УДК 378.148:53 ***Физика***

МЕТОДИЧЕСКАЯ ЗАМЕТКА О ВЕКТОРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Ал. Алексанян, Г. Никогосян

В данной методической заметке предлагается способ, позволяющий на языке геометрических построений наглядно продемонстрировать принципы термодинамики.

Для того, чтобы судить о пригодности какого-либо метода или подхода при решении той или иной физической задачи, прежде всего следует выявить соответствие характеристик рассматриваемых физических систем и математических моделей, применяемых для описания этих систем. В частности, линейность уравнений, описывающих поведение физических систем, соответствует фактическому наложению (суперпозиции) различных процессов, происходящих в системе. А требование постоянства параметров системы при пространственно-временных сдвигах выделяет класс явлений, описываемых экспоненциальными или синусоидальными функциями. В представленной ниже работе, относящейся к явлениям теплопередачи, применяется принцип наложения, суперпозиции состояний.

Принцип суперпозиции, кроме фактов прямого применения по отношению к состояниям механического движения и электрамагнитным полям, обладает более широким диапазоном, и имеет более глубокие физические проявления в квантовой механике, где понятие состояния физической системы подвергается фундаментальным изменениям, и вся квантовая теория строится на основе идеи вектора состояния. Т.е. каждому динамическому состоянию квантовой системы сопоставляется определенный вектор в абстрактном пространстве комплексных чисел, а каждой динамической переменной-линейный оператор, действующий в этом пространстве. А в качестве основного принципа такого подхода выступает принцип суперпозиции динамических состояний.

Конечно, классическое наложение в корне отличается от квантовой суперпозиции, но математический формализм последнего предоставляет возможности для обобщений, которые и применяются в представленной ниже работе по отношению к тепловым явлениям.

Как известно, весь спектор вопросов и все разнообразие задач, относящихся к процессам теплообмена, в конечном итоге сводится к определенным стандартным ситуациям,на примере которых и можно продемонстрировать сущность предлагаемого подхода.

Пример 1.

Самопроизвольный теплообмен двух веществ с начальными температурами t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$, теплоемкости которых, соответственно $C_1 = m_1 c_1$, $C_2 = m_2 c_2$.

В результате теплового контакта в изолированной системе двух веществ устанавливается окончательная температура, которая в общепринятом изложении фигурирует в уравнении теплового баланса $Q_1 + Q_2 = 0$, где $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{C}_1(\theta - \mathrm{t}_1)$, $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{C}_2(\theta - \mathrm{t}_2)$, так что

$$\theta = \frac{\mathrm{C}_1 \mathrm{t}_1 + \mathrm{C}_2 \mathrm{t}_2}{\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2} \tag{1}$$

Изложенную ситуацию можно интерпретировать на языке геометрических построений[1,2]. С этой целью вводим представление вектора равновесного состояния вещества $\vec{a}$ на двумерной плоскости xOy, (t, O, C), абсолютная величина

$$|\vec{a}| = \mathrm{C}\sqrt{1 + \mathrm{t}^2} \tag{2}$$

которого определяется теплоемкостю и температурой вещества, а ориентация (угол α,составляющий с осью Ox) всецело определяется только температурой *

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \mathrm{X}}) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{t}^2}}, \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{t} \tag{3}$$

Здесь $tg\alpha = t$, $t = Kt^*$, $K = 1\,\text{град}^{-1}$, t^*-температура по Цельсию. Учитывая линейность количественных соотношений, рассматриваемых ниже с целью простоты везде в окончательных выражениях типа $\dfrac{C_1 t_1 + C_2 t_2}{C_1 + C_2} = \theta$ безразмерные величины t и θ можно отождествлять с соответствующими температурами по Цельсию.

