К СОВРЕМЕННЫМ СПОРАМ В ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

(два подхода к пониманию сущности математики)

ОЛЕГ ГАБРИЕЛЯН

Кризис оснований математики в начале столетия имел не только чисто математические последствия, но и глубоко философские. Сейчас можно считать, что этот кризис стал одной из самых интересных и драматических страниц в истории математики. Но проблемы, поднятые в результате горячих дискуссий по основаниям математики, продолжают оставаться в центре внимания философии математики. Это прежде всего проблема объективности математического знания. Она вышла за рамки философии математики и оказалась тесно связанной с общенаучной проблемой объективности знания, некоторые аспекты решения которой как бы «проигрываются» на математике. Проблема объективности математического знания поставила в философии математики вопрос о субъекте математического познания. Дело в том, что объективация научного знания происходит путем отчуждения его от познающего субъекта и построения теории. Такое решение проблемы можно считать общенаучным и, следовательно, справедливым и для математики. Но специфика ее определяет и такой уровень исследования, на котором это общее решение требует конкретизации. И тогда проблема объективности математики выступает как: 1. проблема отношения математического знания к своей предметной области; 2. проблема интерпретации теории.

Здесь уже нельзя проводить аналогии между математическим знанием и даже родственным ему физическим. В этом случае не удается проследить даже терминологической аналогии. Если в физическом познании возникает, например, вопрос о наблюдателе и наблюдаемом, то в математике его просто нет. Если относительная полная объективация в физике, да и вообще в естественных науках достигается в научной картине мира, то для математики дело обстоит иначе. Каким образом? Чтобы ответить на этот вопрос, надо прежде всего уяснить себе сущность математики. Кроме того, встала проблема «онтологического статуса» математических объектов, т. е. проблема существования математических конструктов, что способствовало возрождению старого спора между номинализмом и реализмом, возникновению конвенционализма. Успехи формализации и аксиоматизации математики привели к неправомерным абсолютизациям, в результате которых, в частности, дедуктивный метод занял исключительное положение. Это в свою очередь сказалось на понимании сущности математического творчества. Оно было сведено к процессу дедуктивного развертывания всего того, что уже наперед потенциально содержалось в аксиомах. Вероятные, правдоподобные рассуждения были оттеснены в область естественных наук. И математика начала рассматриваться как формально-логическая система.

Пути выхода из кризиса тесно связывались с аксиоматическим методом. В связи с этим возник вопрос о критериях очевидности математических аксиом, что в свою очередь поставило проблему математической интуиции. В контексте перечисленных проблем встала проблема истинности и подтверждаемости математических теорий. Таким образом, мы видим, что философия математики рассматривает две группы вопросов: 1) логико-методологические вопросы собственно математики; 2) философско-гносеологические вопросы относительно математики. Давались и даются различные ответы на поставленные вопросы и проблемы, но, на наш взгляд, предпосылкой любого ответа на них должно быть четкое понимание сущности математики.

Среди различных взглядов на современную математику выделились два направления, основывающиеся на различном понимании ее сущности. «Двоякий лик— подлинное лицо математики, и я не верю, чтобы природу математического мышления можно было бы рассмотреть с какой-нибудь упрощенной единой точки зрения, не принося при этом в жертву самую сущность»[1]. Одно из направлений имеет своим источником евклидовское изложение математики в его знаменитых «Началах». Именно с этого произведения в математическое познание входит дедукция и становится авторитарным методом математики. Аристотель первый из философов включил методы аксиоматического построения теории и дедукции в философскую систему, сделал их предметом изучения.

В философии Декарта метод дедукции уже является настолько существенным, что он вместе с интуитивным методом становится средством получения достоверного знания. «...Есть много вещей, которые хотя и не являются самоочевидными, но доступны достоверному познанию, если только они выводятся из верных и понятных принципов путем последовательного и нигде не прерывающегося движения мысли при зоркой интуиции каждого отдельного положения. Подобно этому мы узнаем, что последнее кольцо длинной цепи соединено с первым, хотя мы и не можем охватить одним взглядом все находящиеся между ними кольца, которые обусловливают это соединение, лишь бы мы последовательно проследили их и вспомнили, что каждое из них, от первого и до последнего, соединены с соседним»[2].

