

С.О. СИМОНЯН, К.А. ТОРЧЯН

**ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ УНИВЕРСАЛЬНОГО МЕТОДА
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ
ОБРАТНЫХ МАТРИЦ В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ**

Рассмотрены прикладные аспекты универсального метода определения однопараметрических обобщенных обратных матриц в сингулярном случае. Решением модельного примера показана эффективность соответствующих рекуррентных вычислительных схем.

Ключевые слова: однопараметрические обобщенные обратные матрицы, сингулярный случай, дифференциальные преобразования, рекуррентные вычислительные схемы, средства современных информационных технологий.

Введение. В настоящее время всемирные информационные технологии по сравнению с другими сферами проявляют темпы перманентного ускоренного развития, что даёт возможность в самых различных областях человеческой деятельности применять совершенно новые подходы для эффективного решения встречающихся в них задач. Однопараметрические матрицы, их обратные и обобщённые обратные матрицы достаточно часто используются в различных научных исследованиях, прикладных задачах и др.

Известно достаточно большое количество методов для определения обратных и обобщённых обратных числовых матриц [1-5] и др. При определении аналогичных матриц для однопараметрических матриц наблюдается большое отставание. Этот пробел определенным образом заполняет работа [6], в которой разработаны: итерационные методы – Д-аналоги методов Гревилля, блочного разбиения, Грамма-Шмидта, Жордана-Гаусса, сингулярного разложения; прямые методы – Д-аналоги простейшего метода, определения матриц $A^1(t)$ и $A^2(t)$, универсального метода, определения квадратных однопараметрических обобщённых обратных матриц, Д-аналог $L(t) \cdot U(t)$ – разложения, параллельные вычислительные методы; декомпозиционные методы – Д-аналоги простейшего метода, четырех условий Мура-Пенроуза, а также универсального метода.

Для всех этих методов основным математическим аппаратом послужили дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [7]. К тому же при разработке

Д-аналога универсального метода предполагалось, что для однопараметрической матрицы $A(t)_{m \times n}$ имеют место известные условия [6]:

$$A^+(t) = [A^T(t) \cdot A(t)]^{-1} \cdot A^T(t), \text{ если } m > n, \text{ rang } A(t)_{m \times n} = n, \quad (1)$$

$$A^+(t) = A^T(t) \cdot [A(t) \cdot A^T(t)]^{-1}, \text{ если } m < n, \text{ rang } A(t)_{m \times n} = m, \quad (2)$$

или

$$A^T(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^T(t), \text{ если } m > n, \text{ rang } A(t)_{m \times n} = n, \quad (3)$$

$$A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^T(t) = A^T(t), \text{ если } m < n, \text{ rang } A(t)_{m \times n} = m, \quad (4)$$

конечно, при предположении, что существуют матрицы

$$B_1^{-1}(t)_{n \times n} = [A^T(t) \cdot A(t)]^{-1}, \text{ если } m > n, \text{ rang } [A^T(t) \cdot A(t)] = n, \quad (5)$$

$$C_1^{-1}(t)_{m \times m} = [A(t) \cdot A^T(t)]^{-1}, \text{ если } m < n, \text{ rang } [A(t) \cdot A^T(t)] = m \quad (6)$$

соответственно. Следовательно, с учетом (5), (6) из (3), (4) получим

$$B_1(t) \cdot A^+(t) = A^T(t), \text{ если } m > n, \text{ rang } [A^T(t) \cdot A(t)] = n, \quad (7)$$

$$A^+(t) \cdot C_1(t) = A^T(t), \text{ если } m < n, \text{ rang } [A(t) \cdot A^T(t)] = m. \quad (8)$$

Решения модельных примеров с использованием Д-аналогов представлений (7), (8) подтвердили эффективность соответствующих рекуррентных вычислительных схем [6].