Очевидно,что чем выше температура вещества, тем длиннее ее вектор состояния $(t \to \infty, \alpha > 0, |\vec{a}| \to \infty)$ и тем больше угол, который составляет вектор $\vec{\alpha}$ с осью Ox.
$\left(t \to \infty, \cos\alpha \to 0, \alpha \to \dfrac{\pi}{2}\right)$ При $t = 0°C$, $|\vec{a}| = \mathrm{C}, \cos\alpha = 1, \alpha = 0$. При $t > 0°C, \alpha < 0$

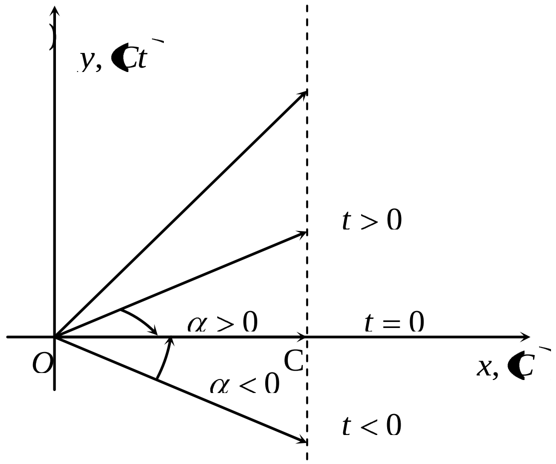

Рис.1

Теперь изобразим векторы начальных равновесных состояний двух веществ $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ на плоскости так, что

$$|\vec{a}_1| = \mathrm{C}_1\sqrt{1+\mathrm{t}_1^2}, \alpha_1 = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{t}_1^2}},$$
$$|\vec{a}_2| = \mathrm{C}_2\sqrt{1+\mathrm{t}_2^2}, \alpha_2 = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{t}_2^2}} : \qquad (4)$$

Сделаем предположение, (которое в дальнейшем полностью подтверждается), согласно которому равновесное состояние в изолированной системе двух веществ, установившееся после процессов теплообмена, отображается вектором, являющимся геометрической суммой векторов начальных равновесных состояний этих веществ

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

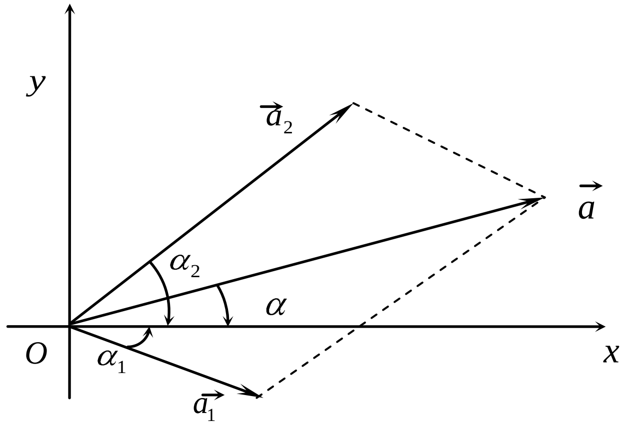

Рис.2

При этом ориентация вектора $\vec{a}$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|\vec{a}_1|\sin\alpha_1 + |\vec{a}_2|\sin\alpha_2}{|\vec{a}_1|\cos\alpha_1 + |\vec{a}_2|\cos\alpha_2} : \qquad (5)$$

Сделанное предположение напоминает фундаментальный принцип суперпозиции состояний квантовой механики. Поэтому, предстоит задача определения длины и ориентации вектора состояния системы из геометрических построений, представленных на рис.2.

Последнее выражение представим в терминах тепловых параметров контактирующих веществ. Учитывая сделанные выше предположения, имеем

$$|\vec{a}_1|\cos\alpha_1 = \mathrm{C}_1\sqrt{1+\mathrm{t}_1^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{t}_1^2}} = \mathrm{C}_1,\ |\vec{a}_1|\cos\alpha_2 = \mathrm{C}_2,$$

$$|\vec{a}_2|\sin\alpha_1 = \mathrm{C}_1\sqrt{1+\mathrm{t}_1^2}\cdot\frac{\mathrm{t}_1}{\sqrt{1+\mathrm{t}_1^2}} = \mathrm{C}_1\mathrm{t}_1,\ |\vec{a}_2|\sin\alpha_2 = \mathrm{C}_2\mathrm{t}_2 \qquad (6)$$

