УДК:517.9 *Математика*

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОМПОНЕНТ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Георгий САКЯН

Ключевые слова: *однородные линейные дифференциальные уравнения, система однородных линейных дифференциальных уравнений*

Բանալի բառեր՝ *համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ, համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր:*

Keywords*: homogeneous linear differential equations, homogeneous linear system of differential equations*

Գ. Սահակյան

Դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համասեռ համակարգի լուծումների կոմպոնենտների արտադրյալի մի գնահատականի մասին

Հայտնի է, որ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար ընդհանուր դեպքում գոյություն չունի լուծման ընթացակարգ, այսինքն հնարավոր չէ ստանալ նրա լուծումների անալիտիկ տեսքը, և, հետևաբար այն գնահատել: Այդ իմաստով նշանակություն ունեն համակարգերի լուծումներն գնահատող անհավասարումների արտածումը: Աշխատանքում ոչ բացասական գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի ոչ տրիվիալ լուծումների համար արտածվում է անհավասարություն, որը գնահատում է լուծման կոմպոնետների արտադրյալը համակարգի գոր- ծակիցների միջոցով:

G.Sahakyan

About One Assessment for the Product of Components of Solutions of the Linear Homogenous System of Differential Equations.

It is known that for the linear systems of differential equations in the general case there is no order to solve them, and, hence, it is impossible to introduce their solution analytically, and, therefore, assess them. In this sense, it has a value of obtaining inequalities, evaluating solutions of the systems. For the non-trivial solutions of linear homogeneous system of differential equations with nonnegative coefficients the work introduces inequality, assessing the product of component solutions.

Известно, что для линейных систем дифференциальных уравнений в общем случае не существует порядка их решения, а, значит, невозможно представить их решения в аналитическом виде, и, следовательно, их оценить. В этом смысле, имеет значение получение неравенств, оценивающих решения систем. В работе для нетривиальных решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с неотрицательными коэффициентами выводится неравенство, оценивающее произведение компонент решений системы.

Рассматривается следующая однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n (см., например, [1], [2])

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y}, \tag{1}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & .. & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \ [a,b],\ i,j = \ ,2,\dots,n.$$

Имеет место

Теорема. *Если в системе* (1) *коэффициенты* $a_{ij}(t)\ge 0$ $(i,j=1,2,..,n)$, *то существует такая постоянная* $m>0$, *что для любого нетривиального решения* $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \dots\\ u_n(t)\end{pmatrix}$ *системы* (1), *для значений* $t\in[a,b]$, *при которых* $u_i(t)\ge 0$, *выполняется неравенство*

$$\tilde{u}(t)\ge \tilde{u}(a)e^{m(t-a)}, \tag{2}$$

где

$$\tilde{u}(t)=\prod_{i=1}^{n}u_i(t).$$

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n, \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + .. + a_{nn}(t)y_n. \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \dots\\ u_n(t)\end{pmatrix}$ является нетривиальным решением системы (1). Тогда имеют место тождества

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv a_{11}(t)u_1(t) + a_{12}(t)u_2(t) + \dots + a_{1n}(t)u_n(t), \\ u_2'(t) \equiv a_{21}(t)u_1(t) + a_{22}(t)u_2(t) + \dots + a_{2n}(t)u_n(t), \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ u_n'(t) \equiv a_{n1}(t)u_1(t) + a_{n2}(t)u_2(t) + \dots + a_{nn}(t)u_n(t). \end{cases}$$

Умножив первое тождество системы на $u_2(t)\cdot u_3(t)\cdot\ldots\cdot u_n(t)$, второе- на $u_1(t)\cdot u_3(t)\cdot\ldots\cdot u_n(t)$, и так далее, n-ое на $u_1(t)\cdot u_2(t)\cdot\ldots\cdot u_{n-1}(t)$, затем просумммировав полученные, будем иметь

$$\left(u_1(t)u_2(t)\dots u_n(t)\right)' \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)u_1(t)u_2(t)\dots u_n(t) + \left[a_{12}(t)u_2^2(t) + a_{21}(t)u_1^2(t)\right]u_3(t)u_4(t)\dots u_n(t) +$$
$$+\left[a_{13}(t)u_3^2(t) + a_{31}(t)u_1^2(t)\right]u_2(t)u_4(t)\dots u_n(t) + \dots + \left[a_{1n}(t)u_n^2(t) + a_{n1}(t)u_1^2(t)\right]u_2(t)u_3(t)..u_{n-1}(t) + \dots +$$
$$+\left[a_{n-1\,n}(t)u_{n-1}^2(t) + a_{n\,n-1}(t)u_n^2(t)\right]u_1(t)u_2(t)\dots u_{n-2}(t).$$

Последнее тождество можно записать и в виде

$$\left(u_1(t)u_2(t)...u_n(t)\right)' =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\cdot\prod_{k=1}^{n} u_k(t) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \left(a_{ij}(t)u_j^2(t) + a_{ji}(t)u_i^2(t)\right) u_{k_1}(t)u_{k_2}(t)...u_{k_{n-2}}(t),$$

(4)

в котором индексы $k_1, k_2, ..., k_{n-2}$ отличны друг от друга и принимают значения от 1 до n, отличные также от i, j. Далее, воспользуемся очевидным неравенством

$$a_{ij}(t)u_j^2(t) + a_{ji}(t)u_i^2(t) \ge 2\sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}\,u_i(t)u_j(t).$$

