ՀՏԴ 681/3 Ինֆորմատիկա

ՀԵՌԱՀԱՂՈՐԴԱԿՑԱԿԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՏԵՂԱԴՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Վազգեն ԱՌՍՏԱՄՅԱՆ

Բանալի բառեր. *Բազմաչափ օպտիմալացում, դիսկրետ օպտիմիզացիա, ծրագրում, հեռահաղորդակցական կենտրոններ, գրաֆ, մատրից, օպտիմալ լուծում, ֆունկցիա, ալգորիթմ:*

Ключевые слова. *Многомерная оптимизация, дискретная оптимизация, планирование, телекоммуникационные центры, граф, матрица, оптимальное решение, функция, алгоритм.*

Key words. *Multivariate optimization, discrete optimization, planning, telecommunication centers, graph, matrix, the optimal solution, function, algorithm*

В. Арустамян

Задача оптимального размещения центров телекоммуникаций

Рассматривается задача оптимального размещения центров телекоммуникаций. Представлена ее математическая модель в виде двухкритериальной задачи поиска доминирующего множества в графе. Анализируются свойства модели и методы ее решения. Приводятся результаты вычислительного эксперимента для Аскеранского и Мартакертского районов.

V. Arustamyan

The Problem of Optimal Location of Telecommunication Centres

The problem of optimal location of telecommunication centres is considered. Its mathematical model in the form of a two-criteria search problem of dominating set in the graph is represented. The properties of the model and methods for its solution are analyzed. The results of the computational experiments for Askeran and Martakert regions are introduced.

Աշխատանքում դիտարկվում է հեռահաղորդակցական կենտրոնների օպտիմալ տեղադրման հարցը: Տրված է կենտրոնի տեղադրման մաթեմատիկական մոդելը՝ որպես երկու հայտանիշով գրաֆում դոմինացվող բազմության որոնման խնդիր: Վերլուծվում է մոդելի և մեթոդի լուծման հայտանիշը: Դիտարկված են փորձնական տվյալներ, որոնք կատարվել են Ասկերանի և Մարտակերտի շրջաններում:

Շրջանների տնտեսական զարգացման գործում կարևոր դերակատարություն ունեն հեռահաղորդակցական տեխնոլոգիաները: Հարցի հրատապ լուծման համար անհրաժեշտ է օպտիմալ կերպով լուծել տարածաշրջանում կենտրոնների տեղադրման հարցը:

Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է ստեղծել ամբողջաթիվ գծային ծրագրման մոդել:

1. Խնդրի դրվածքը.

Թող $P_1,\ldots P_n$ ծառայություն մատուցող հեռահաղորդակցման կենտրոնների բազմություններն են, cj-ն՝ Pj կենտրոնի կառուցման գինն է ($j=\overline{1,n}$): Կենտրոնների հեռավորություններն է dij=d(Pi Pj): Թող տված է d-ն, որը երկու կենտրոնների մեծագույն հեռավորությունն է: Կենտրոնների ստեղծումը թույլատրելի է, եթե կարելի է սպասարկել առնվազն մեկ կենտրոնից: Անհրաժեշտ է գտնել հեռահաղորդակցման կենտրոնի այնպիսի տեղադրում, որպեսզի ծախսը լինի փոքրագույնը:

Կենտրոնների տեղադրման արդյունավետության որոշման համար դիտարկենք m–հատ տեխնիկական և սոցիալ-տնտեսական գործոններ: S_k^j-ով ($k=\overline{1,m}$) նշանակենք այդ գործոնների նշանակությունը P_j ($j=\overline{1,n}$) կենտրոնների համար: Այստեղ պետք է հաշվի առնել բնակչության քանակը, գործարքի մեծության չափը, օգտագործողների քանակը տվյալ տարածքում, ինչպես նաև տվյալ տարածքում ապրող ուսանողների և աշակերտների քանակը [6]:

Թող u_k^j ($k=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) տվյալ կենտրոնի կշռային գործակիցն է, որը մատնանշում է k գործոնի կարևորությունը ըստ j կենտրոնի: Pj կենտրոնի տեղադրման արդյունավետությունը կարելի է հաշվարկել այսպես.

