УДК: 517.9 *Математика*

О “ДВИЖЕНИИ” НУЛЕЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Т. Арутюнян, А. Пахлеванян, Ю. Ашрафян

Мы изучаем зависимость нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля от параметров, определяющих краевые условия. В качестве следствия получается теорема осцилляции Штурма о том, что n*-ая собственная функция имеет* n *нулей.*

Рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля $L(q,\alpha,\beta)$:

$$\begin{cases} ly \equiv -y'' + q(x)y = \mu y, & 0<x<\pi,\ \mu\in C & (1)\\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, & \alpha\in(0,\pi] & (2)\\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, & \beta\in[0,\pi) & (3)\end{cases}$$

где $q\in L^1_R[0,\pi]$, т.е. q есть действительная, суммируемая по Лебегу функция на $[0,\pi]$.

Через $L(q,\alpha,\beta)$ будем обозначать также самосопряженный оператор, соответствующий задаче (1)-(2)-(3).

Хорошо известно, что задача $L(q,\alpha,\beta)$ имеет счетное множество простых, действительных собственных значений (см., например [1], [2], [3], [4]), которые мы будем обозначать $\mu_n = \mu_n(q,\alpha,\beta), n=0,1,\ldots,$ (стараясь подчеркнуть их зависимость от величин q,α,β) и которые можно пронумеровать в порядке возрастания:

$$\mu_0(q,\alpha,\beta) < \mu_1(q,\alpha,\beta) < \ldots < \mu_n(q,\alpha,\beta) < \ldots$$

В работах [4], [7] введено понятие функции собственных значений (ФСЗ) семейства операторов $\{L(q,\alpha,\beta);\ \alpha\in(0,\pi],\ \beta\in[0,\pi)\}$. Это есть (при фиксированном q) функция от двух переменных γ и δ $(\gamma=\alpha+\pi n\in(0,\infty),\ \delta=\beta-\pi m\in(-\infty,\pi))$ определяемая через собственные значения $\mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n=0,1,2\ldots,$ по следующей формуле

$$\mu(\gamma,\delta) = \mu(\alpha+\pi n, \beta-\pi m) \overset{def}{=} \mu_{n+m}(q,\alpha,\beta),\ n,m=0,1,2\ldots, \quad (5)$$

Доказано, что эта функция аналитически зависит от γ и δ, строго возрастает по γ и строго убывает по δ.

Также известно (см., например [1]), что любое нетривиальное решение $y(x,\mu)$ уравнения (1) может иметь только простые нули (т.е. если

$y(x_0,\mu)=0,$ то $y'(x_0,\mu)\neq 0$), и (см., например [5]), что любое решение $y(x,\mu)$ есть непрерывно дифференцируемая функция по совокупности переменных x и μ. Поэтому, применяя теорему о неявной функции (см., например [6], стр. 452) получим, что нули решения $y(x,\mu)$ есть непрерывно дифференцируемые функции от μ. Поскольку решением уравнения $y(x,\mu)=0$ называется такая функция $x=x(\mu)$, для которой верно тождество $y(x(\mu),\mu)\equiv 0$ для всех μ из некоторого интервала (a,b), то продифференцировав последнее тождество по μ получим:

$$\frac{dy(x(\mu),\mu)}{d\mu}=\frac{\partial y(x(\mu),\mu)}{\partial x}\cdot\frac{dx(\mu)}{d\mu}+\frac{\partial y(x(\mu),\mu)}{\partial \mu}\equiv 0,\quad \mu\in(a,b). \tag{6}$$

Если производную по μ будем обозначать точкой, т.е. $\dfrac{\partial y(x,\mu)}{\partial\mu}=\dot{y}(x,\mu)$, то тождество (6) можно записать в виде

$$\frac{dx(\mu)}{d\mu}=\dot{x}(\mu)=-\frac{\dot{y}(x(\mu),\mu)}{y'(x(\mu),\mu)},\quad \mu\in(a,b). \tag{7}$$

С другой стороны, запишем тот факт, что $y(x,\mu)$ есть решение уравнения (1), т.е.

$$-y''(x,\mu)+q(x)y(x,\mu)\equiv\mu y(x,\mu),\qquad 0<x<\pi,\ \mu\in C, \tag{8}$$