Тогда, учитывая соотношение (4), найдем, что

$$\left(u_1(t)u_2(t)...u_n(t)\right)' \ge \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\cdot\prod_{k=1}^{n} u_k(t) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}\,u_j(t)u_i(t)u_{k_1}(t)u_{k_2}(t)...u_{k_{n-2}}(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\cdot\prod_{k=1}^{n} u_k(t) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}\prod_{k=1}^{n} u_k(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}\right)\prod_{k=1}^{n} u_k(t).$$

или

$$\tilde{u}'(t) \ge \left(tr\,A(t) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}\right)\tilde{u}(t), \qquad (5)$$

где $\tilde{u}(t) = \prod_{i=1}^{n} u_i(t)$, $tr\,A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ -след матрицы $A(t)$. Примем

$$\tilde{a}(t) \equiv \left(tr\,A(t) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}\right).$$

Тогда неравенство (5) примет вид

$$\tilde{u}'(t) \ge \tilde{a}(t)\tilde{u}(t). \qquad (6)$$

Поскольку $\tilde{a}(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то она принимает на этом отрезке свое наименьшее значение. Пусть

$$m = \min_{a\le t\le b}[\tilde{a}(t)].$$

Тогда, учитывая неравенство (6), получим

$$\tilde{u}'(t) \ge m\cdot\tilde{u}(t).$$

Учитывая тот факт, что обе части последнего неравенства неотрицательны, и, интегрируя его в пределах от a до t $(a \le t \le b)$, получим

$$\tilde{u}(t) \ge \tilde{u}(a)e^{m(t-a)}.$$

Теорема доказана.

Замечание. В неравенстве (2) знак равенства будет иметь место при выполнении следующих условий

$$u_i(t) = u_i(a)e^{\int_a^t \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{ki}(t)a_{ik}(t)}dt}, \; i = 1,2,...,n.$$

Действительно, знак равентства в (2) будет иметь место, если оно имеет место в неравенстве

$$a_{ij}(t)u_j^2(t) + a_{ji}(t)u_i^2(t) \geq 2\sqrt{a_{ij}(t)\cdot a_{ji}(t)}u_i(t)u_j(t),$$

т.е. при выполнении равенства

$$\sqrt{a_{ij}(t)}u_j(t) = \sqrt{a_{ji}(t)}u_i(t), \; i, j = 1,2,...,n.$$

Из последнего соотношения будет следовать, что

$$u_j(t) = \frac{\sqrt{a_{ji}(t)}}{\sqrt{a_{ij}(t)}}u_i(t), \; i, j = 1,2,...,n.$$

Подставив в i -ое уравнение системы (3) значения $u_j(t), \; j = 1,2,..,n$, получим

$$u_i' = a_{i1}(t)\frac{\sqrt{a_{1i}(t)}}{\sqrt{a_{i1}(t)}}u_1 + a_{i2}(t)\frac{\sqrt{a_{2i}(t)}}{\sqrt{a_{i2}(t)}}u_1 + ... + a_{in}(t)\frac{\sqrt{a_{ni}(t)}}{\sqrt{a_{in}(t)}}u_1 =$$

$$= \left(\sqrt{a_{1i}(t)a_{i1}(t)} + \sqrt{a_{2i}(t)a_{i2}(t)} + ... + \sqrt{a_{1n}(t)a_{n1}(t)}\right)u_1 = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{ki}(t)a_{ik}(t)}u_1,$$

откуда, интегрируя в пределах от a до t $(a \leq t \leq b)$, получим

$$u_i(t) = u_i(a)e^{\int_a^t \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{ki}(t)a_{ik}(t)}dt}, \; i = 1,2,...,n.$$

Из соотношения (2), в частности, вытекает

Следствие 1. *Если в системе* (1) *коэффициенты* $a_{ij}(t) \geq 0$ $(i, j = 1,2,..,n)$, *то для любого нетривиального решения* $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ *системы* (1),*для значений* $t \in [a, b]$, *при которых* $u_i(t) \geq 0$, *функция* $\widetilde{u}(t) = \prod_{i=1}^{n} u_i(t)$ *является неубывающей.*

Действительно, предположим, что $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Тогда, взяв в доказательстве теоремы t_1 вместо t_0, получим неравенство

$$\widetilde{u}(t) \geq \widetilde{u}(t_1)e^{m(t-t_1)}.$$

Откуда, учитывая, что в силу условий теоремы, $m \geq 0$, найдем

$$\widetilde{u}(t_2) \geq \widetilde{u}(t_1)e^{m(t_2-t_1)} \geq \widetilde{u}(t_1).$$

Из следствия 1 вытекает, что если выполняются условия теоремы, то максимальным значением функции $\widetilde{u}(t)$ на отрезке $[a, b]$ будет $\widetilde{u}(b)$.

Далее, если в доказательстве теоремы в определении $\widetilde{a}(t)$ принять $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$, то получим

Следствие 2. *Если в системе* (1) *матрица* $A(t)$ *симметрична и коэффициенты* $a_{ij}(t)\geq\ )\ (i,j=\ ,2,..,n)$*, то для любого нетривиального решения* $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ *системы* (1)*, для значений* $\mathrm{t}\in\ ,\mathrm{b}]$*, при которых* $u_i(t)\geq\ )$*, выполняется неравенство*

$$\tilde{u}(t)\geq\ \tilde{\iota}(a)e^{m(t-\ )},$$

где

$$m=\mathrm{nin}_{a\leq\ \leq}\sum_{i=}\sum_{j=}\ (t).$$

Литература

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Мир, 1970.
2. Саакян Г.Г. О нулях компонент решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений. *Сборник трудов IV международной научной конференции "Математика. Образование. Культура.* Тольятти, 2009, с. 32-35.

Сведение об авторе:

Георгий Саакян - кандидат физ-мат. наук, проректор по учебной части АрГУ.
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.-м.н. Хачатряном.