и $$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{C}_1\mathrm{t}_1 + \mathrm{C}_2\mathrm{t}_2}{\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2} = \theta :$$

Т.е.ориентация результирующего вектора состояния системы $\vec{a}$ определяет установивщуюся температуру θ, а его длина

$$|\vec{a}| = \left[a_1^{\,2} + a_2^{\,2} - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\left(\pi - (\alpha_2 + (-\alpha_1))\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \left[(C_1 + C_2)^2 + (C_1 t_1 + C_2 t_2)^2\right]^{1/2} = C_0\sqrt{1+\theta^2}$$

позволяет определить общую теплоемкость системы двух веществ $C_0 = C_1 + C_2$

Пример 2.

Аналогично можно поступить в случае теплообмена в изолированной системе многих веществ,параметры которых(C_1, t_1); (C_2, t_2); …….

Установившееся состояние в системе определяется построением векторной диаграммы теплообмена. Для этого следует лишь измерить величины вектора $\vec{A}$ и угла φ.

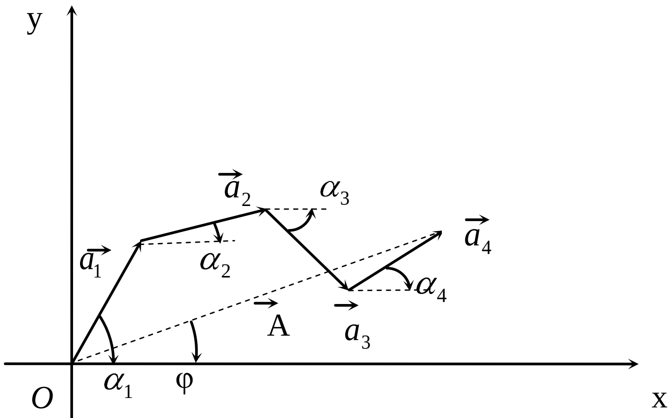

Рис.3

$$\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots.. + \vec{a}_n,$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|\vec{a}_1|\sin\alpha_1 + |\vec{a}_2|\sin\alpha_2 + \ldots. + |\vec{a}_n|\sin\alpha_n}{|\vec{a}_1|\cos\alpha_1 + |\vec{a}_2|\cos\alpha_2 + \ldots. + |\vec{a}_n|\cos\alpha_n} = \frac{C_1 t_1 + C_2 t_2 + \ldots. + C_n t_n}{C_1 + C_2 + \ldots. + C_n} = \theta \quad (7)$$

До сих пор мы оперировали с векторами равновесных состояний физических систем, которые отображают лишь установившиеся состояния, достигаемые процессами теплообмена. Можно убедится, что в предложенной терминалогии вертикальные векторы конечной длины несопоставимы с какими-либо векторами установившихся состояний, так как при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 0$, т.е. $t \to \infty$, что несовместимо с фактом конечности длины вектора состояния. Вертикальными векторами можно изображать только тепловые процессы, происходящие в физических системах между равновесными состояниями.

Пример 3.

С целью подтверждения сказанного рассмотрим процесс нагревания тела с теплоемкостью C и начальной температурой t, подводом количества теплоты Q.

Построим векторную диаграмму теплового баланса, проведя вектор состояния тела $\vec{a}$ с абсолютной величиной $|\vec{a}| = C\sqrt{1+t^2}$ под углом α к оси *Ox*, ($\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$), а также вертикальный, направленный вверх вектор процесса подвода теплоты $\vec{Q}$ с $|\vec{Q}| = Q$,

демонстрирующий процесс нагревания.

