e^{|\operatorname{Im} \lambda| \pi}$ мы можем записать

$$\text{отношение } \frac{\psi(x, \mu, \beta)}{\omega(\mu)} \text{ в виде } \frac{\psi(x, \mu, \beta)}{\omega(\mu)} = -1 + \mu \frac{x^2}{2!} - \mu^2 \frac{x^4}{4!} + \dots + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{\mu} \frac{\psi(x, \mu, \beta)}{\omega(\mu)} d\mu = -1 \quad 31$$

Интегрируя обе стороны (23) по контуру Γ_N , и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f, h_n \quad h_n(x) = f(x) + f(0) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{\mu} Z_1(x, \mu, f) d\mu \quad 32$$

В случае $\sin \beta = 0, \sin \alpha \neq 0$, аналогично получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{\varphi(x, \mu, \alpha)}{\mu \omega(\mu)} d\mu = -1, \quad \text{а интеграл в (31) равен } 0 \text{ и поэтому}$$

получаем аналог (32), где вместо $f(0)$ стоит $f(\pi)$. В случае $\alpha = \pi, \beta = 0$, остаются и $f(0)$ и $f(\pi)$.

Нам осталось доказать, что последний предел в (32) равен нулю. Это делается сочетанием рассуждений приведенных выше и методов, примененных в [3] для случая $\sin \alpha \neq 0, \sin \beta = 0$.

Теорема 3 доказана.

Լիտերատուրա

1. Левитан Б. М., Саргсян И. Г., Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Марченко В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.
3. Юрко В.А., Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. Harutyunyan T. N., The dependence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on boundary conditions, Matematicki Vesnik, № 60, pp. 285-294, 2008.
5. Наймарк М.А., Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968.
6. Арутюнян Т.Н., Овсепян М., О решениях уравнения Штурма-Лиувилля, Математика в высшей школе, т.1, № 3, стр. 59-73, 2005.
7. Poshel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. Acad. Press, 1987.
8. Титчмарш Е., Теория функций, М.: Наука, 1980.

Ըստ Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության
զուգամիտության մասին
Տ.Ն. Հարությունյան

Ամփոփում

Ապացուցվում է որ, որոշ եզրային պայմանների դեպքում, f բացարձակ անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը, ըստ Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական ֆունկցիաների, հավասարաչափ զուգամիտում է f -ին, իսկ որոշ այլ եզրային պայմանների դեպքում f -ին ավելանում են որոշակի հաստատուններ:

On the convergence of expansions in eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem

T. Harutyunyan

Summary

It is proved that the Fourier series of an absolutely continuous function f in eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem in the case of certain boundary conditions converge uniformly to f , and in the case of some other boundary conditions there are some supplements.