Методология Лейбница также восприняла дедуктивный метод и включила его в контекст рассуждений, которые считают в настоящее время зачатками математической логики. Философия Лейбница подготовила почву для того, чтобы математика, понимавшаяся как язык природы, начала рассматриваться просто как искусственный язык. Именно его философию можно считать основой того направления в философии математики, которое рассматривает математику как совокупность логически непротиворечивых формальных систем. «Классическая математика предполагает замкнутый в себе, идущий по неизменным, известным всем математикам правилам процесс, который состоит в последовательном построении основных символов определенных комбинаций, именуемых «правильными» или «доказанными»... Ее (классическую математику) следует рассматривать как комбинаторную игру с основными символами, и нам надлежит установить комбинаторно-финитным путем, к каким комбинациям основных символов ведут ее методы построения, называемые «доказательствами»[3]. Такое понимание

[1] Дж. фон Нейман, Математик («Природа», 1983, № 2, с, 89).

[2] Р. Декарт, Правила для руководства ума («Антология мировой философии», в 4-х томах, т. 2, М., 1970, с. 275).

[3] "Philosophy of Mathematics. Selected readings edited and with introduction by P. Benaccerraf and H. Putnam. Prentice-Hall", INC, Englewood Cliffs, New Yercey, 1964, p. 50—51.

математики по сути есть ответ на призыв Лейбница заменить спор математическими вычислениями. Субъект познания со всеми его переживаниями, сомнениями, фантазиями, «эвриками»,со всей историей развития как «драмой идей» (А. Эйнштейн) элиминируется из математического познания. И в этом случае «первой книгой, когда-либо написанной по математике», становятся «Законы мысли» Буля, считал Рассел. Он уверовал в возможность сведения всей чистой математики к символической логике и, следовательно, в превращение математики в своего рода шахматную игру.

Л. Витгенштейн, не разделявший взглядов ни логицистов, ни формалистов на основания математики, тем не менее также рассматривал математику как шахматную игру. Основным понятием его философии математики является «исчисление». Это математические формулы, правила, алгоритмы, подобные правилам, предписываемым шахматным фигурам. Не имеет смысла ставить вопрос об их истинности или ложности, так как они являются алгоритмами действия математиков над математическими конструктами. Отсюда следует и его взгляд на основания математики. Можно говорить только о деятельности по конструированию исчислений. Другого основания математики не нужно, так как «математические проблемы оснований лежат в основе математики не в большей степени, чем нарисованная скала может считаться основанием нарисованной крепости»[4]. Рассматриваемый подход стал программой логицизма. Первым за ее реализацию взялся Фреге. Но и его усилия и попытки таких выдающихся математиков, как Д. Пеано, Б. Рассел, А. Уайтхед, Г. Кантор и др., оказались безуспешными. В данном случае нас интересуют не причины этой неудачи, а то понимание математики, которое привело к возникновению программы логицизма. На вооружение логицистами были взяты все те же методы аксиоматизации и дедукции. Математика представлялась аксиоматической системой, из которой дедуктивно выводились математические предложения. Таким образом, шло логическое развертывание всего потенциально содержащегося в первых началах системы. Отсюда один шаг до платонизма с его миром математических идей.

Формалистическая программа Д. Гильберта опиралась на те же методы, но с установкой не на логику, а на формализацию аксиоматической системы с дальнейшим доказательством непротиворечивости этой системы. Гильберт писал: «Основная мысль моей теории доказательства такова: все высказывания, которые составляют вместе математику, превращаются в формулы, так что сама математика превращается в совокупность формул... Некоторые определенные формулы, которые служат фундаментом этого формального построения математики, называются аксиомами. Доказательство есть фигура, которая должна наглядно предстать перед нами... Доказуемые теоремы, т. е. формулы, получающиеся при этом способе, являются отображением мыслей, которые образуют обычную до сих пор математику»[5]. Понимание математики у сторонников этих двух программ в главном совпадает. Логицизм и формализм явились крайним выражением философии, рассматривающей математику как дедуктивную науку. Они

---

[4] L. Wittgenstein, Remarks on the foundations of mathematics. Oxford, 1956, p. 171.

[5] Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948, с. 366—367.