$u_j = \sum_{k=1}^{m} \omega_k^j S_k^j$:

ω_k^j -ն հանդիսանում է որոշում ընդունող անձ կամ էքսպերտների խումբ:

Ըստ d_{ij}-հեռավորության և d թվի կառուցենք $G=(V,E)$ գրաֆ, որն ունի $V=\{P_1 \dots P_n\}$ գագաթների և $E \subseteq \{(P_iP_j)(i,j=\overline{1,n}, i \neq j)\}$ կողերի բազմություն:

(P_iP_j) կողը պատկանում է E բազմությանը, եթե $d_{ij} \leq d$: Թող A մատրիցը G գրաֆի գագաթների հարակից մատրիցն է:

Ենթադրենք $a_{ii}=1; i=\overline{1,n}$: Այդ դեպքում ելակետային խնդիրը կարելի է դիտարկել որպես երկու հայտանիշով գրաֆում դոմինացվող բազմության որոնման խնդիր:

Մուծենք բուլյան փոփոխականներ,

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ եթե հեռահաղորդման կենտրոնը գտնվում է } P_j \text{ կետում} \\ 0, \quad \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}.$$

Երկրորդ չափանիշի համար կատարենք մաքսիմիզացիայից անցում մինիմիզացիայի և կառուցենք մաթեմատիկական մոդել ամբողջաթիվ գծային ծրագրման խնդրի տեսքով.

$$F_1(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min \qquad (1)$$

$$F_2(x)=-\sum_{j=1}^{n} u_j x_j \to min \qquad (2)$$

որը բավարարվում է հետևյալ պայմաններին

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, i=\overline{1,n} \qquad (3)$$

$$x_j \in \{0,1\}, j=\overline{1,n} \qquad (4)$$

Այնուհետև կենթադրենք, որ $c_j>0$, $u_j>0$, $j=\overline{1,n}$:

2. Մոդելի վերլուծությունը.

Դիտարկենք դիսկրետ օպտիմալացման բազմաչափ խնդիրը

$$F(x)=(F_1(x),\dots,F_m(x)) \to min$$
$$x \in X$$

որտեղ X–ը վերջավոր բազմություն է:

$\tilde{X}$-ով նշանակենք լավագույն լուծման բազմությունների քանակը, իսկ X^0-ով բոլոր հնարավոր ելքերը [4], ենթաբազմությունների համար $X^0 \subseteq \tilde{X}$ և $F(X^0)=F(\widetilde{X})$, որտեղ $F(X')=\{F(X)|X \in X'\}$:

Դիսկրետ օպտիմալացման համար գոյություն ունի հետևյալը.

A_x-ի համար գոյություն ունի այնպիսի $F(x)$ վեկտոր-ֆունկցիա, որի համար տեղի ունի

$$X^0=\tilde{X}=X \qquad (5)$$

հավասարությունը:

[1-4]-ում հետազոտվել են բազմաչափ դիսկրետ խնդիրներ ու օգտագործվել են այն չափանիշները, որոնք հնարավոր չէ լուծել գծային ծրագրման օգնությամբ: Որպես նման խնդիր, որոնց համար չի կարելի ստանալ Պարետո-օպտիմալի բոլոր էլեմենտները, հանդիսանում են (1) և (2) նպատակային ֆունկցիաները, երբ $n \geq 3, C_j=2^{j-1}, U_j=3^{j-1}, j=\overline{1,n}$ և ունի (4) սահմանափակություն և

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \geq 1 \qquad (6)$$

Դրա համար ցանկացած ոչ զրոյական X կետ հանդիսանում է Պարետո-օպտիմալ լուծում:

Ընդհանուր դեպքում $x'=(1,0,\dots,0,1)$ կետը չի կարող լինել օպտիմալ լուծում $F^\lambda=\sum_{j=1}^{n}(\lambda C_j-(1-\lambda)u_j)X_j$ ֆունկցիայի մինիմիզացիայի խնդրի համար, երբ գոյություն ունի (4) և (6) սահմանափակումներ և $\lambda \in [0,1]$:

Խնդրի լուծման մեթոդները.

Խնդրի լավագույն լուծման համար օգտվում ենք ուղղագրական մինիմումի խնդրից [2,3]:

$F(X)=(F_1(x),\dots,F_m(x)$ վեկտոր-ֆունկցիայի Պարետո-օպտիմալ լուծում x^* անվանում են ուղղագրական մինիմում, եթե $(x^*)=Lexmin\{F(x)|x \in \tilde{X}\}$: (1)-(4) խնդրի համար $F(x)=(F_2,F_1)$ վեկտոր-ֆունկցիային համապատասխանում է միակ $Lexmin$, այսինքն ունի միակ լուծում (1,1,…,1): Գործնական տեսանկյունից առավել հետաքրքիր է այն $Lexmin$-ը, որտեղ $F(x)=(F_1,F_2)$: Քննարկենք դրա ստացման եղանակը.

