

ՀՏԴ 51(075)

Մաթեմատիկա

**ՎԻԵՏԻ ՀԱԿԱՂԱՐԶ ԹԵՈՐԵՄԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ
ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՉ ՍՏԱՆԴԱՐՏ ՄԵԹՈՂԸ
Վոլոդյա ՄԱՆԱՍՅԱՆ**

Բանալի բառեր. Վիետի հակադարձ թեորեմ, ոչ ստանդարտ մեթոդ, ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ, հավասարում, համակարգ:

Ключевые слова: Обратная теорема Виета, нестандартный метод, многочлен с целыми коэффициентами, уравнения, система.

Keywords: Viet's inverse theorem, non-standard method, polynom with whole coefficients, equation, system.

В. Манасян

Нестандартный метод решения нескольких задач с применением обратной теоремы Виета

В статье с помощью нестандартного метода решаются несколько задач с применением обратной теоремы Виета. Это обусловлено тем, что несмотря на то, что обратная теорема Виета имеет большое применение в школьном курсе математики, особенно при решении стандартных задач, иногда на различных математических олимпиадах встречаются нестандартные задачи, которые предлагали и предлагают в основном на различных математических олимпиадах, требующие новые подходы для их решения.

V. Manasyan

Non-standard Method for Solving Some Problems Adopting Viet's Inverse Theorem.

The article comprises non-standard method that helps to solve some problems adopting Viet's inverse theorem. This is conditioned by the fact that though the Viet's inverse theorem is of great use in the school course of mathematics, especially in solving standard tasks, sometimes there are non-standard tasks that were and are given mainly at various mathematical competitions, requiring new approaches to their solution.

Վիետի հակադարձ թեորեմի կիրառմամբ լուծվում է մի քանի խնդիրներ ոչ ստանդարտ մեթոդով: Այն պայմանավորված է նրանով, որ չնայած, որ Վիետի հակադարձ թեորեմն ունի մեծ կիրառություններ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում, հատկապես ստանդարտ խնդիրների լուծման ժամանակ, այնուհանդերձ հանդիպում են ոչ ստանդարտ խնդիրներ, որոնք առաջարկվել են և առաջարկվում են հիմնականում տարբեր մաթեմատիկական օլիմպիադաների ժամանակ, որոնց լուծման համար պահանջվում են նոր մոտեցումներ:

Շատ խնդիրների լուծման ժամանակ հաճախ անհրաժեշտ է լինում օգտվել Վիետի հակադարձ թեորեմից: Դեռ դպրոցական դասընթացից հայտնի է հետևյալը [1]:

Եթե u և v թվերը կապված են

$$u+v=-p, \quad uv=q \quad (1)$$

առնչություններով, ապա u և v թվերը հանդիսանում են $t^2+pt+q=0$ քառակուսի հավասարման արմատներ:

Ակնհայտ է, որ u և v թվերը հանդիսանում են նաև $P(t)=t^2+pt+q$ բազմանդամի արմատներ:

Մեր հոդվածի նպատակն է կառուցել համապատասխան բազմանդամ, որի արմատները հանդիսանան տված հայտնի թվերը և որը թույլ կտա հեշտությամբ տարբեր տիպի խնդիրներ լուծել:

Խնդիր 1. Կազմել քառակուսի հավասարում ամբողջ գործակիցներով, որի արմատներից մեկը $3-\sqrt{5}$ թիվն է: Խնդրի լուծումը հենված է այն փաստի վրա, որը քառակուսի հավասարումը $a+b\sqrt{d}$ և $a-b\sqrt{d}$ (որտեղ a, b և d թվերն ամբողջ են, $d>0$) <<համալուծ>> արմատներով ունի ամբողջ գործակիցներ: Այդ փաստը իսկույն հետևում է (1)-ից: Այսպիսով, որոնելի հավասարումն ունի $t_1=3-\sqrt{5}$ և $t_2=3+\sqrt{5}$ արմատները, այդ պատճառով

$$P=-(t_1+t_2)=-6, \quad q=t_1 t_2=4$$

$$\text{Պատ.՝ } t^2-6t+4=0$$

Խնդիր 2. Հաշվել $u^4-2u^3+7u^2-146u$ արտահայտության արժեքը, եթե $u=3-\sqrt{5}$:

Լուծում: Ըստ խնդիր 1-ի, $u=3-\sqrt{5}$ թիվը $u^2-6u+4=0$ հավասարման արմատն է: Այստեղից՝ $u^2=6u-4$:

Օգտվելով այդ առնչությունից, արտահայտենք u^3 և u^4 -ը գծայնորեն u -ի միջոցով՝
 $u^3=u^2 \cdot u=(6u-4)u=6u^2-4u=6(6u-4)-4u=36u-24-4u=32u-24$:

$u^4=u^3 \cdot u=(32u-24)u=32u^2-24u=32(6u-4)-24u=192u-128-24u=168u-128$:

Այսպիսով, $u^4-2u^3+7u^2-146u=168u-128-2(32u-24)+7(6u-4)-146u=168u-128-64u+48+42u-28-146u=-108$

Պատ.՝ -108 :

Նույն ձևով՝

Խնդիր 3. Ապացուցել, որ $t=3+2\sqrt{2}$ դեպքում $\frac{t^5+204}{1189t}$ -ը ամբողջ թիվ է :

Լուծում: Ակնհայտ է, որ $t=3+2\sqrt{2}$ թիվը ամբողջ գործակիցներով $t^2-6t+1=0$ քառակուսի հավասարման արմատն է: Այստեղից՝ $t^2=6t-1$,

$$t^3=t \cdot t^2=t(6t-1)=6t^2-t=6(6t-1)-t=36t-6-t=35t-6,$$

$$t^4=t \cdot t^3=t(35t-6)=35t^2-6t=35(6t-1)-6t=210t-35-6t=204t-35,$$

$$t^5=t \cdot t^4=t(204t-35)=204t^2-35t=204(6t-1)-35t=1224t-204-35t=1189t-204:$$

$$\text{Ուրեմն՝ } \frac{t^5+204}{1189t}=\frac{1189t-204+204}{1189t}=1:$$

Քիչ տարբերվող ձևափոխությամբ կլուծվի հաջորդ խնդիրը:

Խնդիր 4. Հաշվել $u^8+\frac{1}{u^8}$ -ը, եթե $u=\sqrt{2}+1$:

Լուծում: Օգտագործելով այն փաստը, որ $u=\sqrt{2}+1$ թիվը t^2-2t-1 քառակուսի եռանդամի արմատ է, կունենանք՝ $u-\frac{1}{u}=2$, որտեղից հաջորդաբար ստանում ենք

$$u^2+\frac{1}{u^2}=6, \quad u^4+\frac{1}{u^4}=34, \quad u^8+\frac{1}{u^8}=1154$$

Պատ.՝ 1154:

Վիետի բանաձևեր x, y, z արմատներով երրորդ աստիճանի $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ բազմանդամի համար կտրվեն ([2])

$$\left. \begin{aligned} P &= -x - y - z \\ q &= xy + yz + zx \\ r &= -xyz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

առնչություններով:

Ներքոբերյալ հետաքրքիր խնդիրները լուծվում են այդ բանաձևերի օգտագործմամբ:

Խնդիր 5. x, y, z թվերը բավարարում են $x+y+z=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$

առնչություններին : Ապացուցել, որ այդ թվերից գոնե մեկը հավասար է a -ի:

Լուծում: Կիրառենք (2) բանաձևերը : Մեր դեպքում $P=-a, q=\frac{xyz}{a}=-\frac{r}{a}$: Այդ պատճառով $P(t)=t^3-at^2-\frac{r}{a}t+r=(t-a)(t^2-\frac{r}{a})$:

Հետևաբար, a թիվը հանդիսանում է $P(t)$ բազմանդամի արմատ, իսկ դա նշանակում է, որ այն համընկնում է x, y, z թվերից մեկի հետ:

Խնդիր 6. Երեք u, v և w ամբողջ թվերի գումարը հավասար է զրոյի: Ապացուցել, որ $2u^4+2v^4+2w^4$ թիվը ամբողջ թվի քառակուսի է:

Լուծում: Թող $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ բազմանդամը լինի u, v, w արմատներով բազմանդամ: Ըստ Վիետի թեորեմի,

$$P = -(u+v+w) = 0$$

$$\text{Ունենք } u^3 + qu + r = 0, \quad v^3 + qv + r = 0, \quad w^3 + qw + r = 0$$

Բազմապատկելով այդ հավասարումները համապատասխանաբար $2u, 2v$ և $2w$ թվերով և գումարելով ստացված հավասարումները, կունենանք $2u^4 + 2v^4 + 2w^4 + 2q(u^2 + v^2 + w^2) + 2r(u+v+w) = 0$: Հաշվի առնելով, որ $u+v+w = 0$, կունենանք, որ $u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 - 2q = -2q$: Հետևաբար $2u^4 + 2v^4 + 2w^4 = (2q)^2$:

Այժմ տեսնենք, ինչպես կարելի է օգտագործել բազմանդամը հավասարումների համակարգը լուծելիս:

Խնդիր 7. Լուծել համակարգը

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = xy + yz + zx \\ x^3 + y^3 + z^3 = \frac{73}{8} \end{cases}$$

Լուծում: Տեղադրենք $x + y + z = a$: Այդ դեպքում $P(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - at^2 + at - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1 - at)$, այդ պատճառով արմատներից մեկը հավասար է 1-ի: Դրանից հետո հեշտ են ստացվում լուծումները:

$$\text{Պատ՝ } (1, 2, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}, 2), (2, 1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 1, 2), (\frac{1}{2}, 2, 1):$$

Որոշ հայտնի անհավասարություններ հեշտությամբ են ապացուցվում, օգտագործելով Վիետի բանաձևերը

Խնդիր 8. Ապացուցել, որ

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

որտեղ a, b, c թվերը ոչ բացասական թվեր են:

Լուծում: Սկզբից ապացուցենք, որ երեք ոչ բացասական x, y, z թվերի համար տեղի ունի $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$:

Դիտարկենք $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ բազմանդամը, որի արմատներն են x, y, z թվերը: Այդ դեպքում $P(x) = 0, P(y) = 0, P(z) = 0$: Ունենք, որ

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

Գումարելով երեք հավասարումները, օգտագործելով (2) առնչությունները և $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz) = p^2 - 2q$

նույնությունը, կստանանք

$$x^3 + y^3 + z^3 + p(p^2 - 2q) - qp + 3r = 0,$$

որտեղից՝

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -p(p^2 - 3q) = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\text{Քանի որ } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0, \text{ ապա}$$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$, այն, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել: Ստացված անհավասարության մեջ տեղադրելով $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$, կստանանք պահանջվող անհավասարությունը:

Պարզվում է, որ երկրաչափական որոշ խնդիրների լուծման ժամանակ էլ կարելի է օգտագործել մեր մեթոդը:

Խնդիր 9. Ուղղանկյուն գուգահեռանիստի կողերի երկարությունների գումարը հավասար է 96-ի, լրիվ մակերևույթը՝ 286 սմ^2 , ծավալը՝ 120 սմ^3 : Գտնել կողերի երկարությունները:

Լուծում: Ուղղանկյուն գուգահեռանիստի երեք x, y, z չափումները բավարարում են

$$\begin{cases} 4(x + y + z) = 96 \\ 2(xy + yz + zx) = 286 \\ xyz = 120 \end{cases}$$

համակարգին: Հետևաբար, նրանք հանդիսանում են $P(t) = t^3 + 24t^2 + 143t + 120 = 0$ հավասարման արմատներ: Քանի որ $P(t) = (t-1)(t-8)(t-15)$, ապա ստանում ենք կողերի երկարությունները՝ 1սմ, 8սմ, 15սմ:

Պատ.՝ 1սմ, 8սմ, 15սմ:

Այժմ դիտարկենք մի խնդիր, որի մեջ օգտագործվում է ավելի բարձր կարգի բազմանդամ:

Խնդիր 10. a, b, c, d, e հինգ ամբողջ թվերն այնպիսին են, որ $a+b+c+d+e$ և $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ թվերը բաժանվում են n կենտ թվի վրա: Ապացուցել, որ

$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 - 5abcde$ թիվը նույնպես բաժանվում է n -ի վրա:

Լուծում: Թող $P(t) = t^5 + pt^4 + qt^3 + rt^2 + kt + l$ բազմանդամի արմատները լինեն a, b, c, d և e թվերը: Վիետի թեորեմի համաձայն այդ բազմանդամի բոլոր գործակիցները ամբողջ թվեր են, ընդ որում p և q թվերը բաժանվում են n -ի վրա: Գումարելով $P(a)=0, P(b)=0, P(c)=0, P(d)=0, P(e)=0$ հավասարությունները, կստանանք, որ

$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 + 5l + r(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) + k(a+b+c+d+e) = -p(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4) - q(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3)$ հավասարության աջ մասը բաժանվում է n -ի վրա: Հաշվի առնելով խնդրի պայմանը, ստանում ենք, որ $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 + 5l$ թիվը նույնպես բաժանվում է n -ի վրա: Քանի որ $l = -abcde$, ապա ստանում ենք խնդրի պնդման ապացույցը:

Առանց բազմանդամը կառուցելու կարելի է վարվել այլ կերպ տարբեր խնդիրներ լուծելիս: Դիտարկենք հավասարումների համակարգ, որոնց մեջ հավասարումների ձախ մասերը ներկայացվում են 2 փոփոխականի համար $x^k + y^k (k \geq 2, k \in \mathbb{N})$ տեսքի արտահայտություններ, իսկ աջ մասերը հաստատուն թվեր են [2], [3]: Նշանակենք $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy, S_k = x^k + y^k (k \geq 2, k \in \mathbb{N})$: Ակնհայտ է, որ $\sigma_1 - h$ և σ_2 -ի արտահայտությունները նշանի ճշտությամբ Վիետի բանաձևերն են x և y արմատների դեպքում: $\sigma_1 - h$ և σ_2 -ի օգնությամբ կարելի է լուծել հավասարումների համակարգեր. նախօրոք օգտագործելով S_k -ի ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) արտահայտությունները $\sigma_1 - h$ և σ_2 -ի միջոցով:

$$\text{Ունենք} \quad \left. \begin{aligned} S_1 &= x + y = \sigma_1 \\ S_2 &= x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ S_3 &= x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \\ S_4 &= x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\ S_5 &= x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Գոյություն ունի $S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} (k > 2)$ անդրադարձ առնչությունը:

Խնդիր 11. Գտնել համակարգի իրական լուծումները

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Լուծում: Համաձայն (3) առնչությունների կունենանք

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 \end{cases}$$

Արտահայտելով σ_2 -ը σ_1 -ով համակարգի երկրորդ հավասարումից և տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ կստանանք

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0$$

կամ

$$(\sigma_1 - 2)^2(\sigma_1 + 4) = 0$$

I դեպք՝ $\sigma_1 = 2$ հետևաբար $\sigma_2 = 0$ կամ անցնելով x և y անհայտներին, կունենանք

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

որտեղից կստանանք 2 լուծում՝ $(2,0), (0,2)$:

2-րդ դեպք՝

$\sigma_1 + 4 = 0, \sigma_1 = -4$, հետևաբար $\sigma_2 = 6$; կամ

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 6 \end{cases},$$

որը չունի իրական արմատներ:

Խնդիր 12. Լուծել համակարգը՝

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 5 \\ x^5 + y^5 = 33 \end{cases},$$

եթե հայտնի է, որ $x+y$ -ը բնական թիվ է:

Լուծում: Նշանակենք $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$ և օգտվելով S_2 -ի և S_5 -ի արտահայտություններից, կունենանք

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5 \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33 \end{cases}$$

Նորից σ_2 -ը արտահայտենք σ_1 -ով և համակարգը կրեքվի

$$\sigma_1^5 - 125\sigma_1 + 132 = 0 \quad \text{կամ} \quad \sigma_1(\sigma_1^4 - 125) = -132:$$