В этой работе были представлены также рекуррентные вычислительные схемы при несуществовании условий (5), (6), вместо которых были использованы условия

$$B_2^+(t)_{n \times n} = [A^T(t) \cdot A(t)]^+, \text{ если } m > n, \text{ rang } [A^T(t) \cdot A(t)] < n, \quad (9)$$

$$C_2^+(t)_{m \times m} = [A(t) \cdot A^T(t)]^+, \text{ если } m < n, \text{ rang } [A(t) \cdot A^T(t)] < m, \quad (10)$$

однако прикладные аспекты соответствующих Д-аналогов не были рассмотрены. Настоящая работа посвящена исследованию этих вопросов решением одного модельного примера с учетом того, что при условиях (9), (10) соотношения, аналогичные (7), (8), принимают вид

$$B_2(t) \cdot A^+(t) = A^T(t), \text{ если } m > n, \text{ rang } [A^T(t) \cdot A(t)] < n, \quad (11)$$

$$A^+(t) \cdot C_2(t) = A^T(t), \text{ если } m < n, \text{ rang}[A(t) \cdot A^T(t)] < m. \quad (12)$$

Математический аппарат. Теперь, в соответствии с работой [7] предположим, что для матрицы $A(t)$ с аналитическими элементами имеют место дифференциальные преобразования

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad A(t) = \chi_1(t, t_v, H, A(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (13)$$

где $A(K)$ - матричные дискреты матрицы $A(t)$; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; H - масштабный коэффициент; t_v - центр аппроксимации; символ $\cdot$ - знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\bullet)$ - некоторая аппроксимирующая функция, восстанавливающая оригинал $A(t)$.

Очевидно, что в соответствии с (9), (10) при (13) будут иметь место и дифференциальные преобразования

$$B_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K B_2(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad B_2(t) = \chi_2(t, t_v, H, B_2(K), \quad K = \overline{0, \infty}), \quad (14)$$

$$C_2(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C_2(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \cdot \quad C_2(t) = \chi_3(t, t_v, H, C_2(K), \quad K = \overline{0, \infty}). \quad (15)$$

Теперь, обозначив $A^+(t) \equiv z(t)$, из (11), (12) получим

$$B_2(t) \cdot z(t) = A^T(t), \text{ если } m > n, \quad (16)$$

$$z(t) \cdot C_2(t) = A^T(t), \text{ если } m < n. \quad (17)$$

Перевод (16) из области оригиналов в область дифференциальных изображений приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

при $K=0$:

$$z(0) = B_2^+(0) \cdot A^T(0); \quad (18)$$

при $K=1$:

$$z(1) = B_2^+(0) \cdot [A^T(1) - B_2(1) \cdot z(0)]; \quad (19)$$

при $K=2$:

$$z(2) = B_2^+(0) \cdot [A^T(2) - B_2(1) \cdot z(1) - B_2(2) \cdot z(0)]; \quad (20)$$

при $K=K$:

$$z(K) = B_2^+(0) \cdot [A^T(K) - \sum_{l=1}^K B_2(l) \cdot z(k-l)], \quad (21)$$

причем:

при $K=0$:

$$B_2(0) = A^T(0) \cdot A(0); \quad (22)$$

при $K=1$:

$$B_2(1) = A^T(0) \cdot A(1) + A^T(1) \cdot A(0); \quad (23)$$

при $K=2$:

$$B_2(2) = A^T(0) \cdot A(2) + A^T(1) \cdot A(1) + A^T(2) \cdot A(0); \quad (24)$$

.....
при $K=K$:

$$B_2(K) = \sum_{l=0}^K A^T(l) \cdot A(K-l), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (25)$$

Аналогично, перевод (17) из области оригиналов в область дифференциальных изображений приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

при $K=0$:

$$z(0) = A^T(0) \cdot C_2^+(0); \quad (26)$$

при $K=1$:

$$z(1) = [A^T(1) - z(0) \cdot C_2(1)] \cdot C_2^+(0); \quad (27)$$

при $K=2$:

$$z(2) = [A^T(2) - z(0) \cdot C_2(2) - z(1) \cdot C_2(1)] \cdot C_2^+(0); \quad (28)$$

.....
при $K=K$:

$$z(K) = [A^T(K) - \sum_{l=0}^{K-1} z(l) \cdot C_2(K-l)] \cdot C_2^+(0), \quad (29)$$

причем:

при $K=0$:

$$C_2(0) = A(0) \cdot A^T(0); \quad (30)$$

при $K=1$:

$$C_2(1) = A(0) \cdot A^T(1) + A(1) \cdot A^T(0); \quad (31)$$

при $K=2$:

$$C_2(2) = A(0) \cdot A^T(2) + A(1) \cdot A^T(1) + A(2) \cdot A^T(0); \quad (32)$$

при $K=K$:

$$C_2(K) = \sum_{l=0}^K A(l) \cdot A^T(K-l), \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (33)$$

Замечание 1. Очевидно, что если $m > n$, то целесообразно использование вычислительных схем (18)-(25), ибо порядок фигурирующих в них матричных дискретов $B(l)$, $l = \overline{1, K}$ меньше и, следовательно, меньше количество вычислительных операций. Однако, если $m < n$, то целесообразно использование вычислительных схем (26)-(33) по той же причине. А если $m = n$, то схемы (18)-(25) и (26)-(33) характеризуются одним и тем же объемом вычислительных операций.

Модельный пример. Пусть

$$A(t) = \begin{bmatrix} (1+t) & 0 & (1+t) \\ 0 & (1+t) & 0 \\ (1+t) & 0 & (1+t) \end{bmatrix}, \quad \nexists A^{-1}(t), \exists A^+(t).$$

Тогда при $t_v = 0$, $H=1$ имеем

$$A(0) = A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(K) = [0], \quad \forall K \geq 2.$$

Следовательно:

при $K=0$ и в соответствии с (22):

$$B(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \nexists B^{-1}(0), \exists B^+(0).$$

Тогда

$$B^+(0) = \begin{bmatrix} 0,125 & 0 & 0,125 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,125 & 0 & 0,125 \end{bmatrix}, \quad z(0) = \begin{bmatrix} 0,125 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix};$$

при $K=1$ и в соответствии с (22) и (19):

$$B(1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad z(1) = \begin{bmatrix} -0,25 & 0 & -0,25 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 4-0,25 \end{bmatrix};$$

при $K=2$ и в соответствии с (22) и (20):

$$B(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad z(2) = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix};$$

при $K=3$ и в соответствии с (22) и (21):

$$B(3) = 0, \quad z(3) = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -0,5 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}$$

и т.д.

Таким образом, приближенные маклореновские решения при $K = \overline{0,3}$ имеют вид

$$\begin{aligned} z(t)|_{K=0} &= \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}, \\ z(t)|_{K=1} &= \begin{bmatrix} 0,25 \cdot (1-t) & 0 & 0,25 \cdot (1-t) \\ 0 & (1-t) & 0 \\ 0,25 \cdot (1-t) & 0 & 0,25 \cdot (1-t) \end{bmatrix}, \\ z(t)|_{K=2} &= \begin{bmatrix} 0,25 \cdot (1-t+t^2) & 0 & 0,25 \cdot (1-t+t^2) \\ 0 & (1-t+t^2) & 0 \\ 0,25 \cdot (1-t+t^2) & 0 & 0,25 \cdot (1-t+t^2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$z(t)_{K=3} = \begin{bmatrix} 0,25 \cdot (1-t+t^2-2t^3) & 0 & 0,25 \cdot (1-t+t^2-2t^3) \\ 0 & (1-t+t^2-t^3) & 0 \\ 0,25 \cdot (1-t+t^2-2t^3) & 0 & 0,25 \cdot (1-t+t^2-2t^3) \end{bmatrix},$$

а соответствующие однопараметрические зависимости элементов матрицы $A^+(t) \equiv z(t)$ при $K = \overline{0,3}$ - вид, рис.1 – 4 ($z_{11}(t) = z_{13}(t) = z_{31}(t) = z_{33}(t)$).