1. **Գծային փաթաթման չափորոշիչների ալգորիթմը**

Այստեղ կատարվում է անցում բազմաչափ լուծումից միաչափ լուծման:

Ցանկացած բազմաչափորոշ խնդրի լուծման համար, որտեղ կան 2 և ավելի չափորոշիչներ, խնդրի լուծումն իրականացվում է գծային փաթաթման ալգորիթմի օգնությամբ [2,3]: (1)-(4) խնդրի լուծման գծային փաթաթման գործակիցները կարելի է որոշել ըստ [3] − ի հետևյալ կերպ՝

$$\lambda_1 = \frac{a+1}{a+2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{a+2},$$

որտեղ $\alpha = \sum_j^n u_j - [\tilde{u}_0] + 1$:

Այստեղ $[\tilde{u}_0]$-ն նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ նշանակությունն է գծային ծրագրման համար և

$$\sum_{j=1}^{n} u_j\, x_j \to min$$

ըստ (3) պայմանների և $0 \leq x_j \leq 1, j = \overline{1,n}$:

2. **Հաջորդական օպտիմալացման մեթոդը**

Նման մոտեցման դեպքում կատարվում է անցում բազմաչափ խնդրից միաչափ խնդրին և ուղղագրական մինիմում խնդրի փնտրումը (1)-(4) մեթոդով հաջորդական օպտիմալացման միջոցով գրառենք հիբրիդային ալգորիթմի օգնությամբ, որը նախատեսված է ծածկույթի համար [5]:

Այդ խնդրի հիմնական գաղափարը դիտարկվող էլեմենտների L −դասի մեջ է, որի համար ամբողջական ֆունկցիան չի գերազանցում $p - 1$ (p-ն ամբողջական ֆունկցիայի ընթացիք ռեկորդն է): L −դասի հաջորդ էլեմենտի որոնումը կատարվում է գծային ծրագրման խնդրի հաջորդական լուծման ընթացքում:(1)-(4) խնդիրների լուծումը կարելի է կատարել 2 փուլով:

Առաջին փուլում խնդիրը լուծվում է (1), (3),(4) ծածկույթների ալգորիթմների համար [5]: x^* -ով նշանակենք նրա օպտիմալ լուծումը և ընդունենք, որ $c_0^* = F_1(x^*)$:

Երկրորդ փուլում նախատեսվում է լուծել (2)-(4) խնդիրները, որոնք լուծվում են լրացուցիչ սահմանապակումների օգնությամբ

$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j = c_0^*$ (7)

Նշենք, որ (2),(4),(7) խնդիրներն արդյունավետ կերպով իրենց լուծումն են ստանում L-դասի ալգորիթմների օգնությամբ, քանի որ այդ դեպքում ստանում ենք գծային խնդրի անալիտիկ լուծումը: Դրա համար (2), (4), (7) խնդիրների ընթացիկ թույլատրելի կետը պետք է վերցնենք հետևյալ կերպ:

Սկսելով x^* կետից, լուծենք L-դասի խնդիր (2), (4) և (7) համար: x' −ով նշանակենք ալգորիթմով ստացված ամբողջաթիվ արժեքը: Եթե x' −ը բավարարում է (3) սահմանափակությանը, ապա x' −ը կլինի (2)-(4), (7) սահմանափակումների խնդիրների թույլատրելի լուծումը, հակառակ դեպքում պետք է անցում կատարել L-բաշխման հաջորդ էլեմենտին:

Հաջորդ տարածված մեթոդը, որը նախատեսված է բազմագործոն խնդիրների լուծման համար, հանդիսանում է **ցանցային մեթոդը**: Այստեղ կարելի է երկչափանի (1)-(4) խնդրից անցնել միաչափ P_1–խնդրին