пытались изгнать из математики все субъективные моменты, исходя из того, что полностью объективными являются те области математики, которые или сведены к логике, или формализованы. Было бы неверно сказать, что обе программы сыграли в математике только негативную роль. Что касается теоретического развития математики, то непосредственным результатом отмеченного выше понимания математики было развитие математической логики. Все это в свою очередь определило то направление развития прикладной математики, результатом которого явилась разработка математического обеспечения ЭВМ. Только на основе крайней формализации стало вообще возможным появление и прогресс вычислительной техники. В настоящее время уже ясно осознана ограниченность только формалистского или логицистского подходов к математике. Тем более, что сам формализм в своем крайнем развитии породил факт, отрицающий его, а именно теоремы Геделя.

Понимание математики как дедуктивной науки и в смысле формального исчисления учитывает только результат математического познания. Сам же процесс получения этого результата не рассматривается. Математика становится хранилищем вечных, неизменных истин. Истории математики здесь фактически нет. Она кажется и не нужной рядом с идеалом формальной теории. Но даже, если о ней и вспоминают, то представляют ее в качестве развертывающейся, подобно заранее данной аксиоматической системе, теории. На основе такого понимания математики сложилась концепция математики как языка. Стержневым положением ее является неустранимая особенность дедуктивности математики. Смещение с точки зрения на математику как на язык природы на другую точку зрения, с которой математика представляется только как язык, имело для философии математики серьезные последствия. Радикально меняются все ранее перечисленные вопросы. Более того, ставятся под сомнение, если не все, то очень многие философские проблемы.

«Система строгой дедукции из аксиом, принятая Евклидом в его «Началах», столь длительное время оказывавшая влияние на математику, является заманчивой формой, в которую часто выкристаллизовывается конечный продукт математической мысли, поскольку это дает возможность добиться успеха в осознании и упорядочении математического содержания и в обнажении его структуры. Однако излишнее акцентирование именно этой стороны математики сбивает с правильного пути, если конструктивным элементам, индукции, воображению, а также трудноуловимому процессу мышления, называемому интуицией, отводится лишь второстепенная роль. Правда, дедуктивный метод, отправляющийся от аксиом, на первый взгляд довольно догматических, позволяет при изучении математики быстро овладеть значительными ее «территориями». Однако конструктивный метод Сократа, идущий от частного к общему и избегающий догматического подхода, прокладывает независимой мысли несравненно более надежный путь»[6].

Второй подход к пониманию сущности математики принимает ее не как данность, как готовый результат, а как развивающуюся систему, в которой процесс не отделяется от результата. Это понимание математики учитывает кантовский тезис об активности субъекта в познании, что в свою очередь требует исследовать весь путь к знанию. Этот путь проходит через индукцию, вероятностные рассуждения, гипотезы.

[6] Р. Курант, Математика в современном мире («Математики о математике», М., 1982, с. 24).

Математики и философы, придерживающиеся этого направления, рассматривают математику как естественную (эмпирическую) науку. «Можно ли считать математику эмпирической наукой или, точнее, отличается ли математика по характеру своей деятельности от эмпирических наук? В более общем плане вопрос следовало бы поставить так: как математик относится к своей науке? Каковы его критерии успеха, в чем привлекательность той или иной цели? Что влияет на его усилия? Какие соображения? Что управляет и движет им?»[7]. Конечно, в этом случае трудно избежать крайности и не забыть, что хотя подход к математике и аналогичен генезису естественных наук, тем не менее эту аналогию нельзя продолжать до совпадения, неразличения, отождествления математики и естественных наук, так как существуют особенности, которые существенно различают их. Противоречие между математикой как дедуктивно развертывающейся системой и математикой как естественнонаучной системой сводится к противоречиям между дедуктивизмом, из которого элиминируется субъект познания, и математическим творчеством, между формальными и вероятностными, правдоподобными рассуждениями, между «созерцательной» интуицией конвенциональных начал и эвристической интуицией. Оба подхода в истории математики были весьма плодотворными, но чрезмерное преувеличение любого из них приводит к искусственным ограничениям, накладываемым на математическое познание.