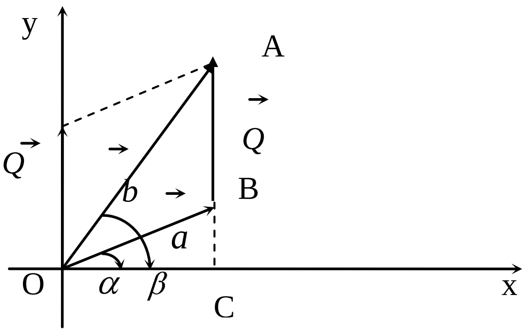

Рис.4

Определим параметры результирующего вектора $\vec{b} = \vec{a} + \vec{Q}$

Наклон последнего

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{AC}{OC} = \frac{AB+BC}{OC} = \frac{Q+|\vec{a}|\sin\alpha}{|\vec{a}|\cos\alpha} = \frac{Q}{|\vec{a}|\cos\alpha} + \mathrm{tg}\alpha = \frac{Q}{C} + t = \theta$$

определяет приобретенную температуру θ. Действительно, согласно тепловому балансу $\mathrm{Q} = \mathrm{C}(\theta - \mathrm{t}), \theta = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}} + \mathrm{t}$.

Пример 4.

Аналогичная схема рассуждений в случае отвода тепла Q приводит к результату

$$\vec{\mathrm{b}} = \vec{a} + (-\vec{\mathrm{Q}}) = \vec{a} - \vec{\mathrm{Q}}, \mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OC}} = \frac{|\vec{a}|\sin\alpha - \mathrm{Q}}{|\vec{a}|\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \frac{\mathrm{Q}}{|\vec{a}|\cos\alpha} = \mathrm{t} - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{C}} = \theta,$$

который созвучен результату $\theta = t - \dfrac{Q}{C}$ теплового баланса $Q = C(t - \theta)$. Здесь отводимое количество теплоты Q отображается направленным вниз вертикальным вектором $(-\vec{Q})$, демонстрирующим процесс остывания.

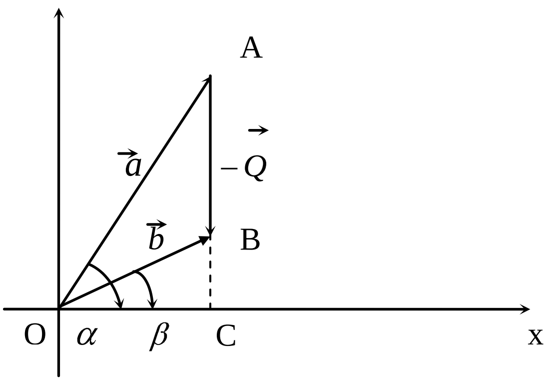

Рис.5

В общепринятом изложении величины Q определяются как количества теплоты, которым приписываются знаки, хотя для осмысления динамического процесса теплообмена намного важнее подчеркнуть, что теплота-это не одна из форм энергии, а название одного из способов (процессов, помимо работы) передачи внутренней энергии, обусловленного разностью температуры между более или менее нагретыми телами[3]. Очевидно, что последняя мысль наглядно находит свое подтверждение в предлагаемом подходе векторных диаграмм для процессов теплообмена.

Как известно, простой теплообмен в изолированной системе сопровождается нецеленаправленным и немонотонным рассеянием энергии, обусловленным механизмом обмена энергией между структурными единицами контактирующих веществ при их взаимных столкновениях. Векторные диаграммы процессов теплообмена позволяют наглядным образом продемонстрировать такую фундаментальную асиметрию, т.е. однонаправленность самопроизвольных процессов.

Возвращаемся к процессу теплообмена двух веществ с векторной диаграммой на рис 1 .

На той же диаграмме отметим векторы

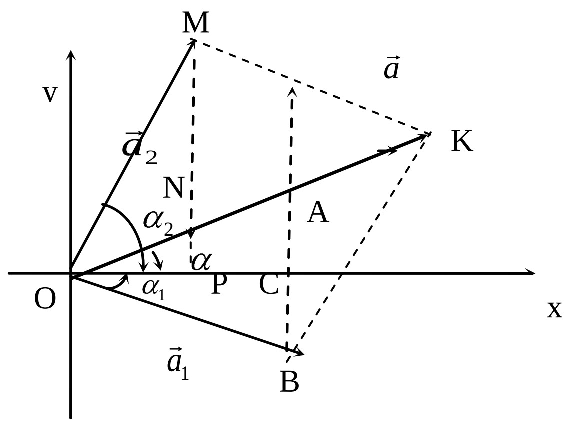

Рис.6

$\vec{Q}_1\ (|\vec{Q}_1| = C_1(\theta - t_1))$ и $\vec{Q}_2\ (|\vec{Q}_2| = C_2(t_2 - \theta))$,

