ՀՏԴ 681/3 Ինֆորմատիկա

ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԱՅԻՆ ԹԻՎԸ ՈՐՊԵՍ ԳՐԱՖԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ

Անուշ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Բանալի բառեր` *կառուցվածքային թիվ, լրացուցիչ կառուցվածքային թիվ, գրաֆ, ենթագրաֆ, ծառ-ենթագրաֆ, երկվային գրաֆ, բջիջ, գագաթ, հատույթ, ճյուղ:*

Ключевые слова: *структурное число, дополнительно структурное число, граф, подграф, дерево-подграф, дуальный граф, ячейка, вершина, сечение, ребро.*

Keywords: *structural number, supplementary structural number, graph, subgraphs, tree-subgraph, dual graph, cells, vertex, intersection, edge.*

А. Арутюнян
Структурные числа как алгебраическая модель графа

В работе приведены определение структурных чисел, их алгебра и правила дифференцирования. Каждому графу (дуальному графу) взаимооднозначно сопоставляется одно структурное (дополнительно структурное) число. Столбцы структурного числа связного графа взаимнооднозначно являются дерево-подграфами графа. Столбцы дополнительного структурного числа связного графа взаимнооднозначно представляют дополнение подграфов графа.Приводятся геометрические интерпретации структурных чисел и их производных.

A. Harutyunyan
Structural Number as Algebraic Graph Model.

The work resumes the definition of structural numbers, their algebra and rules of differentiation. Every graph (dual graph) is bijectively correlated with one structural number (supplementary structural). The columns of the structural number of the connected graph are bijectively tree-subgraphs, the columns of the supplementary structural number of the connected graph are bijectively additional subgraphs. Geometric interpretations of structural numbers and their derivatives are presented.

Աշխատանքում բերվում են կառուցվածքային թվի սահմանումը, հանրահաշիվը և ածանցման կանոնները: Յուրաքանչյուր գրաֆի (երկվային գրաֆի) փոխմիարժեք կերպով համապատասխանության մեջ է դրվում մեկ կառուցվածքային (լրացուցիչ կառուցվածքային) թիվ: Կապակցված գրաֆի կառուցվածքային թվի սյունակները փոխմիարժեք կերպով արտապատկերում են գրաֆի ծառ-ենթագրաֆները: Կապակցված գրաֆի լրացուցիչ կառուցվածքային թվի սյունակները փոխմիարժեք կերպով արտապատկերում են գրաֆի լրացում ենթագրաֆները: Բերվում են կառուցվածքային թվի և նրա ածանցյալների երկրաչափական մեկնաբանությունները:

Գրաֆների մոդելավորումը կառուցվածքային թվերի միջոցով թույլ է տալիս գրաֆների հետ կատարվող տոպոլոգիական ձևափոխությունները արտահայտել կառուցվածքային թվերի հանրահաշվի օգնությամբ [1, 2, 3]:

Դիտարկենք կամայական L բազմության տարրերից բաղկացած համակարգը հետևյալ աղյուսակի տեսքով՝

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1..} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2.\imath} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{...1} & \alpha_{...2} & \cdots & \alpha_{...n} \end{bmatrix},$$

որտեղ $\alpha_{ij} \in \ , \; i = \overline{\ ,m}, \; j = \overline{\ ,n}$:

Այս համակարգը կարելի է դիտել որպես առանձին սյունակների չկարգավորված բազմություն՝

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k \quad \cdots \quad a_n],$$

որտեղ սյունակը տարրերի չկարգավորված բազմություն է՝

$$a_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \cdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix} \quad k = 1,2,\cdots,n:$$

Եթե A համակարգը չի պարունակում միատեսակ (հավասար) սյունակներ, և սյունակները չեն պարունակում միատեսակ տարրեր, ապա այն կոչվում է կառուցվածքային թիվ: Ընդ որում սյունակները համարվում են հավասար, եթե նրանք բաղկացած են միևնույն տարրերից՝ անկախ նրանց դասավորման հերթականությունից: L բազմությունը, որի տարրերից բաղկացած է կառուցվածքային թիվը, կոչվում է ծնիչ բազմություն: Ընդհանուր դեպքում ծնիչ բազմության տարրերը կարող են լինել կամայական բնույթի: Մենք կդիտարկենք կառուցվածքային այնպիսի թվեր, որոնց համար $L \in N$, որտեղ N -ը բնական թվերի բազմություն է:

Կառուցվածքային թիվը նոր տիպի հանրահաշվի կառուցվածքային թվերի հանրահաշվի տարրն է:

Օրինակ՝ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, կառուցվածքային թվեր են:

Երկու կառուցվածքային թիվ համարվում են հավասար $(A = B)$, եթե պարունակում են նույնանման սյունակներ՝ անկախ նրանց դասավորման և նրանցում տարրերի դասավորման հերթականությունից:

A և B կառուցվածքային թվերի գումարը մի կառուցվածքային թիվ է $(C = A + B)$, որը պարունակում է A և B թվերի բոլոր սյունակները՝ առանց զույգ թիվ անգամ կրկնվող սյունակների:

A և B կառուցվածքային թվերի արտադրյալը մի կառուցվածքային թիվ է $(C = A \cdot B)$, որի սյունակները A և B թվերի սյունակների միավորման բոլոր հնարավոր տարբերակներն են՝ բացառությամբ զույգ թիվ անգամ կրկնվող սյունակների:

Տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$A + B = B + A,$$
$$A \cdot B = B \cdot A,$$
$$A(B \cdot C) = (A \cdot B)C,$$
$$A(B + C) = AB + AC:$$

Ոչ մի սյունակ չպարունակող կառուցվածքային թիվը կոչվում է դատարկ կառուցվածքային թիվ և նշանակում են $[0]$ նշանով: Միայն մեկ սյունակ պարունակող կառուցվածքային թիվը նշանակում են $[1]$ նշանով:

Եթե A և B կառուցվածքային թվերը բավարարում են $X + B = A$ պայմանին, ապա X կառուցվածքային թիվը կոչվում է A և B կառուցվածքային թվերի տարբերություն՝ $X = A - B$: Տեղադրելով $X = A + B$ արժեքը $X + B = A$ արտահայտության մեջ՝ կստանանք՝ $A - B = A + B$: Յանկացած կառուցվածքային թիվ համարվում է իր հակադիր թիվը:

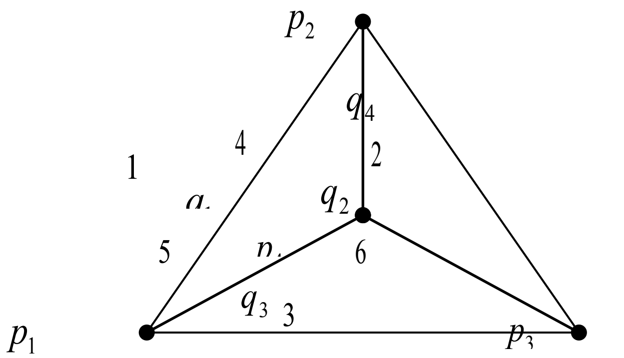
Եթե A և B կառուցվածքային թվերի համար գոյություն ունի այնպիսի X կառուցվածքային թիվ, որ $A = X \cdot B$, ապա A թիվը բաժանվում է B թվի վրա: Միայն երկու բաժանարար ունեցող կառուցվածքային թիվը կոչվում է պարզ: Երկուսից ավելի բաժանարար ունեցող կառուցվածքային թիվը կոչվում է բարդ: Յանկացած բարդ կառուցվածքային թիվ կարելի է ներկայացնել պարզ կառուցվածքային թվերի արտադրյալի տեսքով՝

$$A = \prod_{i=1}^{m} P_i ,$$

որտեղ P_i -ն միատող կառուցվածքային թիվ է, m -ը A կառուցվածքային թվի տողերի քանակն է:

Դիտարկենք $G(V, E)$ ամբողջական չուղղորդված գրաֆը, որտեղ V -ն և E -ն համապատասխանաբար նրա գագաթների և կողերի բազմություններն են: Իր ներսում ոչ մի ճյուղ չպարունակող կոնտուրը կոչվում է բջիջ: Բջիջ է նաև գրաֆի արտաքին ճյուղերով կազմված կոնտուրը: Գրաֆի այն կողերի բազմությունը, որի հեռացումից հետո գրաֆը տրոհվում է երկու մեկուսացված ենթագրաֆների, կոչվում է կտրվածք: Գրաֆի երկու գագաթները միացնող ճյուղերի բազմությունը կոչվում է ճանապարհ: Գրաֆի երկու բջիջները միացնող գիծը հատող ճյուղերի բազմությունը կոչվում է հատույթ: Բջիջը, գագաթը, ճանապարհը և հատույթը պարզ տեղաբանական տարրեր են: Ծառը և լրացումը երկվային տեղաբանական տարրեր են: Յուրաքանչյուր տեղաբանական տարրի համապատասխանության մեջ է դրվում միատող պարզ կառուցվածքային թիվ, որոնց միջոցով ստացվում է գրաֆի կառուցվածքային թիվը: Համարում ենք՝ գրաֆի կողերը համարակալված են բնական թվերով: Պարզ տեղաբանական տարրին համապատասխանության մեջ դրվում միատող պարզ կառուցվածքային թիվ, որը որոշվում է տվյալ տարրը բնորոշող ճյուղերի բազմությամբ: Նշանակենք գրաֆի գագաթների թիվը p -ով, բջիջների թիվը q -ով, ճյուղերինը՝ b -ով:

Դիտարկենք նկ.1-ում պատկերված գրաֆի պարզ տեղաբանական տարրերն ու նրանց համապատասխան կառուցվածքային թվերը:



Նկ.1

Գագաթներին համապատասխանող կտրվածքների պարզ կառուցվածքային թվերն են՝

$P_1 = [\;\;5\;\;3],\; P_2 = [\;\;4\;\;2],\; P_3 = [\;\;3\;\;6],\; P_4 = [\;\;5\;\;6]:$

Բջիջներին համապատասխանող պարզ կառուցվածքային թվերն են՝

$Q_1 = [\;\;4\;\;5],\; Q_2 = [\;\;4\;\;6],\; Q_3 = [\;\;5\;\;6],\; Q_4 = [\;\;2\;\;3]:$

p_1, p_2 գագաթները միացնող ճանապարհներից են՝

$D_{12} = [\;],\; D_{12} = [\;\;5\;\;6]$ և այլն:

q_1, q_2 բջիջների հատույթներից են՝

$B_{12} = [\;],\; B_{12} = [\;\;6]$ և այլն:

Գրաֆի գագաթների կառուցվածքային թվերի գումարը և արտադրյալը հավասար է զրոյի: Յուրաքանչյուր գագաթի կառուցվածքային թիվ հավասար է մնացած գագաթների կարուցվածքային թվերի գումարին՝

$$P_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} P_j \; :$$

Գրաֆի գագաթների ցանկացած $p-$ հատ կառուցվածքային թվերի արտադրյալը նույնն է և կոչվում է գրաֆի կառուցվածքային թիվ՝

$$A = P_1 P_2 \cdots P_{p-} \; :$$

Գրաֆի բջիջների ցանկացած $q-$ հատ կառուցվածքային թվերի արտադրյալը նույնն է և կոչվում է գրաֆի լրացուցիչ կառուցվածքային թիվ՝

$$A^d = Q_1 Q_2 \cdots Q_{q-} \; :$$

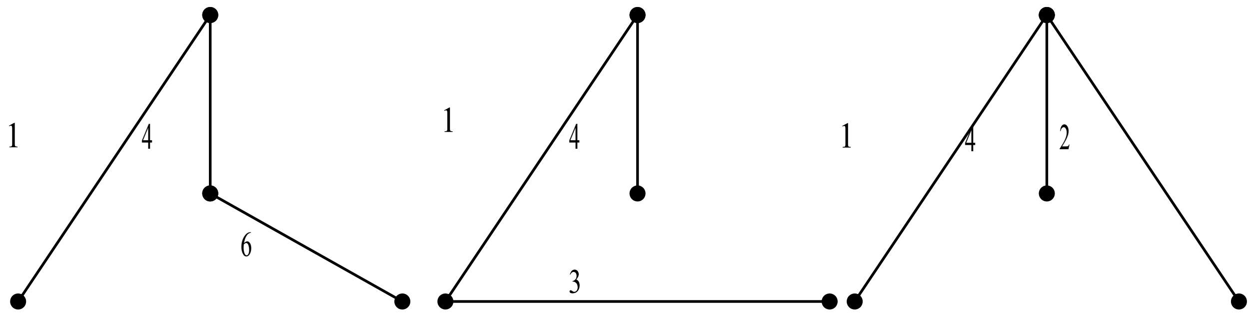
Կապակցված գրաֆի կառուցվածքային թվի սյունակները փոխմիարժեք կերպով արտապատկերում են գրաֆի ծառ-ենթագրաֆները: Կապակցված գրաֆի լրացուցիչ կառուցվածքային թվի սյունակները փոխմիարժեք կերպով արտապատկերում են գրաֆի լրացում ենթագրաֆները:

Նկ.1-ում պատկերված գրաֆի համար որոշենք կառուցվածքային թիվը՝

$$A = P_1 P_2 P_3 = [\;5\;\;3\,][\;4\;\;2\,][\;3\;\;6\,] = [\;5\;\;3\,]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 3 & 5 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Գրաֆի կառուցվածքային թիվն ունի 16 սյունակ, հետևաբար գրաֆն ունի 16 ծառ, դրանցից են՝



