

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ОСЦИЛЛЯЦИИ И НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОРОДНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Саакян

В работе определяется достаточный критерий для осцилляции и неосцилляции однородной линейной канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \quad (1)$$

в предположении, что $p(t)$ и $r(t)$ действительные функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$.

Определение 1. Нетривиальное решение $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1)

называется осциллирующим на отрезке $[a, b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a, b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0$, $t_i \in [a, b]$, $i = 1, 2$.

Определение 2. Система (1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае называется неосциллирующей.

Осцилляция системы (1) является важнейшей ее характеристикой и потому нахождение критериев осцилляции до сих остается предметом исследований (см., например, [1]-[4]), причем, наиболее существенны те критерии, которые легко проверяемы. В данной работе, для определенного класса рассматриваемых систем, определяется критерий как для осцилляции, так и неосцилляции системы (1), легко реализуемый на практике.

Известно (см., например [5]), что если в системе (1) $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a, b]$ знакопостоянны и имеют одинаковые знаки, то система (1) является неосциллирующей. Поэтому, в случае знакопостоянных коэффициентов, для определения условий осцилляции системы (1), имеет смысл рассматривать лишь случай, когда коэффициенты системы имеют разные знаки. Имеет место

Теорема. Если в системе (1) $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$ (соответственно $p(t) < 0$ и $r(t) > 0$), то при выполнении одного из условий

$$1. \quad p(t) + r(t) \leq 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b |p(t)| dt \geq \pi \quad (\text{соответственно} \quad \int_a^b |r(t)| dt \geq \pi),$$

или

$$p(t) + r(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b |r(t)| dt \geq \pi \quad (\text{соответственно} \quad \int_a^b |p(t)| dt \geq \pi),$$

система (1) осциллирующая на $[a, b]$, а при выполнении одного из условий

$$2. \quad p(t) + r(t) \leq 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b |r(t)| dt < \frac{\pi}{2} \quad (\text{соответственно} \quad \int_a^b |p(t)| dt < \frac{\pi}{2}),$$

или

$$p(t) + r(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b |p(t)| dt < \frac{\pi}{2} \quad (\text{соответственно} \quad \int_a^b |r(t)| dt < \frac{\pi}{2}),$$

система (1) неосциллирующая на $[a, b]$.

Доказательство. Известно (см., например, [6]), что решение системы (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_1(t) &= q(t) \sin \theta(t), \\ y_2(t) &= q(t) \cos \theta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta(t)$ – решение уравнения

$$\theta' = p(t) \cos^2 \theta - r(t) \sin^2 \theta \quad (3)$$

с начальным условием, удовлетворяющим условию $0 \leq \theta(a) < \pi$, и

$$q(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t [p(\tau) + r(\tau)] \sin 2\theta(\tau) d\tau \right\}.$$

Заметим, что поскольку функции $\cos^2 \theta(t)$ и $\sin^2 \theta(t)$ равномерно ограничены, то уравнение (3) имеет решение на каждом интервале. И так как правая часть уравнения (3) дифференцируема по $\theta(t)$, то его решение единственно в обычном смысле. Не теряя общности рассуждений, будем считать, что $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$ (аналогично рассматривается и случай $p(t) < 0$ и $r(t) > 0$). Тогда из соотношения (3) будет следовать, что $\theta'(t) > 0$, а значит функция $\theta(t)$ на отрезке $[a, b]$ является возрастающей, и, следовательно, $\theta(b) > \theta(a)$. Из формул (2) следует, что система (1) будет осциллирующей, если $|\theta(b) - \theta(a)| = \theta(b) - \theta(a) \geq \pi$. Проинтегрировав от a до t уравнение (3) найдем

$$\theta(t) - \theta(a) = \int_a^t [p(\tau) \cos^2 \theta(\tau) - r(\tau) \sin^2 \theta(\tau)] d\tau = \frac{1}{2} \int_a^t [p(\tau) - r(\tau) + (p(\tau) + r(\tau)) \cos 2\theta(\tau)] d\tau. \quad (4)$$

