ՀՏԴ 378 148 53 Ֆիզիկա

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՈՒԺԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՎՐԱ ԹԵՄԱՆ ԲՈՒՀԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑՆԵՐՈՒՄ

Աշոտ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Հասմիկ ԱԶԱՏԽԱՆՅԱՆ**, Ալբերտ ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ***

Բանալի բառեր՝ *ուժադաշտ, շփման ուժ, սիստեմատիկ, ստախոստիկ, դելտա-կորելացված, վերջավոր տարբերություններ, դետերմինիստիկ, համասեռ, անհամասեռ, անսահման միջավայր:*

Ключевые слова: силовое поле, сила трения, систематический, стохастический, дельта-коррелированный, конечные разности, детерминированный, однородный, неоднородный, бесконечная среда.

Key words: *force field, friction force, sistematic, accidental, delta-correlated, finite differences, determined, homogeneous, heterogeneous, infinite medium.*

А. Хачатрян, А.Азатханян, Ал.Алексанян

Изучение темы “Влияние случайной силы на динамические системы” в вузовских курсах физики

В работе рассматривается простой пример движения в неограниченной среде одной частицы в силовом поле. При этом предполагается, что воздействие среды на частицу разбито на две части-систематическую силу трения и случайную силу-силовое поле, которое изменяется в зависимости от времени произволным образом. Полученные результаты схожы с результатами, которые получаются методом стохастических дифференциальных уравнений, если принять, что $\vec{F}_r(t)$ представляет собой дельта-кореллированный случайный процесс.

A. Khachatryan, H. Azatkhanyan, Al. Alexsanyan

The Study of the Theme ‘’Impact of on Accidental Force on a Dynamic System’’ in University Courses of Physics.

The research considers a simple example of the motion of one particle in the force field in infinite medium.

It is supposed that the effect of the environment on the particle is divided into two parts: systematic fictional force and accidental force - force field that arbitrarily changes depending on the time.

The obtained results are similar to the results received by the method of accidental differential equation, if we accept that $\vec{F}_r(t)$ is a delta-correlated random process.

Աշխատանքում դիտարկվում է պարզ օրինակ, անսահման միջավայրում մեկ մասնիկի շարժումը ուժադաշտում, ընդ որում ենթադրվում է, որ միջավայրի ազդեցությունը մասնիկի վրա բաժանված է երկու մասի՝ սիստեմատիկ շփման ուժի և պատահական ուժի–ուժադաշտի, որը փոփոխվում է ժամանակից կախված կամայական օրենքով: Ստացված արդյունքները նման են այն արդյունքներին, որը ստացվում են ստախոստիկ դիֆերենցիալ հավասարումների մեթոդով, եթե դրանում ընդունենք, որ $\vec{F}_r(t)$դելտա-կորելացված պատահական պրոցես է:

Արտանետված գազի մեկ մոլեկուլի վրա արտաքին ուժադաշտերի ազդեցությունները մոդելավորելու համար դիտարկենք մեկ մասնիկից բաղկացած մեխանիկական համախումբ: Ինչպես հայտնի է, այդպիսի համակարգի համար բոլոր ուժերը արտաքին են: Գրենք դրա համար շարժման հավասարումը՝ [1, էջ 144]

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\vec{F}_G+\vec{F}_r-\chi\vec{u} \qquad (1)$$

Ինչպես երևում է, արտաքին միջավայրի ազդեցությունը բաժանված է երկու մասի՝ սիստեմատիկ շփման ուժ, որը նկարագրվում է Ստոքսի օրենքով՝ $-\chi\vec{u}$ և պատահական $\vec{F}_r$ ուժ: Նշենք, որ χ–ն շփման գործակիցն է,$\vec{u}$ և m համապատասխանաբար մասնիկի արագությունն և զանգվածն է, իսկ$\vec{F}_G$ մասնիկի վրա ազդող գրավիտացիոն ուժն է:

Դիտարկվող դեպքի համար գոյություն ունի տարբեր ուղղություններով շարժումների անկախություն: Մաթեմատիկորեն դա նշանակում է,որ (1) հավասարումը տրոհվում է երեք անկախ դիֆերենցիալ հավասարումների: Ընտրենք կոորդինատական համակարգը այնպես, որ z առանցքը ուղղված լինի $\vec{F}_G$-ին հակառակ: Այսպիսով՝ կունենանք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները համապատասխանաբար սկզբնական պայմաններով՝

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\chi u_x(t) + F_r^x, \quad x(t_0) = x_0, u_x(t_0) = u_0^x, \quad (2)$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\chi u_y(t) + F_r^y, \quad y(t_0) = y_0, u_y(t_0) = u_0^y, \quad (3)$$

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -mg - \chi u_z(t) + F_r^z, \quad z(t_0) = z_0, u_z(t_0) = u_0^z \quad (4)$$

Քանի որ պատահական ուժը և, հետևաբար նաև, իր կոմպոնենտները կախված չեն մասնիկի դիրքից և նրա շարժման արագությունից, ապա (2)-(4) հավասարումները սովորական երկրորդ կարգի անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ են:

Ինչպես հայտնի է, կամայական գծային անհամասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը հավասար է համասեռ հավասարման ընդհանուր և անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծումների գումարին [2,էջ263]: Դիտարկենք (2) հավասարմանը համապատասխանող համասեռ հավասարումը:

$$\tau\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{dx(t)}{dt}, \tau = m/\chi \quad (5)$$

Տրված սկզբնական պայմաններով /տես(2)/ լուծման համար կարող ենք գրել.

$$x(t) = x_0 + u_0^x\tau(1 - exp\{-t/\tau\}): \quad (6)$$

Հաշվի առնելով արտանետվող գազի պատկերի ձևավորման հարցում պատահական ուժի դերի կարևորությունը՝ այդ ուժի հաշվառումը նպատակահարմար է իրականացնել՝ դիմելով դիֆերենցիալ հավասարումների վերջավոր տարբերությունների միջոցով ներկայացման ձևին:

Օգտվելով առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալների վերջավոր տարբերությունների միջոցով ներկայացումից [3, էջ 65] և (2) հավասարումից՝ վերը ներմուծված $x(t_j) = x_j$ $(j = 0,1,2,\dots,n)$ մեծությունների համար կարող ենք գրել

$$\frac{x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j}{\Delta t^2} = -\frac{1}{\tau}\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} + \frac{F_{j+1}^x}{m}: \quad (7)$$

Օգտվելով $u_j^x = (x_{j+1} - x_j)/\Delta t$ նշանակումից և տալով j-ին հաջորդական արժեքներ՝ հեշտ է տեսնել, որ (7) հավասարումը համարժեք է հետևյալ հանրահաշվական հավասարումների համակարգին՝

$$\begin{cases} x_2 - \left(2 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)x_1 + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)x_0 = \frac{F_1^x}{m}\Delta t^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n - \left(2 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)x_{n-1} + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)x_{n-2} = \frac{F_{n-1}^x}{m}\Delta t^2 \end{cases} \quad (8)$$

Գրված հավասարումների համակարգը բաղկացած է $n - 1$հավասարումներից, որոնք պարունակում են $n + 1$ անհայտներ՝$x_0, x_1, \dots, x_n$: Հետևաբար հավասարման լուծման միարժեքությունը պահանջում է լրացուցիչ պայման: Սկզբնական պայմանի դեպքում հայտնի են համարվում x_0 ու x_1՝ այնպես որ $x_1 = x_0 + u_0^x\Delta t$: Նշված սկզբնական պայմանների դեպքում (8) հավասարումների համակարգի լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$x_n = x_0 + u_0^x\tau - u_0^x\tau\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^n + \frac{\tau\Delta t}{m}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1 - \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^{n-i-1}\right)F_{i+1}^x \quad (9)$$

Ստացված արդյունքը արտահայտում է մասնիկի n քայլում դիրքի կախվածությունը բոլոր առանձին ժամանակահատվածներում ազդող F_i^x տարբեր ուղղություններով շարժումները ընթանում են իրարից անկախ, ապա հասկանալի է, որ (9) նման արտահայտություն գոյություն ունի նաև y, z բաղադրիչների համար:

Նշենք, որ եթե $\Delta t \ll \tau$ կատարելով $x_n = x(t)$ և $F_{i+1}^x = F(t)$ փոխարինումը հեշտ է տեսնել, որ այդ դեպքում (9)-ում գումարը վեր է ածվում ինտեգրալի՝

$$x(t) = x_0 + u_0^x\tau(1 - exp\{-t/\tau\}) + \frac{\tau}{m}\int_{t_0}^{t}(1 - exp\{-(t - t')/\tau\})F(t')dt' \tag{10}$$

Այստեղից երևում է, որ մասնիկի դիրքը որպես ֆունկցիա ժամանակից հանդիսանում է երկու բաղադրիչների գումար, որոնցից առաջինը ունի դետերմինիստիկ բնույթ, իսկ երկրորդը՝ պատահական: Առաջին բաղադրիչը համապատասխանում է սկզբնական արագության հետևանքով մասնիկի շարժմանը շփման ուժի ազդեցության տակ, իսկ երկրորդը՝ մասնիկի շարժմանը պատահական և շփման ուժերի համատեղ ազդեցության ներքո՝ առանց սկզբնական արագության:

Գրականություն

1.С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику. М. Наука 1966г.
2. Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис, Элементы прикладной математики. М. Наука 1967г.
3. Н. В. Копченова, И. А. Марон, Вычилительная математика. Физмат. Лит.2008г.

Տեղեկություններ հեղինակների մասին

Աշոտ Խաչատրյան* – Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական Համալսարան, Պոլիտեխնիկ

Համիկ Ազատխանյան** - ԱրՊՀ ընդհանուր եւ կիրառական ֆիզիկայի ամբիոն

Ալբերտ Ալեքսանյան** - ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր, ԱրՊՀ ընդհանուր եւ կիրառական ֆիզիկայի ամբիոնի վարիչ
E-mail: E-mail: alalbert@inbox.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.դ. Ա.Գ.Ալեքսանյանը