Объективация математического знания, которое достигается в первом направлении, очевидна уже хотя бы потому, что субъект познания полностью отчуждается от результатов своей деятельности. Они, эти результаты, оказываются настолько независимыми от него, что помещаются в особый платоновский мир идей. Аналогия с учением Платона возникает при обращении к традиционному пониманию дедуктивной системы, которая представляется как потенциально заданная целостная совокупность утверждений. Она уже содержится в аксиомах и нам остается только получить их, воспользовавшись правилами вывода.

Совершенно иначе обстоит дело во втором случае. Здесь субъект так или иначе всегда присутствует, и субъективное находится как диалектическая противоположность объективного даже в формализованной, аксиоматизированной системе. «Математическое открытие никоим образом не является просто систематической дедуктивной процедурой. Оно требует проницательности, воображения и долгих исследований в разных направлениях, многие из которых не приводят ни к чему. Аксиоматическое представление служит для описания и «подачи» плодов этой деятельности, часто в последовательности, отличной от той, в которой они возникли. Оно вносит в предмет связность и единство, а также дает общий взгляд на его объем и границы»[8]. Второе направление богаче содержанием. Анализ его, исследование всего пути познания от незнания к знанию одновременно отвечает на все вопросы, которые могут возникнуть в первом случае. Поэтому подробно остановимся на рассмотрении математики как естественной науки. В той или иной степени к такому пониманию математики склоняются Г. Вейль, А. Мостовский, Л. Кальмар. Но одним из наиболее последовательных исследователей, придерживающихся такого понимания математики, был И. Лакатос. На его философию математики существенное влияние оказали К. Поппер и Д. Пойа. Философию первого он критически переосмыслил, а работу второго непосредственно продолжил. Из философии Поппера

[7] Дж. фон Нейман, указ соч., с. 93.

[8] Р. Голдблатт, Топосы. Категорный анализ логики, М., 1983, с. 26—27.

Лакатос взял «ситуационную логику» или логику открытия, а также принцип фальсификации. Из исследований же Пойа по методике и методологии математики сильное влияние оказывают на него исследования математической эвристики и идея рассмотрения математики как естественной науки и перенесение методов (наблюдения, обобщения, эксперимента и т. д.) последней на нее. «Математика рассматривается как доказательная наука. Однако это только одна из ее сторон. Законченная математика, изложенная в законченной форме, выглядит как чисто доказательная, состоящая только из доказательств. Но математика в процессе создания напоминает любые другие человеческие знания, находящиеся в процессе создания. Вы должны догадаться о математической теореме, прежде чем ее докажете; вы должны догадаться об идее доказательства, прежде чем проведете его в деталях. ...Результат творческой работы математика—доказательное рассуждение, доказательство открывается с помощью правдоподобного рассуждения, с помощью догадки»[9]. И для Пойа, и для Лакатоса важен путь к доказательству, так как только пройдя весь лабиринт поисков его, можно обогатить как доказательство, так и само доказуемое предложение. Вся философия математики Лакатоса следует из его понимания математики как естественной науки. Это основополагающий момент его философии. Он противопоставляется «евклидовой методологии» и как крайнему следствию из нее—философии формалистской школы, для которой философия математики была заменена Гильбертом метаматематикой. «Формализм отделяет историю математики от философии математики, так как согласно формалистскому пониманию математики, собственно говоря, истории математики не существует... Формализм отрицает статус математики для большей части того, что обычно понималось как входящее в математику, и ничего не может сказать об ее развитии. Ни один из «творческих» периодов и вряд ли один из «критических» периодов математических теорий может быть допущен в формалистское небо, где математические теории пребывают как серафимы, очищенные от всех пятен земной недостоверности. Однако формалисты обычно оставляют открытым небольшой черный ход для падших ангелов; если для каких-нибудь «смесей математики и чего-то другого» окажется возможным построить формальные системы, «которые в некотором смысле включают их», то они могут быть тогда допущены»[10]. Лакатос не возражает против рассмотрения метаматематики как формализованной дедуктивной дисциплины и считает этот подход разумным, но он против «империалистического уклона», когда, например, как это делает Тарский, неформализованные дедуктивные дисциплины выводятся за пределы научного исследования. «Это предполагает, что предыстория формализованной дисциплины не может быть предметом научного исследования... Никто не будет сомневаться, что к некоторым проблемам, касающимся математической теории, можно подойти только после того, как они будут формализованы, совершенно так же, как некоторые проблемы относительно человеческих существ (например, касающиеся их анатомии) могут быть изучаемы только после их смерти. Но на этом основании не многие будут утверждать, что человеческие существа будут «пригодны для научного исследования», только когда они «представляются в мертвом виде», и что, следовательно, биологические исследования сводятся к изучению

---

[9] Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, М., 1975, с. 15.