Գրաֆի լրացուցիչ կառուցվածքային թիվն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A^d = Q_1 Q_2 Q_3 = [\;4\;\;5\,][\;4\;\;6\,][\;5\;\;6\,] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 & 4 & 6 & 5 & 3 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով՝ ցանկացած կապակցված գրաֆի համապատասխանության մեջ են դրվում A և A^d կառուցվածքային թվերը, որոնց համար գրաֆը կոչվում է համապատասխանաբար ուղիղ և հակադարձ երկրաչափական պատկեր:

A կառուցվածքային թվի հանրահաշվական ածանցյալն ըստ նրա որևէ α տարրի $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ կառուցվածքային թիվ է, որը պարունակում է A կառուցվածքային թվի միայն α տարրը պարունակող սյունակներն առանց այդ տարրի:

Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 7} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} :$$

Եթե A կառուցվածքային թիվը միատող է, ապա $\frac{\partial A}{\partial \alpha} =$, եթե $\alpha \notin$ և $\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 1$, եթե $\alpha \in$: Տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}(A_1 + A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}(A_1 A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} A_1 :$$

$\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ կառուցվածքային թվի երկրաչափական պատկերը ստացվում է A երկրաչափական պատկերից՝ α տարրին համապատասխանող ճյուղը կարճ փակելով, այսինքն՝ α ճյուղի հարակից հանգույցները համատեղելով:

Եթե $A = P_1 P_2 \ldots P_{p-}$, ապա

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = (P_1 + P_2) P_3 \cdots P_{p-} :$$

$\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}$ կառուցվածքային թվի հակադարձ երկրաչափական պատկերը ստացվում է A^d թվի հակադարձ երկրաչափական պատկերից α տարրին համապատասխանող ճյուղը խզելով, այսինքն α ճյուղի հարակից բջիջները միավորելով:

Եթե $A^d = Q_1 Q_2 \cdots Q_{q-}$ ապա

$$\frac{\partial A^d}{\partial \alpha} = (Q_1 + Q_2) Q_3 \cdots Q_{q-} :$$

Դիտարկենք նկ.1-ում պատկերված գրաֆի կառուցվածքային թվի $\frac{\partial A}{\partial}$ կառուցվածքային թիվը և նրա երկրաչափական պատկերը՝

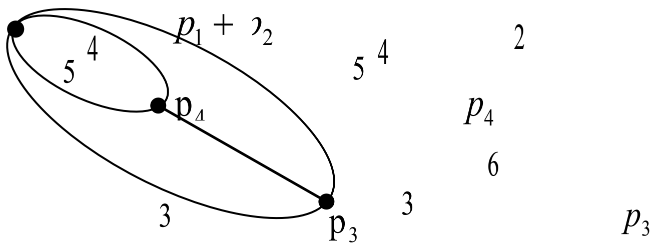
$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} :$$

$$\frac{\partial A}{\partial} = \frac{\partial}{\partial}(P_1 P_2 P_3) = \frac{\partial}{\partial}[\;5\;\;3][\;4\;\;2][\;3\;\;6] =$$

$$= [\;3\;\;6]\left(\frac{\partial[\;5\;\;3]}{\partial}[\;4\;\;2] + \frac{\partial[\;4\;\;2]}{\partial}[\;5\;\;3]\right) =$$

$$= [\;3\;\;6]([\;4\;\;2] + [\;5\;\;3]) = [\;3\;\;6][\;3\;\;4\;\;5] :$$

$\frac{\partial A}{\partial}$ կառուցվածքային թվի երկրաչափական պատկերը պատկերված է նկ. 2-ում, որն ստացվում է նկ.1-ում պատկերված գրաֆից՝ համատեղելով նրա P_1 և P_2 գագաթները:



Նկ. 2

Դիտարկենք նկ.1-ում պատկերված գրաֆի հակադարձ կառուցվածքային թվի $\frac{\partial A^d}{\partial 4}$ հակադարձ կառուցվածքային թիվը և նրա հակադարձ երկրաչափական պատկերը:

$$\frac{\partial A^d}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 6 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