Ակնհայտ է, որ $\sigma_1 \geq 4$ դեպքում հավասարումը լուծում չունի: Հետևաբար σ_1 -ը կարող է ընդունել 1, 2, 3 արժեքները: Այսպիսով ունենք 3 համակարգ:

$$1 - \text{ին} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^4 - 125 = -132, \end{cases} \quad 2 - \text{րդ} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_1^4 - 125 = -66, \end{cases} \quad 3 - \text{րդ} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_1^4 - 125 = -44. \end{cases}$$

Պարզ է, որ 1-ին և 2-րդ համակարգերը լուծում չունեն, իսկ 3-րդ համակարգը լուծում ունի՝ $\sigma_1 = 3$:

σ_2 -ը այդ դեպքում կընդունի 2 արժեքը՝ $\sigma_2 = 2$: Անցնելով x, y փոփոխականներին, կստանանք

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2, \end{cases}$$

որի լուծումներն են՝ $(2,1)$ -ը և $(1,2)$ -ը:

Ինչ վերաբերում է 3 անհայտով 3 հավասարումների համակարգերի լուծմանը, ապա որոշ դեպքերում հնարավոր է այն բերել 2 անհայտով հավասարումների համակարգի լուծմանը:

Խնդիր 13. Լուծել հավասարումների համակարգը

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1 \end{cases}$$

Լուծում: Նշանակենք $x + y = \sigma_1, xy = \sigma_2$ և ձևափոխենք համակարգը

$$\begin{cases} z = 1 - (x + y) \\ x^2 + y^2 = 3 - [1 - (x + y)]^2 = 3 - (1 - \sigma_1)^2 \\ x^5 + y^5 = 1 - [1 - (x + y)]^5 = 1 - (1 - \sigma_1)^5 \end{cases}$$

Քանի որ $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$, ապա կունենանք

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 2\sigma_2 = 3 - (1 - \sigma_1)^2 \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 1 - (1 - \sigma_1)^5 \end{cases}$$

Օգտագործելով $(1 - \sigma_1)^5 = 1 - 5\sigma_1 + 10\sigma_1^2 - 10\sigma_1^3 + 5\sigma_1^4 - \sigma_1^5$ քանաձևը և σ_2 -ի արտահայտությունը σ_1 -ի միջոցով՝ $\sigma_2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 - 1$, որոշակի քայլերից հետո կստանանք

$$10\sigma_1^3 - 20\sigma_1^2 = 0$$

կամ

$$\sigma_1^2(\sigma_1 - 2) = 0$$

1-ին դեպք՝ $\sigma_1 = 0$, որտեղից $x=y$ և $z=1$ ելակետային համարժեք համակարգը կլինի

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x^5 + y^5 = 0 \end{cases},$$

որտեղից ստանում ենք $x=\mp 1$, $y=\pm 1$:

Խնդրի լուծումները կլինեն $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$

2-րդ դեպք՝ $\sigma_1 = 2$, որտեղից $x+y=2$, $z=-1$: Այդ դեպքում

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x^5 + y^5 = 2 \end{cases}$$

որի լուծումն է՝ $x=y=1$: Խնդրի լուծումն է $(1, 1, -1)$:

Հոդվածում բերված խնդիրները, անշուշտ կընդարձակեն և կխորացնեն Վիետի բանաձևերի կիրառման շրջանակները:

Գրականություն

1. Л.Д.Курляндчик, С.В.Фомин-Терема Виета и вспомогательный многочлен, журнал "Квант", 1984, 12

2. А.Г.Курош-Курс высшей алгебры, М., изд. "Наука", 1971

3. Е.С.Ляпин, А.Е.Евсеев-Алгебра и теория чисел, М., "Просвещение" 1978

Տեղեկություններ հեղինակի մասին.

Վլոդյա Մանասյան - ԱրՊՀ կիրառական մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դոցենտ

E-mail: manasyan1949@mail.ru

Հոդվածը տպագրության է նրաշխարհում խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.դ. Ա.Մ.Խաչատրյանը