[10] И. Лакатос, Доказательства и опровержения, М., 1967, с. 6.

мертвых человеческих существ...»[11]. В истории математики Лакатос выделяет ряд «доминирующих теорий», которые последовательно сменяли друг друга. Доминирующими они являются потому, что на их язык переводятся все другие теории данной науки. В математике, как уже отмечали, такими теориями были сначала древнегреческая арифметика, которая при помощи евдоксовой теории пропорций была переведена на язык геометрии и которая в свою очередь была изложена на языке алгебры в аналитической геометрии Декарта. А после создания канторовской теории множеств все математические теории начали переводиться на ее язык и основание. По Лакатосу, в процедурах перевода содержатся серьезные источники проблем. Дедуктивизм не помогает, так как неясный термин, понятие, например, содержательной теории «переводится» по-разному на самоочевидные термины доминирующей теории. Разногласия в «переводах» могут усугубиться метафизическими позициями ученых, как то было в разных подходах Коши и Вейерштрасса к структуре континуума. Лакатос показывает, как разные метафизические представления приводят к разным теоремам анализа. Причем ошибки тут нет ни в том, ни в другом случае. Но даже самый тщательный дедуктивный анализ не может нас привести к пониманию этого. Нужно обратить внимание на метафизику этих ученых, что для дедуктивизма является уже нематематикой[12].

Как мы уже отметили, на сегодняшний день программы обоснования математики в их первоначальной формулировке оказались не реализованными. Поэтому все чаще раздаются голоса математиков, которые предлагают отсутствие очевидности или необходимости основных математических принципов компенсировать их «успешностью». «Вероятное решение можно вынести... индуктивно, изучая их (аксиом— О. Г.) «успех»»[13]. Советский математик Б. А. Кушнер объясняет: «По-видимому, не будет преувеличением сказать, что сегодня не так уж ясно, являются ли успехи приложений следствием правильного выбора исходных установок теоретической математики или, наоборот, сами эти успехи являются источником разделяемой подавляющим большинством математиков веры в правильность упомянутых установок»[14]. Лакатос считает, что это позволяет говорить о возрождении эмпиризма. Поэтому математические теории можно рассматривать как «квазиэмпирические», а математику в целом понимать как естественную науку. Это позволяет Лакатосу применить принцип фальсификации, которым он широко пользуется в исследовании теоремы Эйлера о многогранниках[15]. В отличие от логических позитивистов, Лакатос не отделяет процесс создания и становления научных теорий от результата, то есть уже завершенной теории, и это позволило ему дать позитивную программу исследования математической эвристики, теоретически обосновать богатый материал педагогической и научной деятельности Пойа. Лакатос является в определенном смысле продолжателем некоторых

---

[11] Там же, с. 8.

[12] См:. I. Lakatos, Philosophical papers. vol. 2. Mathematics, science and epistemology, Cambridge univ. press, 1978, p. 285.

[13] K. Gödel, What is Cantor's continuum problem? In: Philosophy of mathematics, Oxford, 1964. p. 265.

[14] Б. А. Кушнер. Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973, с. 12.

[15] «Современные зарубежные исследования по философским проблемам математики. Научно-аналитический обзор», М., 1983.

аспектов философии математики Пуанкаре и Брауэра. Нас не должно удивлять, что столь разные по своим философским воззрениям на математику ученые, оказывается, имеют и нечто общее. Пуанкаре и Брауэр—это два разных взгляда на основание математики. Но отношение к математике как естественнонаучной теории в их исследованиях по философии математики является общим стержневым моментом. Пуанкаре пишет: «...Сделавшись строгой, математическая наука принимает искусственный характер, который поражает всех; она забывает свое историческое происхождение; видно, как вопросы могут разрешаться, но уже не видно больше, как и почему они ставятся. Это указывает на то, что не достаточно одной логики; что наука доказывать не есть еще вся наука и что интуиция должна сохранить свою роль как дополнение—я сказал бы, как противовес или как противоядие логики»[16]. А. Брауэр не просто сохраняет интуицию, но и кладет ее в основание математики.

