

УДК 62-501.7

Прикладная математика

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРКА-ГОРЕВА КАК СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА**Виталий САФАРЯН, Володя МАНАСЯН**

Ключевые слова: Синхронная машина, электромагнитный переходный процесс, теорема Ляпунова, преобразование Парка-Горева, математическая модель, дифференциальные уравнения.

Բանալի բառեր. Մինքրոն մեքենա, էլեկտրոմագնիսական անցման պրոցես, Լյապունովի թեորեմա, Պարկ-Գորևի ձևափոխություն, մաթեմատիկական մոդել, դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Keywords: synchronous machine, electroenergetic transitional process, Liapunov's theorem, Park-Gorev's transformation, mathematical model, differential equations.

Վ. Սաֆարյան, Վ. Մանասյան**Պարկ-Գորևի ձևափոխությունը որպես Լյապունովի թեորեմի հետևանք**

Հետազոտվում են սինքրոն մեքենայի անցումային գործընթացի մաթեմատիկական մոդելը: Այն իրենից ներկայացնում է ոչ գծային, պարբերական գործակիցներով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Ցույց է տրվում, որ Պարկ-Գորևյան ձևափոխությունը, որը թույլ է տալիս ձևափոխել պարբերական գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը հաստատուն գործակիցներով համակարգի, Լյապունովի թեորեմի հետևանքն է: Նշված ձևափոխությունը, որը թույլ է տալիս գործ ունենալ հաստատուն գործակիցներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների հետ, հեշտացնում է թվային մեթոդների կիրառմամբ ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման խտրացիոն գործընթացը:

V. Safaryan, V. Manasyan**Park-Gorev's Transformation as a Consequence of Lyapunov's Theorem**

Mathematical model of the synchronous machine's transitional process, which presents first order no linear system of differential equation with periodical coefficient, is researched in the article.

It is shown that Park-Gorev's transformation, which allows to transform the system of differential equation with periodical coefficient to the system of differential equation with constant coefficients, is the consequence of Lyapunov's theorem. This transformation dealing with non-linear differential equation with constant coefficients, facilitates the iterative process of solving non-linear differential equations using numerical methods.

Исследуется математическая модель переходного процесса синхронной машины, которая из себя представляет нелинейную систему дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. Показано, что преобразование Парка-Горева, которая позволяет преобразовать систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, является следствием теоремы Ляпунава. Данное преобразование, которое позволяет иметь дело с нелинейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, облегчает итерационный процесс решения нелинейных дифференциальных уравнений с применением численных методов.

Математическая модель переходного процесса электрических машин выражается неавтономной системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой возможно лишь численными методами. Математическая модель электромагнитного переходного процесса (процесс движение машины с заданной скоростью) выражается системой линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Преобразование Парка-Горева позволяет математическую модель переходного процесса электрических машин представить автономной системой нелинейных дифференциальных уравнений [1].

Существует утверждение, что теория машин с двухфазным преобразованием является неудобным и даже теоретически некорректным, а также отсутствует надежной и удобной теоретической базы [2, 3, 4].

В данной работе показано, что преобразование Парка-Горева является следствием теоремы Ляпунова [5, 6], т. е. оно корректно и эквивалентно.

Согласно определению [5, 6], системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими матрицами A и B того же периода τ

$$\dot{x} = A \cdot x, \quad (1)$$

$$\dot{y} = B \cdot y, \quad (2)$$

называются эквивалентными, если существует линейное преобразование

$$y = S \cdot x \quad (3)$$

с периодической матрицей S периода τ , переводящее уравнение (1) в уравнение (2).

Уравнения (1) и (2) эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$B = [I + S \cdot A \cdot S^{-1}] \quad (4)$$

Согласно теореме Ляпунова [5], для линейной системы с периодическими коэффициентами (1) существует такое преобразование (3), которое переводит уравнение (1) в уравнение

$$\dot{y} = C \cdot y \quad (5)$$

с постоянными коэффициентами.

Покажем, что преобразование Парка-Горева является следствием теоремы Ляпунова.

Рассмотрим выражение потокосцеплений обмоток фаз статора и ротора неявнополюсной синхронной машины (СМ) [1]:

$$\begin{cases} \psi_A = L \cdot i_A + L_m i_r \cos \alpha, \\ \psi_B = L \cdot i_B + L_m i_r \cos(\alpha - 120^\circ), \\ \psi_C = L \cdot i_C + L_m i_r \cos(\alpha + 120^\circ), \\ \psi_r = \ell i_r + L_m [i_A \cos \alpha + i_B \cos(\alpha - 120^\circ) + i_C \cos(\alpha + 120^\circ)] \end{cases} \quad (6)$$

где L - индуктивность обмотки статора (ротора), M - взаимная индуктивность между обмоток фаз статора, L_m - взаимная индуктивность между обмотками фаз статора и ротора при их параллельном расположении, α - угол между неподвижной осью и осью обмотки ротора:

$$\alpha = \omega t + \gamma, \quad (7)$$

где ω - угловая скорость вращения ротора.