и продифференцируем это тождество по μ:

$$-\dot{y}''(x,\mu)+q(x)\dot{y}(x,\mu)\equiv y(x,\mu)+\mu\dot{y}(x,\mu). \tag{9}$$

Умножив (8) на $\dot{y}$, а (9) на y и отняв из второго полученного тождества первое, получим тождество

$$y''(x,\mu)\dot{y}(x,\mu)-\dot{y}''(x,\mu)y(x,\mu)\equiv y^2(x,\mu),\qquad 0<x<\pi,\quad \mu\in C,$$

т.е.

$$\frac{d}{dx}\left[y'(x,\mu)\dot{y}(x,\mu)-\dot{y}'(x,\mu)y(x,\mu)\right]\equiv y^2(x,\mu), \tag{10}$$

Если мы проинтегрируем это тождество по x от 0 до a $(0\le a\le\pi)$, то получим

$$y'(a,\mu)\dot{y}(a,\mu)-\dot{y}'(a,\mu)y(a,\mu)-y'(0,\mu)\dot{y}(0,\mu)+\dot{y}'(0,\mu)y(0,\mu)=\int_0^a y^2(x,\mu)\,dx, \tag{11}$$

а если проинтегрируем по x от a до π, то получим

$$y'(\pi,\mu)\dot{y}(\pi,\mu)-\dot{y}'(\pi,\mu)y(\pi,\mu)-y'(a,\mu)\dot{y}(a,\mu)+\dot{y}'(a,\mu)y(a,\mu)=\int_a^{\pi}y^2(x,\mu)\,dx. \quad (12)$$

Возьмем теперь в качестве $y(x,\mu)$ решение $y=\varphi(x,\mu,\alpha,q)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0,\mu,\alpha,q)=\sin\alpha,\ \varphi'(0,\mu,\alpha,q)=-\cos\alpha. \quad (13)$$

Легко видеть, что собственные функции задачи $L(q,\alpha,\beta)$ получаются из решения $\varphi(x,\mu,\alpha,q)$ при $\mu=\mu_n(q,\alpha,\beta)$ (здесь используем (5)), т.е.:

$$\varphi_n(x,q,\alpha,\beta)\overset{def}{=}\varphi_n(x)=\varphi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\alpha,q)=\varphi(x,\mu(\alpha+\pi n,\beta),\alpha,q)=$$

$$=\varphi(x,\mu(\alpha,\beta-\pi n),\alpha,q)=\varphi(x,\mu(\alpha,\delta),\alpha,q)\Big|_{\delta=\beta-\pi n}=$$

$$=\varphi(x,\mu(\alpha,\delta))\Big|_{\delta=\beta-\pi n}=\varphi(x,\mu(\alpha,\beta-\pi n)) \quad (14)$$

Пусть $0\le x_n^0<x_n^1<\ldots<x_n^m\le\pi$ есть нули собственной функции $\varphi_n(x,q,\alpha,\beta)=\varphi(x,\mu(\alpha,\beta-\pi n))$, т.е.

$\varphi_n(x_n^k,q,\alpha,\beta)=\varphi(x_n^k,\mu(\alpha,\beta-\pi n))=0$, k=0,1,...,m.

Пусть q, α, n фиксированы. И нас интересует вопросы:

a) как меняются нули $x_n^k=x_n^k(\beta)$, k = 0,1,...,m при изменении β на $(0,\pi)$,

b) сколько нулей имеет n-ая собственная функция $\varphi_n(x,q,\alpha,\beta)$, т.е. чему равно m?

Взяв в тождестве (11) $y=\varphi_n(x)$ и $a=x_n^k$ $(k=0,1,\ldots,m)$, получим

$$\varphi_n'(x_n^k)\dot{\varphi}_n(x_n^k)-\dot{\varphi}_n'(x_n^k)\varphi_n(x_n^k)-\varphi_n'(0)\dot{\varphi}_n(0)+\dot{\varphi}_n'(0)\varphi_n(0)=\int_0^{x_n^k}\varphi_n^2(x)\,dx, \quad (15)$$

Поскольку начальные условия (13) должны выполняться при всех $\mu\in C$, то $\dot{\varphi}_n(0)=0$ и $\dot{\varphi}_n'(0)=0$. Учитывая также, что $\varphi_n(x_n^k)=0$, из (15) получаем

$$\varphi_n'(x_n^k)\dot{\varphi}_n(x_n^k)=\int_0^{x_n^k}\varphi_n^2(x)\,dx, \quad (16)$$