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min,$$

որն ունի (3),(4) սահմանափակություն և

$\sum_{j=1}^{n} u_j\, x_j \geq u_0,$

կամ էլ P_2 խնդրին

$F_2(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max,$

(3),(4) սահմանափակությունների դեպքում և

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le c_0$$

Ֆիքսելով u_0-պարամետրի նշանակումը, կարելի է ստանալ թույլատրելի լուծումների բազմություն, ինչպես նաև ստանալ ընթացիկ խնդրի Պարետո-օպտիմալ լուծումը: Այստեղ u_0-ն արդյունավետ տեղաբաշխման թույլատրելի մակարդակն է, իսկ c_0–ն հումքի ծավալն է՝ նախատեսված հեռահաղորդման կենտրոնների ստեղծման համար: Նշենք նաև, որ եթե $c_j = 1, j = \overline{1,n}$, ապա P_2 խնդրի օպտիմալ լուծումը կհանդիսանա Պարետո-օպտիմալ (1)-(4) համար: Կամայական c_j –ի համար Պարետո-օպտիմալ լուծման համար պետք է լրացուցիչ լուծել P_1 տեսքի խնդիր u_0 պարամետրով, որը հավասար է P_2 խնդրի օպտիմալ արժեքին:

Փորձագիտական արդյունքները.

Մեր կողմից կատարվել է հեռահաղորդակցական կենտրոնների տեղադրման հարցի դիտարկումը Ասկերանի և Մարտակերտի շրջաններում: Հաշվարկների համար օգտագործվել են տարածաշրջանների տեղագրական քարտեզները: d-ի արժեքի հաշվման համար ընտրվել 20-ից մինչև 50 կմ միջակայքը ($mind_{ij} = 20$, $maxd_{ij} = 50$): Փորձագիտական արդյունքների ընթացքում որպես արդյունավետության չափանիշ ընտրվել է օգտվողների քանակը տվյալ հեռահաղորդակցական կենտրոններում (հաշվի առնելով ուսանողների և աշակերտների քանակը): c_j -ի արժեքի հաշվման համար ընտրվել է երկու տարբերակ.

1.եթե $c_j = 1$, ապա հեռահաղորդակցական կենտրոնը համապատասխանում է նախատեսված պահանջներին,

2. c_j – ն հաշվարկվում է որպես ոռուցիկ ֆունկցիա՝ կախված օգտագործողներից, $j = \overline{1,n}$:

Խնդրի լուծման համար օգտագործվել են տարբեր ծրագրային փաթեթներ (MathCad,MatLab):

<u>Խնդիր՝ կենտրոնի օպտիմալ վայր ընտրելը.</u>

Նախ ներմուծենք մի քանի սկզբնական տվյալներ.

$ORIGIN := 1,$

Գյուղերի քանակը՝ n:=20 :

X և Y կոորդինատները ներմուծենք առանձին-առանձին: Նախ ներմուծենք աբսցիսը: Դրա համար ընտրենք $Insert\ Function \rightarrow Random\ Numbers \rightarrow runif(m,a,b)$ ֆունկցիան (այն m պատահական թվերից ընտրում է $a - b$ միջակայքին պատկանող վեկտորը): Տվյալ դեպքում ֆունկցիայի արգումենտում կգրենք n թվերի քանակը և միջակայքը՝ $0 - 100$:

$$X := runif\ (n, 0, 100):$$

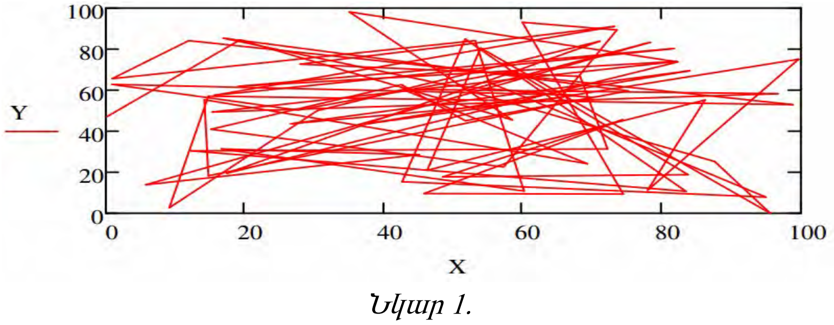
Նույն ձևով ներմուծենք նաև օրդինատը.

$$Y := runif\ (n, 0, 100):$$

Այնուհետև կարող ենք կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը: Դրա համար ընտրենք՝