Представим (6) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \\ \psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L - L & 0 & 0 & L_m \cos \alpha \\ 0 & L - L & 0 & L_m \cos(\alpha - 120^\circ) \\ 0 & 0 & L - L & L_m \cos(\alpha + 120^\circ) \\ L_m \cos \alpha & L_m \cos(\alpha - 120^\circ) & L_m \cos(\alpha + 120^\circ) & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_r \end{bmatrix} \quad (8)$$

или в краткой форме записи:

$$\psi = A \cdot i. \quad (9)$$

Поскольку $|A_s| = L_s - L_m \neq 0$, то из системы уравнений (9) вектор тока i однозначно выражается через вектор потокосцепления.

Воспользуемся известными соотношениями [1]:

$$U_s = R_s i_s + d\psi_s / dt, \quad s = A, B, C,$$

$$U_r = i_r + d\psi_r / dt,$$

(10)

где R – активное сопротивление обмоток фаз статора (ротора). Исключая из системы уравнений (10) вектор тока, получим математическую модель электромагнитных переходных процессов СМ относительно потокосцеплений:

$$\frac{d}{dt} \psi = -A^{-1} \psi - J, \quad (11)$$

где U – вектор мгновенных напряжений приложенных к фазам статора и постоянный эдс возбуждения, R – диагональная матрица активных сопротивлений.

Переходим от системы (11) к ей эквивалентной, используя преобразование

$$\psi = T \psi',$$

(12)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 1 & \cos(\alpha - 120^\circ) & \sin(\alpha - 120^\circ) & 0 \\ 1 & \cos(\alpha + 120^\circ) & \sin(\alpha + 120^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \cos \alpha & \cos(\alpha - 120^\circ) & \cos(\alpha + 120^\circ) & 0 \\ \sin \alpha & \sin(\alpha - 120^\circ) & \sin(\alpha + 120^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Выполняя преобразование (12), система (11) примет вид:

$$\frac{d\psi'}{dt} = T \left(-RA^{-1}T \right) \psi' + T U.$$

(13)

Покажем, что элементы матрицы $T^{-1} \left(-RA^{-1}T \right) \frac{d}{dt} T$ постоянны.

$$C = T^{-1} \cdot \frac{d}{dt} T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вместо матрицы $B = T^{-1}RA^{-1}T$ рассмотрим обратную ей матрицу $B^{-1} = T^{-1}AT^{-1}$.

Выполняя вышеуказанные операции, учитывая, что $R^{-1}T = T^{-1}$ (исходя из структуры матриц R и T) для матрицы B^{-1} получим:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & L_m \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1.5L_m & 0 & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

или же

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} La & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 \ell & 0 & -L^2 L_m \\ 0 & 0 & La & 0 \\ 0 & -1.5 L^2 L_m & 0 & L^3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $\Delta = L^2 \ell - 1.5 L_m^2 = L^2 a$.

Таким образом, уравнение электромагнитных переходных процессов в новой системе координат примут вид

$$\frac{d\psi'}{dt} = -\mathbf{B} \psi' + \mathbf{J}', \quad (15)$$

где элементы матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ постоянны, $\psi' = \psi_0, \psi_d, \psi_q, \psi_r$, $\mathbf{U}' = \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_d, \mathbf{U}_q, \mathbf{e}_r$, $\mathbf{i}' = \mathbf{i}_0, \mathbf{i}_d, \mathbf{i}_q, \mathbf{i}_r$.

В развернутом виде (15) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \psi_0 = -\frac{R}{\Delta} La \psi_0 U_0, \\ \frac{d}{dt} \psi_d = -\frac{R}{\Delta} L^2 \ell \psi_d - \omega \psi_q + \frac{R}{\Delta} L^2 L_m \psi_r + U_d, \\ \frac{d}{dt} \psi_q = \omega \psi_d - \frac{R}{\Delta} \ell \left(L \ell - \frac{3}{2} L_m^2 \right) \psi_q + U_q, \\ \frac{d}{dt} \psi_r = \frac{3}{2} \frac{L^2}{\Delta} L_m r \psi_d - \frac{L^3}{\Delta} r \psi_r + e_r. \end{cases} \quad (16)$$

Представим математическую модель электромагнитных переходных процессов СМ относительно токов. Воспользуясь (9) и (12), имеем

$$\psi' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{i}', \quad (17)$$

$$\text{где } \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & L_m \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1.5 L_m & 0 & \ell \end{bmatrix}.$$

Подставляя (17) в систему (15), получим:

$$\mathbf{D} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = -\mathbf{B} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{i}' + \mathbf{J}'. \quad (18)$$