Поскольку нули решений все простые, то $\varphi_n'(x_n^k)\neq0$ и поэтому из (16) следует равенство

$$\frac{\dot{\varphi}_n(x_n^k)}{\varphi_n'(x_n^k)} = \frac{1}{\left[\varphi_n'(x_n^k)\right]^2}\int_0^{x_n^k}\varphi_n^2(x)\,dx, \qquad (17)$$

Теперь уже из (7) следует

$$\dot{x}_n^k(\mu_n) = \left.\frac{dx_n^k(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_n} = -\frac{\dot{\varphi}_n(x_n^k)}{\varphi_n'(x_n^k)} = -\frac{1}{\left[\varphi_n'(x_n^k)\right]^2}\int_0^{x_n^k}\varphi_n^2(x)\,dx, \qquad (18)$$

т.е. нули $x_n^k(\mu_n)$, k=0,1,...,m, собственной функции $\varphi_n(x)$ убывают, если собственное значение $\mu_n(q,\alpha,\beta)$ возрастает, т.е.

$$\dot{x}_n^k(\mu_n(q,\alpha,\beta)) \le 0 \qquad (19)$$

Заметим, что равенство $\dot{x}_n^k(\mu_n) = 0$ возможно только при $x_n^k = 0$, т.е. когда $x = 0$ есть нуль собственной функции $\varphi_n(x)$, а это так при $\alpha = \pi$ $(\gamma = \pi l,\ l = 1, 2, \ldots)$.

Между тем в неравенстве $\dot{x}_n^k(\mu_n) = \dot{x}_n^k(\mu_n(q,\alpha,\beta)) \le 0$ μ_n может меняться в зависимости от q, α и β, т.е. если при некотором изменении этих трех величин $\mu_n(q,\alpha,\beta)$ растет, то нули собственной функции $\varphi_n(x)$ движутся влево, а если $\mu_n(q,\alpha,\beta)$ убывает, то нули собственной функции $\varphi_n(x)$ движутся вправо.

В работе [8] доказано, что n-ые собственные функции задач $L(q,\pi,0)$ и $L(0,\pi,0)$ имеют одинаковое число нулей. В [8] это доказано при $q \in L_R^2(0,\pi)$, но легко видеть, что то же самое доказательство верно и при $q \in L_R^1(0,\pi)$.

Нетрудно посчитать, что собственные значения задачи $L(0,\pi,0)$ есть $\mu_n(0,\pi,0) = (n+1)^2$, а собственные функции

$$\varphi_n(x) = \varphi(x, \mu_n(0,\pi,0), \pi, 0) = \varphi(x, (n+1)^2, \pi, 0) = \frac{\sin(n+1)x}{n+1},\ \text{n=0,1,2,...} \qquad (20)$$

Нули этой собственной функции есть $x_n^k = \dfrac{\pi k}{n+1}$, k=0,1,...,n+1, т.е. n-ая собственная функция задачи $L(0,\pi,0)$ имеет $n+2$ нуля в $[0,\pi]$, 2 из которых есть 0 и π, т.е. концы отрезка, а n нулей находятся внутри $(0,\pi)$.

Таким образом, n-ая собственная функция $\varphi_n(x,q,\pi,0)$ задачи $L(q,\pi,0)$ имеет 2 нуля на концах $[0,\pi]$, т.е. $x_n^0(q,\pi,0)=0$, $x_n^{n+1}(q,\pi,0)=\pi$ и еще n нулей внутри отрезка $(0,\pi)$.