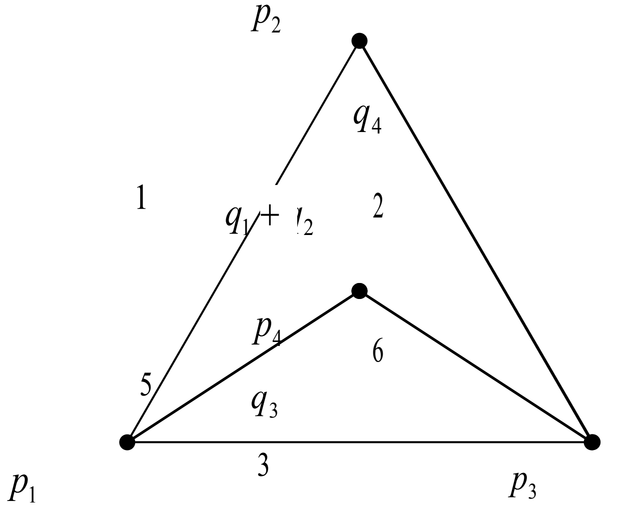
կամ

$$\frac{\partial A^d}{\partial 4} = \frac{\partial}{\partial 4}\left(Q_1 Q_2 Q_3\right) = \frac{\partial}{\partial 4}\left[\;4\;\;5\right]\left[\;4\;\;6\right]\left[\;5\;\;6\right] =$$

$$= \left[\;5\;\;6\right]\left(\frac{\partial\left[\;4\;\;5\right]}{\partial 4}\left[\;4\;\;6\right] + \frac{\partial\left[\;4\;\;6\right]}{\partial 4}\left[\;4\;\;5\right]\right) =$$

$$= \left[\;5\;\;6\right]\left(\left[\;4\;\;6\right] + \left[\;4\;\;5\right]\right) = \left[\;5\;\;6\right]\left[\;2\;\;5\;\;6\right]$$

$\frac{\partial A^d}{\partial 4}$ լրացուցիչ կառուցվածքային թվի հակադարձ երկրաչափական պատկերը պատկերված է նկ. 3-ում, որն ստացվում է նկ.1-ում պատկերված գրաֆից՝ խզելով 4-րդ ճյուղը:



Նկ.3

A կառուցվածքային թվի հակադարձ հանրահաշվական ածանցյալ ըստ նրա որևէ α տարրի կոչվում է $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$ կառուցվածքային թիվը, որը պարունակում է A թվի միայն α տարր չպարունակող սյունակները:

Օրինակ՝

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}:$$

Տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}(A_1 + A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} + \frac{\delta A_2}{\delta\alpha},$$

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}(A_1 A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} A_2 + \frac{\delta A_2}{\delta\alpha} A_1 + A_1 A_2:$$

Մեկ α տարր պարունակող կառուցվածքային թվի համար

$$\frac{\delta \alpha}{\delta\alpha} = 1:$$

Եթե A կառուցվածքային թիվը α տարր չի պարունակում, ապա

$$\frac{\delta A}{\delta\alpha} = A:$$

Հակադարձ հանրահաշվական և հանրահաշվական ածանցյալների միջև գոյություն ունի հետևյալ կապը՝

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(A \alpha) = \frac{\delta A}{\delta\alpha}, \text{ կամ } A = \alpha \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\delta A}{\delta\alpha}:$$

Ենթադրենք P_1, P_2 և P միատող կառուցվածքային թվեր են, ընդ որում $\alpha \notin P$, $\alpha \notin P_1$, $\alpha \notin$

$$\frac{\delta(P P_1)}{\delta\alpha} = P \frac{\delta P_1}{\delta\alpha}, \quad \frac{\delta P_1 P_2}{\delta\alpha} = \frac{\delta P_1}{\delta\alpha} \frac{\delta P_2}{\delta\alpha}:$$

$\frac{\delta A}{\delta\alpha}$ կառուցվածքային թվի երկրաչափական պատկերը ստացվում է A թվի երկրաչափական պատկերից խզելով α ճյուղը:

$\frac{\delta A^d}{\delta\alpha}$ կառուցվածքային թվի հակադարձ երկրաչափական պատկերը ստացվում է՝ A^d թվի երկրաչափական պատկերից α ճյուղի կարճ փակումով:

Գրականություն

1. Харари Ф., Теория графов, М., 2006.
2. Беллерт С., Возняцки Г., Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел, М.: Мир, 1972.
3. Акопджанян Г.Д., Сафарян В.С., Исследование электрических цепей методом структурных чисел: Учебное пособие, ГИУА, Ереван, 1995.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին

Անուշ Հարությունյան – ԱրՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դասախոս
E-mail: anooshik@rambler.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.-մ. գ.դ. Ա.Մ.Խաչատրյանը