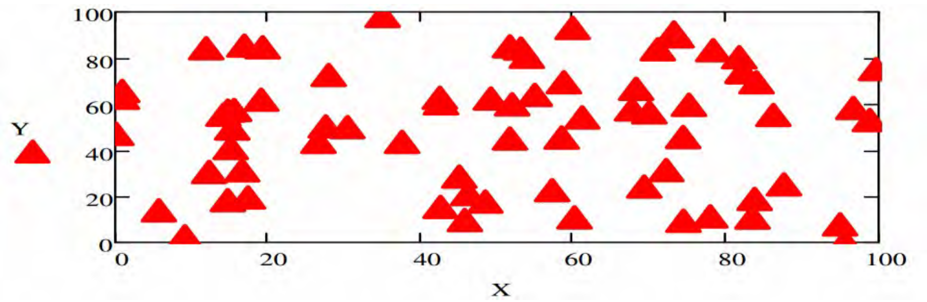
$$Graph\ Toolbar\ \rightarrow X - Y\ Plot\ \rightarrow OX - X\ և\ OY - Y:$$

Արդյունքում կստանանք գրաֆիկը (նկար 1):



Նկար 1.

Գրաֆիկը ավելի հասկանալի լինելու համար փոփոխենք այն և դարձնենք կետային, դրա համար ընտրենք՝ մենյու →Format... → Traces →Type-points → Symbol-եռանկյան նշանը → Symbol weight - 5→OK (նկար 2):



Նկար 2.

Ստացված նկարում եռանկյուններով պատկերված են բարձունքները և անհրաժեշտ է գտնել կենտրոնի համար ամենահարմար վայրը, որը լինի փոքրագույն հեռավորության վրա:

Խնդրի լուծման համար կա երկու տարբերակ.

1-ին եղանակ - կենտրոնն, որը կկառուցվի գյուղերից որևէ մեկին մոտիկ տեղում (այդպես ծախսերը ավելի քիչ կլինեն):

Նախ դիտարկենք առաջին եղանակը: Դրա համար. i -ին վերագրենք $1..n$ արժեքները:

$$i := 1..n\,,$$

i -ին վերագրենք այն համարը, որը գտնվում է մյուսներից փոքրագույն հեռավորության վրա: Դրա համար ընտրենք match ֆունկցիան՝ $Insert\ Function\ \rightarrow\ All\ \rightarrow\ match$:

$$i := match\ (MinL, L):$$

Փորձենք հաշվել i -ն, կստանանք. $i\ =\ (20)$:

Անհրաժեշտ է վերը նշված ֆունկցիայի վերջում որպես ինդեքս (ձախ քառակուսային փակագծի միջոցով) ավելացնել 1, այսինքն՝ առաջին էլեմենտը: Այս դեպքում արդեն արդյունքը կհաշվվի առանց փակագծերի:

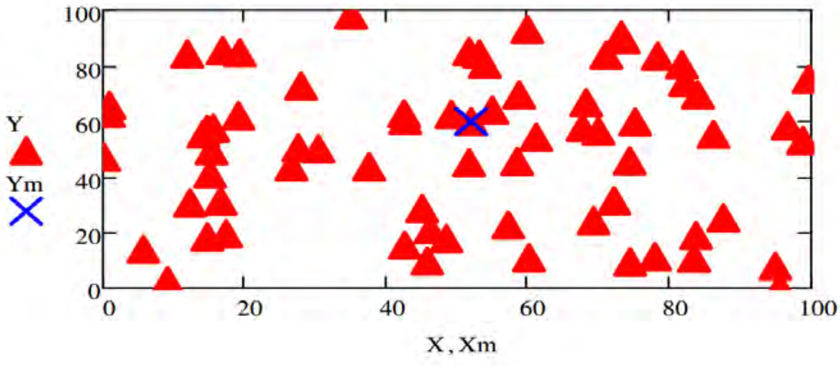
$i := match\ (MinL, L)_1\quad i =\ 20$:

Գյուղերի կոորդինատներին վերագրենք հետևյալ արժեքները՝

$$Xm := X_i\,,\quad Ym := Y_i:$$

Այսքանից հետո գյուղը ևս կարող ենք պատկերել գրաֆիկի վրա, դրա համար կոորդինատային առանցքներում ավելացնենք՝ $OX\ -\ Xm$, իսկ $OY - Ym$: Եվ որպեսզի այն նկատելի լինի, կատարենք հետևյալ փոփոխությունները.