При возрастании β от 0 до π собственное значение $\mu_n(q,\pi,0)$ непрерывно (по β) убывает от $\mu_n(q,\pi,0)$ до $\mu_n(q,\pi,\pi)=\mu(\pi,\pi-\pi n)=\mu(\pi,0-(n-1)\pi)=\mu_{n-1}(q,\pi,0)$ (см. (5)) и, согласно (18), нули функции $\varphi_n(x,q,\pi,\beta)$ возрастают, т.е. движутся вправо (все, кроме самого левого нуля $x_n^0=0$). В частности, самый правый нуль $x_n^{n+1}=\pi$, двигаясь направо, покидает отрезок $[0,\pi]$ и в $[0,\pi]$ остается $n+1$ нулей (один $x_n^0=0$ и n нулей внутри $(0,\pi)$). А предыдущий нуль достигает точки π когда снова будет выполняться соотношение (см. ниже (21) и (24)) $\varphi_n(\pi)=\varphi(\pi,\mu_n(q,\pi,\beta),\pi,q)=c_n\psi_n(\pi)=c_n\sin\beta=0$, а это возможно только тогда, когда β достигает значения π (и $\mu_n(q,\pi,\beta)$ убывая, достигает значения $\mu_n(q,\pi,\pi)=\mu_{n-1}(q,\pi,0)$). Тогда собственная функция $\varphi_n(x)=\varphi(x,\mu_n(q,\pi,\beta),\beta,q)$ гладко перейдет в собственную функцию $\varphi(x,\mu_n(q,\pi,\pi),\pi,q)=\varphi(x,\mu_{n-1}(q,\pi,0),\pi,q)$, которая имеет $n+1$ нулей в $[0,\pi]$, два из которых совпадают с концами 0 и π, а внутри отрезка имеется $n-1$ нулей. Таким образом, теорема осцилляции доказана для всех $L(q,\pi,\beta)$, $\beta\in[0,\pi]$.

Возьмем теперь в качестве решения $y(x,\mu)$ то решение $\psi(x,\mu,\beta,q)$, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\psi(\pi,\mu,\beta,q)=\sin\beta,\qquad \psi'(\pi,\mu,\beta,q)=-\cos\beta \tag{21}$$

Легко видеть, что собственные значения $\mu_n=\mu_n(q,\alpha,\beta)$, n=0,1,…, задачи $L(q,\alpha,\beta)$ являются нулями целой функции

$$\Psi(\mu)=\Psi(\mu,\alpha,\beta,q)=\psi(0,\mu,\beta,q)\cos\alpha+\psi'(0,\mu,\beta,q)\sin\alpha,$$

а собственные функции, соответствующие этим собственным значениям получаются по формуле

$$\psi_n(x)=\psi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\beta,q),\ \text{n=0,1,...,} \tag{23}$$

Поскольку собственные значения μ_n все простые, то собственные функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ соответствующие одному и тому же собственному значению μ_n линейно зависимы, т.е. существуют постоянные $c_n = c_n(q,\alpha,\beta)$, $\mathrm{n} = 0,1,\ldots,$ такие, что

$$\varphi_n(x) = c_n\psi_n(x), \ \mathrm{n} = 0,1,\ldots, \tag{24}$$

Отсюда следует, что $\varphi_n(x,q,\alpha,\beta)$ и $\psi_n(x,q,\alpha,\beta)$ имеют одинаковое количество нулей.

Пусть $0 \le x_n^m < x_n^{m-1} < \ldots < x_n^0 \le \pi$ есть нули собственной функции $\psi_n(x,q,\alpha,\beta)$, т.е. $\psi_n(x_n^k,q,\alpha,\beta) = 0$, k=0,1,...,m.

Пусть $0 \le x_n^m < x_n^{m-1} < \ldots < x_n^0 \le \pi$ есть нули собственной функции $\psi_n(x,q,\alpha,\beta)$, т.е. $\psi_n(x_n^k,q,\alpha,\beta) = 0$, k=0,1,...,m.

Взяв в тождестве (12) $y = \psi_n(x) = \psi(x,\mu_n(q,\alpha,\beta),\beta,q)$, получим:

$$\psi_n'(\pi)\dot{\psi}_n(\pi) - \dot{\psi}_n'(\pi)\psi_n(\pi) - \psi_n'(x_n^k)\dot{\psi}_n(x_n^k) + \dot{\psi}_n'(x_n^k)\psi_n(x_n^k) = \int_{x_n^k}^{\pi}\psi_n^2(x)\,dx, \tag{25}$$

Из (21) следует, что $\dot{\psi}_n(\pi) = 0$ и $\dot{\psi}_n'(\pi) = 0$. И так как $\psi_n(x_n^k) = 0$, то равенство (25) получает вид

$$-\psi_n'(x_n^k)\dot{\psi}_n(x_n^k) = \int_{x_n^k}^{\pi}\psi_n^2(x)\,dx, \tag{26}$$