Понимание математики как естественнонаучной теории имело и другое ответвление. Имеется в виду психологизм Дж. Милля и раннего Э. Гуссерля. Субъективизм был крайним проявлением такого рода психологизма.

Поппер, Пойа, Лакатос не отрицают все полезное, к чему может привести первое направление, но, задавшись целью показать его ограниченность и плодотворные потенции другого направления, они не осуществили диалектический синтез обоих направлений, хотя и показали механизм работы того аппарата, использующего математическую интуицию при формировании гипотез, придумывании контрпримеров, который ведет факт от момента его возникновения на самом низком, пусть даже эмпирическом уровне, до момента включения его в формализованном виде в абстрактные, формальные системы. Разобщенность этих направлений, их обособленность, параллелизм и дает возможность «навешивать ярлыки» дедуктивистов на одних и эмпиристов—на других.

Следующие положения математики Лакатоса должны быть безусловно приняты. Это две «недостижимости»: 1. недостижимость окончательного, полного обоснования математики; 2. недостижимость абсолютной строгости. Первое является следствием исследований Гёделя, а второе—работ по семантике Карнапа и Тарского. Ясно осознать эти два момента—значит преодолеть последний кризис математической науки. Можно сказать, что сами математики стихийно уже преодолели его. Теорема Гёделя о неполноте в математике сыграла ту же роль, что законы термодинамики в физике. Открытие последних позволило раз и навсегда решить вопрос о «вечных двигателях». Математики уже не ищут глобального обоснования математической науки. Отношение к строгости тоже резко изменилось. Был понят и принят не только исторический характер математической строгости, но и то, что ее всегда надо соотносить с конкретной теорией, которая по сути заданием своих основных положений определяет статус строгости. У математиков догеделевского периода отсутствовало четкое осознание этих двух фактов. Заслуга Лакатоса заключается в том, что он выделил эти два положения, к которым пришел через понимание математики как естественной науки. Говорить, что, сближая математику с опытными науками, он пытался таким образом ее обосновать, на наш взгляд, неверно. Ни Пойа, ни Лакатос не отождествляют математику с естественными науками, хотя и прослеживают глубокие аналогии в их генезисе и ме-

---

[16] А. Пуанкаре, Ценность науки, М., 1906, с. 20.

тодах исследования. Принять такое толкование философии математики Лакатоса значит упростить его точку зрения до наивного эмпиризма. Кроме того это означало бы, что в практике Лакатос находит глобальное обоснование математики, против которого он выступает. Против Лакатоса выдвигаются следующие возражения: 1) математические теории являются «жесткими» или, говоря языком научно-исследовательских программ, не имеют защитного пояса;
2) с появлением новой теории старая не отбрасывается, а существует рядом, выполняя свои задачи;
3) в математике не достигается окончательная строгость, а в физике окончательная истинность; они стремятся к различным идеалам как формальное и как содержательное знание, и программы их обоснования имеют смысл только в плане соответствующих идеалов;
4) обоснование физики практическая задача, а математики — теоретическая[17]. Но не вдруг же появляются «жесткие» математические теории. Весь путь к ним это разве не математика или разве в физике идет только процесс отбрасывания старых теорий при появлении новых? Верно, что «Коперник отбросил Птолемея», но верно и то, что Эйнштейн «не отбросил» Ньютона. Два последних возражения против Лакатоса справедливы, если рассматривать математику только как «формальное исчисление», но как раз с этим и не согласен с самого начала Лакатос.