Предположим, что $p(t) + r(t) \leq 0$ для $t \in [a, b]$. Тогда, поскольку $\cos 2\theta(t) \leq 1$, то имеет место неравенство

$$\int_a^b p(\tau) + r(\tau) \cos 2\theta(\tau) - 1 d\tau \geq 0,$$

откуда будет следовать, что

$$\int_a^b p(\tau) + r(\tau) \cos 2\theta(\tau) d\tau \geq \int_a^b p(\tau) + r(\tau) d\tau.$$

Тогда, учитывая соотношение (4), найдем, что

$$\theta(b) - \theta(a) = \frac{1}{2} \int_a^b (p(\tau) - r(\tau)) d\tau + \frac{1}{2} \int_a^b (p(\tau) + r(\tau)) \cos 2\theta(\tau) d\tau \geq \frac{1}{2} \int_a^b (p(\tau) - r(\tau)) d\tau + \frac{1}{2} \int_a^b (p(\tau) + r(\tau)) d\tau \geq \frac{1}{2} \int_a^b p(\tau) d\tau \geq \pi.$$

И, следовательно, система (1) осциллирующая.

Рассмотрим теперь случай, когда $p(t) + r(t) \geq 0$ для $t \in [a, b]$. Тогда, воспользовавшись неравенством

$$\int_a^b p(\tau) + r(\tau) \cdot 1 + \cos 2\theta(\tau) d\tau \geq 0,$$

получим

$$\theta(b) \geq \frac{1}{2} \int_a^b p(\tau) - r(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_a^b p(\tau) + r(\tau) d\tau = \int_a^b |r(\tau)| d\tau \geq \pi,$$

откуда будет следовать осциллируемость системы (1).

Предположим теперь, что имеет место одно из условий 2, в частности,

$$p(t) + r(t) \leq 0 \text{ и } \int_a^b |r(t)| dt < \frac{\pi}{2} \text{ (другой случай рассматривается аналогично).}$$

Заметим сначала, что поскольку наименьшее расстояние между нулями разных компонент решения системы (1), определяемых соотношениями (2), составляет $\frac{\pi}{2}$, то, очевидно, что система не будет осциллировать при

условии, если $|\theta(b) - \theta(a)| < \frac{\pi}{2}$. Учитывая формулу (4), а также наше предположение, будем иметь

$$\begin{aligned} |\theta(b) - \theta(a)| &= \left| \frac{1}{2} \int_a^b p(\tau) + r(\tau) + p(\tau) - r(\tau) \cos 2\theta(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |p(\tau) + r(\tau) + p(\tau) - r(\tau) \cos 2\theta(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |p(\tau) + r(\tau)| d\tau + \frac{1}{2} \int_a^b |p(\tau) - r(\tau) \cos 2\theta(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2} \int_a^b |p(\tau) + r(\tau)| d\tau + \frac{1}{2} \int_a^b |p(\tau) - r(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b p(\tau) + r(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_a^b p(\tau) - r(\tau) d\tau = \int_a^b |r(\tau)| d\tau < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

И, следовательно, система (1) неосциллирует. Теорема доказана.

Заметим, что постоянная $\frac{\pi}{2}$ в условии 2 теоремы является оптимальной и не может быть улучшена. Это следует, например, из того, что если рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

то решение этой системы $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ осциллирует и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |p(t)| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = (t+1)y_2, \\ y_2' = -ty_1, \end{cases} \quad (5)$$

на отрезке $[0, 5]$. В данном случае $p(t) = t+1$, $r(t) = -t$, и на отрезке $[0, 5]$ $p(t)r(t) < 0$ и $p(t) + r(t) = 1 > 0$. Заметим, что на отрезке $[0, 1]$

$\int_0^1 |p(t)| dt = \int_0^1 (t+1) dt = 1,5 < \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, согласно теореме, система на