Так как нули x_n^k все простые, т.е. $\psi_n'(x_n^k) \neq 0$ то, поделив обе стороны последнего равенства на $\left[\psi_n'(x_n^k)\right]^2$, получим

$$\frac{\dot{\psi}_n(x_n^k)}{\psi_n'(x_n^k)} = -\frac{1}{\left[\psi_n'(x_n^k)\right]^2}\int_{x_n^k}^{\pi}\psi_n^2(x)\,dx, \tag{27}$$

Теперь уже из (7), взяв $y = \psi_n(x)$, $x = x_n^k$, имеем:

$$\dot{x}_n^k(\mu_n) = \left.\frac{dx_n^k(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=\mu_n} = -\frac{\dot{\psi}_n(x_n^k)}{\psi_n'(x_n^k)} = \frac{1}{\left[\psi_n'(x_n^k)\right]^2}\int_{x_n^k}^{\pi}\psi_n^2(x)\,dx \ge 0 \tag{28}$$

т.е. нули $x_n^k(\mu_n)$, k = 0,1,...,m, собственной функции $\psi_n(x)$ возрастают, если собственное значение μ_n возрастает. Заметим, что равенство $\dot{x}_n^k(\mu_n) = 0$ возможно только при $x_n^0(\mu_n) = \pi$, а это так при $\beta = 0$ $(\delta = -\pi l,\ l = 0,1,2,\ldots)$.

При изучении зависимости нулей собственных функции от α удобно пользоваться формулой (28), т.к. собственные функции $\psi_n(x)$ имеют фиксированные значения $\psi_n(\pi,\mu,\beta)=\sin\beta$ и $\psi_n'(\pi,\mu,\beta)=-\cos\beta$ при всех $\mu\in C,$ т.е. все $\psi_n(x)$ удовлетворяют начальным условиям $\psi_n(\pi)=\sin\beta$, $\psi_n'(\pi)=-\cos\beta$, а это значит, что через правый конец π отрезка $[0,\pi]$ (при изменении α) новые нули не могут ни входить и ни выходить (ни появляться и ни исчезать). Таким образом, при возрастании α собственные значения $\mu_n(q,\alpha,\beta)$ (с фиксированными q и β) возрастают, а согласно (28) (т.е. $\dot{x}_n^k(\mu_n)\geq 0$) нули собственной функции $\psi_n(x)$ движутся вправо (т.е. возрастают). При этом значения $\psi(\pi)=\sin\beta$ и $\psi'(\pi)=-\cos\beta$ не изменяются, число нулей растет, и эти нули не могут "сталкиваться" или "расщепляться" в силу своей простоты. Поэтому новые нули могут появляться только входя в $[0,\pi]$ через левый конец 0 и двигаясь направо (и, соответственно, "уплотняясь").

И входят новые нули через левый конец 0 отрезка $[0,\pi]$ только если значение $\psi_n(0)=0$, а так как $\psi_n(0)=c_n\varphi_n(0)=c_n\sin\alpha$ $(c_n\neq 0)$, то равенство $\psi_n(0)=0$ возможно только при $\sin\alpha=0$, т.е. в наших обозначениях, только при $\alpha=\pi$ (и, поскольку $\mu_n(q,0,\beta)=\mu(0+\pi n,\beta)=$ $=\mu(\pi+(n-1)\pi,\beta)=\mu_{n-1}(q,\pi,\beta)$, n=1, 2, ...) или при $\alpha=0.$

Итак, при $\alpha=\pi$, собственная функция $\psi_n(x,q,\pi,\beta)$, как и $\varphi_n(x,q,\pi,\beta)$ имеет в $(0,\pi)$ n нулей и один нуль $x=0$ в левом конце. При этом $\psi_n(x,q,\pi,\beta)=\psi(x,\mu_n(q,\pi,\beta),\beta,q)==\psi(x,\mu_{n+1}(q,0,\beta),\beta,q)=\psi_{n+1}(x,q,0,\beta)$. При возрастании α от 0 до π собственное значение $\mu_{n+1}(q,0,\beta)$ возрастает (непрерывно по α) до $\mu_{n+1}(q,\pi,\beta)$, и левый нуль $x=0$ двигаясь направо, оказывается внутри $(0,\pi)$, т.е. в $(0,\pi)$ оказывается $n+1$ нулей собственной функции $\psi_{n+1}(x,q,\alpha,\beta)$ (и еще один неподвижный нуль $x=\pi$, если $\beta=0$). Новый нуль появится на левом конце $x=0$ когда α достигнет значения $\alpha=\pi.$