осуществляющие динамический процесс теплообмена. Согласно векторным построениям

$$C_1 = |\vec{a}_1|\cos\alpha_1, t_1 = \mathrm{tg}\alpha_1, \theta = \mathrm{tg}\alpha, C_2 = |\vec{a}_2|\cos\alpha_2, t_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$$

Т.е.

$$|\vec{Q}_1| = C_1(\theta - t_1) = |\vec{a}_1|\cos\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha - |\vec{a}_1|\sin\alpha_1 = AC + BC = BA$$ и

$\vec{Q}_1 = \overrightarrow{BA}$, (так как $\alpha_1 < 0$):

С другой стороны

$$|Q_2| = C_2(\theta_2 - \theta) = |a_2|\cos\alpha_2(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha) = |a_2|\cos\alpha_2 \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha} =$$

$$= \frac{|\vec{a}_2|}{\cos\alpha}(\sin\alpha_2\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha_2) = |\vec{a}_2|\sin\alpha_2 - |\vec{a}_2|\cos\alpha_2 \cdot \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{MP} - \mathrm{NP} = \mathrm{MN} \qquad \mathrm{Q}_2 = \mathrm{MN}:$$

Очевидно, что окончательное равновесное состояние первого вещества в смеси, установившееся после теплообмена, изображается вектором $\vec{OA}$. Для второго вещества соответствующий вектор $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$. При том $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}$, так как $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{AK}}$.

Из приведённых графиков видно, что невозможно достичь равновесного состояния, в процессе которого единственным результататом был бы переход энергии от холодного тела к нагретому (2-ое начало термодинамики в формулировке Клаузиуса).

Это пример наглядной демонстрации принципов термодинамики на языке геометрических построений.

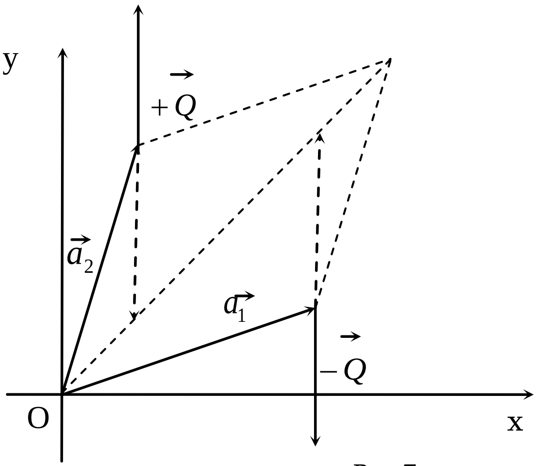

Рис.7

Литература

1. Маргарян М.А., Никогосян Г.С., Образование, реформы, проблемы, Материалы республиканской научной конференции, Ванадзор, 2010, стр. 220-232.(на армянском языке).
2. Маргарян М.А., Никогосян Г.С., Векторы в задачах физики. Тепловые явления(учебно-методическая работа), "Дпир", Гюмри, 2010(на армянском языке).
3. П.Эткинс, Порядок и беспорядок в природе, М., Мир, 1987.

Մեթոդական ակնարկ ջերմային վիճակների վեկտորական մոդելավորման մասին

Ա.Ալեքսանյան, Հ.Նիկողոսյան

Ամփոփում

Տվյալ մեթոդական ակնարկում առաջարկվում է եղանակ, որը թույլ է տալիս ջերմադինամիկայի սկզբունքները երկրաչափական կառուցումների միջոցով ցուցադրել տեսանելի ձևով:

Methodological Note on Vector Modeling of Thermal Conditions

Al. Alexanyan, G. Nikoghosyan

Summary

This methodological article suggests a way to demonstrate the principles of thermodynamics in the language of geometric building.