отрезке $[0, 1]$ неосциллирует. На отрезке $[1, 5]$ $\int_1^5 |r(t)| dt = \int_1^5 t dt = 4 > \pi$. А, значит,

система (5) на $[1, 5]$ осциллирует. На рисунке 1 приводится графическая интерпретация одного решения рассматриваемой системы на отрезке $[0, 5]$, построенная в среде MathCad.

$$D(t, Y) := \begin{bmatrix} (t+1) \cdot Y_1 \\ -t \cdot Y_0 \end{bmatrix} \quad t0 := 0.40 \quad t1 := 5 \quad Y0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad N := 1000$$

$$S := \text{Rkadapt}(Y0, t0, t1, N, D)$$

$$t := S^{(0)} \quad y1 := S^{(1)} \quad y2 := S^{(2)}$$

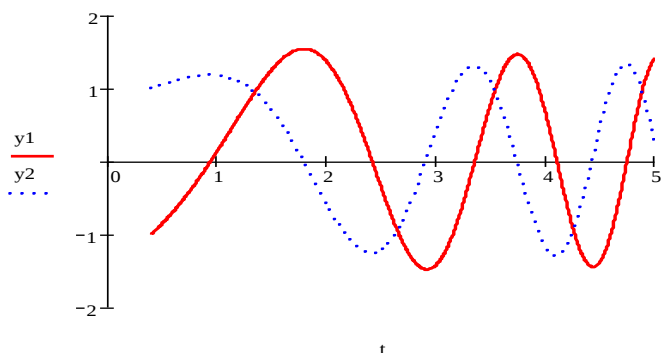


Рис. 1

Из доказанной теоремы, в частности, вытекают

Следствие 1. Если в системе

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -p(t)y_1, \end{cases}$$

функция $p(t)$ на отрезке $[a, b]$ является знакопостоянной и выполняется условие:

$$\int_a^b |p(t)| dt \geq \pi,$$

то для любой неотрицательной на функции $f(t)$ система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -(p(t) + f(t))y_1, \end{cases}$$

будет осциллирующей на этом отрезке.

Следствие 2. Если в системе

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -p(t)y_1, \end{cases}$$

функция $p(t)$ на отрезке $[a, b]$ является знакопостоянной и выполняется условие:

$$\int_a^b p(t) dt < \frac{\pi}{2},$$

то для любой неотрицательной на $[a, b]$ функции $f(t)$ система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -(p(t) + f(t))y_1, \end{cases}$$

будет неосциллирующей на этом отрезке.

Литература

1. Z. Nehary. Oscillation criteria for second order linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85, p. 428-445 (1957).
2. A. Lomtadze. Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear equation. *Georgian Math. J.*, 4 (1997), № 2, p. 129-138.
3. A. Lomtadze and N. Parsvania. Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimensional systems of first order linear ordinary differential equations, *Georgian Math. J.*, Volume 5, № 3, p.285-295, (1999)
4. Г. Г. Саакян. Об одном критерии неосцилляции для линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка. *Ученые записки АРГУ*, № 2(22), 2010, стр. 3-7.
5. Г. Г. Саакян. О некоторых свойствах решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений в случае знакопостоянных коэффициентов. *Вестник РУДН, Серия математика*, 2011, № 1.
6. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М.: Наука, 1976.

Երկրորդ կարգի կանոնացան համասն համակարգի օսցիլյացիայի և ոչ օսցիլյացիայի մեկ հայտանիշի մասին

Գ.Սահակյան

Ամփոփում

Աշխատանքում որոշվում է բավարար հայտանիշ դիֆերենցիալ հավասարումների երկրորդ կարգի գծային համասն կանոնական համակարգի օսցիլյացիայի և ոչ օսցիլյացիայի համար:

About one Oscillation and Nonoscillation Criteria for Two-dimensional Homogeneous Canonic System.

G. Sahakyan

Summary

The oscillation and nonoscillation sufficient criteria for two-dimensional linear homogeneous canonic system of differential equations has been determined in this paper.