Таким образом, получаем следующую теорему осцилляции:

Теорема. Собственные функции задачи $L(q,\alpha,\beta)$, соответствующие n-ому собственному значению $\mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n=0,1,2...$, имеют ровно n нулей в $(0,\pi)$. Все эти нули простые. Если $\alpha=\pi$ и $\beta=0$, то n-ая собственная функция имеет в $[0,\pi]$ $n+2$ нуля, а если же $\alpha=\pi$, $\beta\in(0,\pi)$ или $\beta=0$, $\alpha\in(0,\pi)$, то n-ая собственная функция имеет на $[0,\pi]$ $n+1$ нулей.

Осцилляционные свойства решений задачи $L(q,\alpha,\beta)$ (теория Штурма), изучение которых начато Штурмом в работах [9] и [10] излагаются в монографической литературе (см., например, [1], [11], [12]) для непрерывных q. В работах последних лет (см., например, [8], [13]) рассматривались случаи ограниченного q или $q\in L_R^2[0,\pi]$, но во многих работах (см. [14] и библиографию к ней, а также [15]) неявно предполагается, что теорема осцилляции Штурма (что n-ая собственная функция (с.ф.) имеет n нулей) верна и при $q\in L_R^1[0,\pi]$, хотя доказательство нигде не изложено.

Наша же теорема верна для любого $q\in L_R^1[0,\pi]$.

Литература

1. Левитан Б. М., Саргсян И. Г., Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, М., “Наука”, 1988.
2. Марченко В. А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Киев, “Наукова Думка”, 1977.
3. Freiling G. and Yurko V., Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, “Nova Science Publishers”, New York, 2001.
4. Harutyunyan T. N., The dependence of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem on boundary conditions, Matematicki Vesnik, N 60, pp. 285-294, 2008.
5. Ղազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, Եր., 2002.
6. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., “Наука”, 1966.
7. Арутюнян Т. Н., Навасардян Э. Р., Функция собственных значений семейства операторов Штурма-Лиувилля, Изв. НАН Армении, т. 35, N5, 2000.
8. Poshel J., Trubowitz E., Inverse Spectral Theory, Acad. Press, 1987.
9. Sturm C., Mémoire sur les Equations différentielles linéaires du second ordre. J. Math. Pures Appl. 1, pp. 106-186, 1836.
10. Sturm C. Mémoire sur une classe d'Equations à diffèrences partielles. J. Math. Pures Appl. 1, pp. 373-444, 1836.
11. Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. 1. М., ИЛ, 1953.
12. Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1951.

13. Simon B., Sturm Oscillation and Comparison Theorems, in Sturm-Liouville Theory: Past and Present (eds. Amrein W., Hinz A. and Pearson D.), pp. 29-43, Basel, 2005.
14. Hinton D., Sturm's 1836 Oscillation Results. Evolution of the Theory: Past and Present (eds. Amrein W., Hinz A. and Pearson D.), pp. 1-27, Basel, 2005.
15. Математическая энциклопедия, М., Советская энциклопедия, 1985, том 5, статья «Штурма-Лиувилля задача».
16. Isaacson E. L., Trubowitz E., The inverse Sturm-Liouville problem, 1. Comm. Pure and Appl. Math., vol. 36, pp. 767-783, 1983.

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական ֆունկցիաների զրոների “շարժի” մասին

Տ. Հարությունյան, Ա. Փահլևանյան, Յու.Աշրաֆյան

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի սեփական ֆունկցիաների զրոների կախվածությունը եզրային պայմանները որոշող պարամետրերից: Որպես հետևանք ստացվում է Շտուրմի օսցիլյացիայի թեորեմն այն մասին, որ n-րդ սեփական ֆունկցիան ունի n հատ զրո:

On the “Movement” of the Zeros of Eigenfunctions of the Sturm-Liouville Problem

T. Harutyunyan, A. Pahlevanyan, Yu. Ashrafyan

Summary

We study the dependence of the zeros of eigenfunctions of Sturm-Liouville problem on the parameters that define the boundary conditions. As a corollary, we obtain Sturm oscillation theorem, that the n-th eigenfunction has n zeros.