С учетом соотношения $\mathbf{B} = \omega \mathbf{D}^{-1}$, (18) примет вид

$$\mathbf{D} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = -\mathbf{I} + \omega \mathbf{D} \mathbf{i}' + \mathbf{J}', \quad (19)$$

$$\text{где } \mathbf{C} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega L & 0 \\ 0 & -\omega L & 0 & -\omega L_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В развернутой форме (19) примет вид:

$$\begin{cases} L \frac{di_0}{dt} = -Ri_0 + U_0, \\ L \frac{di_d}{dt} + L_m \frac{di_r}{dt} = -Ri_d - \omega L i_q + U_d, \\ L \frac{di_q}{dt} = -Ri_q + \omega L i_d + \omega L_m i_r + U_q, \\ \frac{3}{2} L_m \frac{di_d}{dt} + \ell \frac{di_r}{dt} = -ri_r + e_r. \end{cases} \quad (20)$$

Системы дифференциальных уравнений (16), (20) представляют математическую модель электромагнитных переходных процессов СМ относительно потокоцеплений и токов.

Накопленная в обмотках фаз статора и ротора мгновенная электромагнитная энергия определяется выражением [1]

$$W_{\vartheta} = 1.5 \sum_{k=A, B, C, r} i_k^2 = 1.5 \psi^2, \quad k = A, B, C, r, \quad (21)$$

а электромагнитный момент [1]

$$M_{\vartheta} = \frac{dW_{\vartheta}}{d\alpha}. \quad (22)$$

Воспользуясь соотношением (6), для электромагнитной энергии и момента получим:

$$\begin{aligned} W_{\vartheta} &= 1.5 L \left(i_A^2 + i_B^2 + i_C^2 \right) + 1.5 \ell i_r^2 + 3 i_m i_r \left[i_A \cos \alpha + i_B \cos(\alpha - 20^\circ) + i_C \cos(\alpha - 20^\circ) \right], \\ M_{\vartheta} &= -3 i_m i_r \left[i_A \sin \alpha + i_B \sin(\alpha - 20^\circ) + i_C \sin(\alpha - 20^\circ) \right]. \end{aligned}$$

Выражая M_{ϑ} через вектор i' , получим

$$\begin{aligned} M_{\vartheta} &= -3 i_m i_r \left[i_A \sin \alpha + i_B \sin(\alpha - 20^\circ) + i_C \sin(\alpha - 20^\circ) \right] \\ &= -3 i_m i_r \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos(\alpha - 20^\circ) & \sin(\alpha - 20^\circ) \\ \cos(\alpha - 20^\circ) & \sin(\alpha - 20^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2} L_m i_r i_q. \end{aligned} \quad (23)$$

Выразим электромагнитный момент через вектор потокоцепления ψ' . Воспользуясь соотношениями (17), имеем:

$$i' = D^{-1} \psi', \quad (24)$$

где $D^{-1} = \Gamma^{-1} A^{-1} T$ (14). В развернутом виде (24) примет следующую форму.

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_r \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} La & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 \ell & 0 & -L^2 L_m \\ 0 & 0 & La & 0 \\ 0 & -1.5 L^2 L_m & 0 & L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_r \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Из системы (25) для i_q и i_r имеем:

$$\begin{cases} i_q = \frac{1}{L} \Psi_q, \\ i_r = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{3}{2} L^2 L_m \Psi_d + L^3 \Psi_r \right). \end{cases} \quad (26)$$

Подставляя значения i_q , i_r из (26) в (23), для M_{ϑ} получим:

$$M_{\vartheta} = -1.5 L_m L \Psi_q + 1.5 L_m \Psi_d + L \Psi_r \Delta. \quad (27)$$

Дополняя системы уравнений (16), (20) уравнением Даламбера [1]

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\omega} + M, \quad (28)$$

где J – момент инерции вращающихся масс, M – механический момент на валу ротора, получим полную систему дифференциальных уравнений переходного процесса СМ.

Литература

1. Горев А.А., Переходные процессы синхронной машины, Л., Наука, 1985.
2. Попов А.Н. Сайфутдинов В.Б., Об особенностях частотного управления асинхронным двигателем в тяговом электроприводе, Электрика, 2004, № 6, с. 14-18.
3. Ямамура С., Спирально-векторная теория электрических машин переменного тока, Электротехника 1996, № 10.
4. Ямамура С., Спирально-векторная теория электрических цепей и машин переменного тока, Части 1 и 2. СПб.: МЦЭН и Т, 1993.
5. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., Наука, 1966.
6. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1974.

Сведение об авторе:

Виталий Сафарян - доктор технических наук, заведующий лабораторией электроэнергетики ЗАО “Научно-исследовательский институт энергетики”, г. Ереван, Армения

E-mail: E-mail: liliasafar@rambler.ru

Володя Манасян - доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ

E-mail: manasyan1949@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.-м.н. Хачатряном.