մենյու $\rightarrow Format\ \rightarrow Traces\ \rightarrow Type - points$ (2-րդ տող) $\rightarrow Symbol$ -խաչի նշանը $\rightarrow$ $Symbol\ weight$- 5 և OK (նկար 3):



Նկար 3.

Այսպիսով՝ գտանք այն կետը, որի տեղում կառուցելը կլինի առաջարկվող տարբերակներից ամենանպատակահարմարը:

Այժմ դիտարկենք 2-րդ եղանակը.

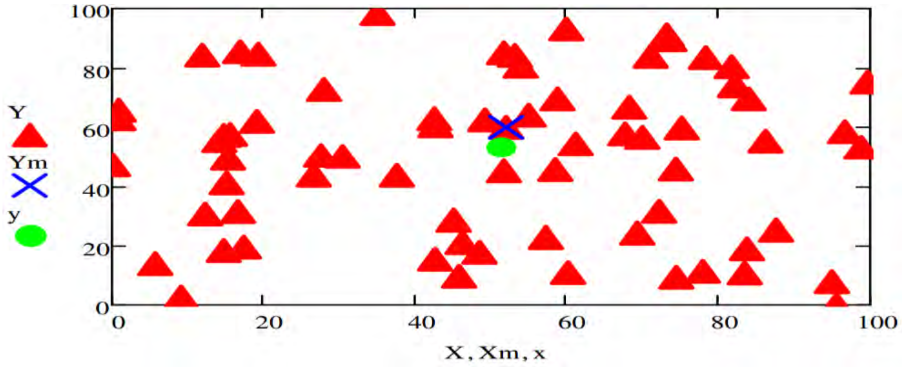
Որպես սկզբնական մոտեցում՝ նոր կառուցվող կենտրոնի x աբսցիսին վերագրենք Xm, իսկ y օրդինատին՝ Ym արժեքները:

$$x := Xm\,,\quad y := Ym:$$

Այնուհետև տեղադրենք 2 տողից և 1 սյունից բաղկացած վեկտոր և նրան վերագրենք հետևյալ ֆունկցիան. ($Insert\ Function\ -\ All\ -\ Minimize$):

$\binom{x}{y} := Minimize(L2, x, y)$:

Այս եղանակով ծրագիրը կհաշվի հեռավորությունը: Որպեսզի այն նույնպես տեսնենք գրաֆիկում, կոորդինատային առանցքների վրա ավելացնենք՝ $OX - x$ և $OY - y$ (նկար 4):



Նկար 4.

Այսպիսով՝ գտանք նաև առանձին կենտրոն կառուցելու համար ամենահարմար վայրը [7]:

Կատարված հետազոտությունները ցույց են տվել, որ առաջարկված մոդելը կարելի է օգտագործել հեռահաղորդակցական կենտրոնների տեղադրման ժամանակ:

Գրականություն

1.В.А.Емеличев, М.К.Кравцов, О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев-ДАН.Математика, 1994, Т.334, 1, с. 9-11.

2. В.А.Емеличев, М.К.Кравцов, О.А.Янушкевич, Лексикографические оптимумы многокритериальной задач дискретной оптимизации, Математические заметки,1995, Т.58, Вып. 3, с. 365-371

3. В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов, Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москова: Советское радио, 1975,192 с.

4. В.А. Перепелица, Многокритериальные задачи теории графов. Алгоритмический подход. Киев: УМК ВЩ ЗГУ,1989, 67 с.

5. A.V.Eremeev, A.A. Kolokolov, l.A. Zaozerskaya, A hybrid algirithm for set covering.Proc.of Internetional Workshop on Discerete Optimization Metods Design, Minsk, 2000, pp.123-129.

6. E. Kitrinou, A.A. Kolokolv, L.A. Zaozerskaya, The location choice for telecenters in remote areas. The case of the Aegean islands. Proc. of Second Internetiomal Workshop on Discrete Optimization Metods in Production and Logistics. Omsk, 2004 , pp.61-65.

7. Ս.Ստեփանյան,Հ.Աղաջանյան, «Mathcad 14 ուսումնական ձեռնարկ», Երևան 2007, էջ 89-97:

Տեղեկություններ հեղինակի մասին

Վազգեն Առստամյան – մ.գ.թ. դոցենտ, ԱրՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի վարիչ

E-mail: varustamyan@rambler.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.-մ. գ.դ. Ա.Մ.Խաչատրյանը