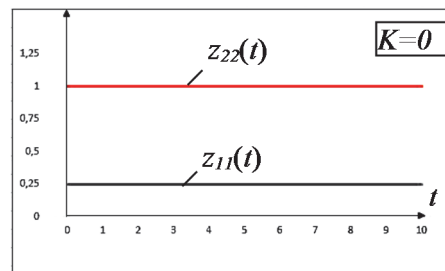


Рис.1

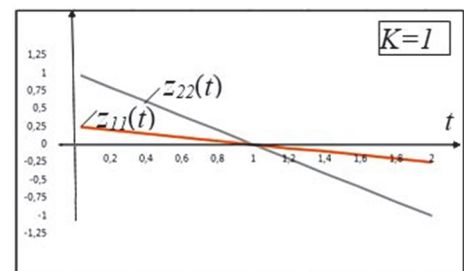


Рис.2

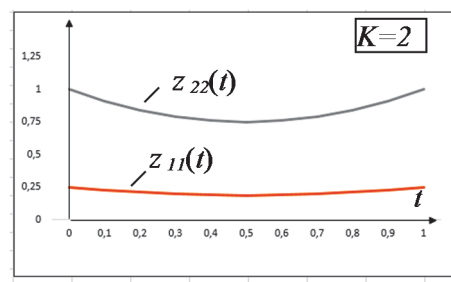


Рис.3

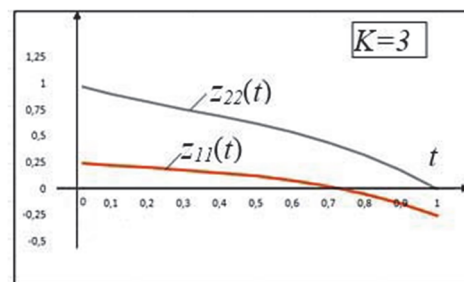


Рис.4

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что к таким же результатам приходим и при использовании вычислительных схем (26)-(33).

Замечание 3. Нетрудно убедиться также, что при $\forall K = \overline{0,3}$ известные условия Мура-Пенроуза точно выполняются в центре аппроксимации $t_v = 0$ (что и должно было быть), а в остальных текущих значениях параметра t - в зависимости от требуемых точностей маклореновских решений.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе для нахождения однопараметрических обобщенных обратных матриц в сингулярном случае рассмотрены прикладные аспекты соответствующих рекуррентных вычислительных схем. В качестве основного математического аппарата использованы дифференциальные преобразования, позволяющие решение рассматриваемой задачи свести к последовательным числовым рекуррентным вычислительным схемам, легко реализуемым средствами современных информационных технологий [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц: - М.: Физматлит, 2010.-560 с.
2. **Ланкастер П.** Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
3. **Campbell S.I., Meyer C.D. JR.** Generalized Inverses of Linear Transformations. – New York: Dover, 2009. – 272 p.
4. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
5. **Ben-Israel A., Greville T.N.E.** Generalized Inverses. Theory and Applications. – A. Wiley-Interscience publication, 2002. – 371 p.
6. **Светлаков А.А.** Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. - Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 385 с.
7. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц. - LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 222 с.
8. **Eric Matthes.** Python crash cours. – Second edition. – 2019.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 16.04.2023.

Ս.Ն. ՄԻՄՈՆՅԱՆ, Կ.Ա. ԹՈՐՉՅԱՆ

ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐԶ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՆՐԱՆՇԱՆԱԿ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՏԵՄԱՆԿՑՈՒՆՆԵՐԸ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԻՆԳՈՒԼՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Դիտարկվել են միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման հանրանշանակ մեթոդի կիրառական տեսանկյունները սինգուլյար դեպքում: Մոդելային օրինակի լուծմամբ ցույց է տրվել համապատասխան անդրադարձ հաշվողական սխեմաների արդյունավետությունը:

Առանցքային բաներ. միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցներ, սինգուլյար դեպք, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, անդրադարձ հաշվողական սխեմաներ, ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցներ:

S.O. SIMONYAN, K.A. TORCHYAN

APPLIED ASPECTS OF THE UNIVERSAL METHOD FOR DETERMINING SINGLE-PARAMETER GENERALIZED INVERSE MATRIXIES IN THE SINGULAR CASE

Applied aspects of the universal method for determining one-parameter generalized inverse matrices in the singular case are considered. By solving a model example, the efficiency of the corresponding recurrent computational schemes is shown.

Keywords: one-parameter generalized inverse matrices, singular case, differential transformations, recurrent computing schemes, means of modern information technologies.