Понимание математики как формально логической системы привело к пересмотру всех областей математики и к попыткам изложить их строго дедуктивным методом, исключив тем самым все субъективное из математики. При этом были достигнуты внушительные успехи как в формализации и аксиоматизации математики, так и в теории доказательств, т. е. в метаматематике. Насколько далеко распространялись эти успехи и чем они ограничивались, мы отметили ранее. Что касается второго подхода, т. е. понимания математики как естественнонаучной теории, то и он имеет свои успехи в развитии математики. Остановимся на одном из них. Отмеченный подход дает возможность говорить о гипотезах в ней. Наличие гипотез в математике и математическом познании подчеркивает момент активности познающего субъекта, но вместе с тем указывает и на момент субъективности. «Математическая истина, в своей первоначальной форме, есть не что иное, как гипотеза, подлежащая проверке, и не может быть чем-либо другим; но... гипотеза, здесь, будучи признана, путем демонстрации или путем доказательства, несомненно истинной или несомненно ложной, существует не в большей или меньшей степени вероятности, подобно тому, как это бывает в науках фактов. Из этого следует, что присутствие гипотезы гораздо легче не замечается или не признается в математике, чем в других науках»[18].

При рассмотрении проблемы оснований математических теорий возникает вопрос о гипотетичности аксиом, подобно тому, как может быть поставлен вопрос о том, являются ли гипотезами принципы естественнонаучных теорий. Аксиомы, в отличие от принципов этих теорий, связаны с опытом только через интерпретацию. Как известно, аксиомы принципиально недоказуемы в той системе, которую они определяют, но в других становится возможным говорить об их доказа-

---

[17] Е. А. Беляев, В. Я. Перминов, Философские и методологические проблемы математики, М., 1981, с. 125.

[18] Э. Навиль, Логика гипотезы, Спб., 1882, с. 31.

тельстве, т. е. они превращаются в теоремы. И это снимает кажущееся различие между гипотезами-аксиомами и гипотезами-теоремами.

Если рассматривать математику не просто как язык науки, но как содержательную область знаний, то только в этом смысле гипотезы в математике будут аналогичны гипотезам естественных наук. Поэтому становится возможным говорить о них в терминах правдоподобных рассуждений. Это в свою очередь позволяет строить логику гипотез, в смысле Д. Пойа, что помогает преодолеть тот момент субъективности, о котором мы упомянули выше.

Если подвести итоги, то можно сказать следующее. Математика, конечно, не является опытной наукой. «...Геометрия занимается не отношениями ее понятий к предметам опыта, а лишь логической связью этих понятий между собой»[19]. Положения математики не подтверждаемы и опровергаемы опытом в силу того, что они определены логически. Убежденность в непротиворечивости математических теорий на практике возникает в результате интерпретации их, в то время как непротиворечивость (только локально) доказывается чисто теоретически в пределах самой математики. Но все это не значит, что нельзя проводить глубокие аналогии между генезисом и методами математики и естественных наук. В таким образом понимаемую математику естественно вписываются и формальные, аксиоматические математические теории. Они являются результатом закономерной эволюции содержательных, неформализованных математических теорий.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՓԻԼԻՍՈՓԱՅՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԱՐԴԻ ՎԵՃԵՐԻ ՇՈՒՐՋ
(Երկու մոտեցում մաթեմատիկայի էության ըմբռնման նկատմամբ)

ՕԼԵԳ ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ամփոփում

Մաթեմատիկայի գիտելիքի օբյեկտիվության հարցի լուծումն հիմնականում կախված է մաթեմատիկայի էության ըմբռնումից։ Ուստի քննության են առնվում մաթեմատիկայի փիլիսոփայության մեջ որոշակիորեն սահմանագծված երկու ըմբռնումները, այն է՝ մաթեմատիկան որպես տրամաբանորեն անհակասական ձևական կառուցվածք՝ «մաթեմատիկան որպես լեզու» (Դեկարտ, Լայբնից, Ռասել, Հիլբերտ և ուրիշներ) և մաթեմատիկան որպես բնական գիտություն՝ «մաթեմատիկան որպես ֆիզիկա» (Վայլ, Պոյա, Պոպեր, Լակատոս և ուրիշներ)։ Այս հակադրման մեջ համեմատաբար ավելի ցայտուն են դրսևորվում այն առանձնահատկությունները, որ ունի ճանաչողության սուբյեկտի բացառման և գիտելիքի օբյեկտիվացման պրոցեսը մաթեմատիկայում։ Նման վերլուծությունը հնարավորություն է ընձեռում նաև ի հայտ բերելու հիշյալ մոտեցումների փոխլրացչությունը որպես մաթեմատիկայի էության ամբողջական ըմբռնման նախադրյալ։

19 А. Эйнштейн, Физика и реальность, М., 1965, с. 168.