УДК:517.9 Математика

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Георгий САХАКЯН

Ключевые слова: *Система дифференциальных уравнений, неосцилляция, вырожденные матрицы.*

Բանալի բառեր՝ *Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր, ոչօսցիլյացիա, վերասերված մատրից:*

Keywords: *Ordinary differential equations, non-oscillation, uninversible matrix.*

Գ. Սահակյան

Մի քանի ոչ օսցիլյացվող սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համասեռ համակարգերի դասերի մասին

Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար մեծ նշանակություն ունի նրա այնպիսի բնութագրիչը, ինպիսինն է համակարգի օսցիլյացիան (ոչ օսցիլյացիան): Ընդհանուր դեպքում մինչ այսօր գոյություն չունի այնպիսի հայտանիշ, որով որոշվում է այդ բնութագրիչի առկայությունը: Այդ իմաստով կարևոր է ինչպես օսցիլյացիայի, այնպես նաև ոչ օսցիլյացիայի հայտանիշների որոշումը որոշ դասերի համար: Այս աշխատանքում ապացուցվում է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի մի քանի դասերի ոչ օսցիլյացիան ամբողջ թվային առանցքի վրա:

G.Sahakyan

About Some Classes of Non-oscillation Homogeneous System of orDinary Differential Equations

For the systems of differential equations such characteristics as oscillation (non-oscillation) of the system is of great importance. In the general case there has not been any such criterion so far that will determine the presence of this feature. In this sense, the determination of the criteria of the oscillation as well as non-oscillation of some classes of systems has a value. For some classes of system of linear differential equations the non-oscillation on all number line is proving in the work.

Для систем дифференциальных уравнений большое значение имеет такая характеристика, как осцилляция (неосцилляция) системы. В общем случае до сих пор нет такого критерия, который определял бы наличие этой характеристики. В этом смысле имеет значение определение критериев как осцилляции так и неосцилляции для некоторых классов систем. В работе для нескольких классов систем дифференциальных уравнений доказывается их неосцилляция на всей числовой прямой.

Осцилляционные свойства как дифференциальных уравнений, так и их систем, были и являются предметом исследований многих математиков (см., например, [1]-[3]). Поскольку до настоящего времени нет общего критерия для определения осцилляции и неосцилляции систем дифференциальных уравнений, то представляет собой интерес определение осцилляции и неосцилляции определенных классов систем. В настоящей работе доказывается неосцилляция для некоторых классов линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается следующая однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n (см., например, [4])

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

$a_{ij}\ (i,j=1,2,...,n)$ -постоянные действительные числа. Обозначим через A_i (A'_i), $i=1,2,...,n$ i -ый столбец (i -ую строку) матрицы. Тогда матрицу A можно записать и в виде

$$A=[A_1,A_2,...,A_n]$$

или

$$A=[A'_1;A'_2;...;A'_n].$$

Определение 1. Квадратная матрица A называется вырожденной (см., например, [5]), если ее определитель равен нулю ($\det A=0$).

Определение 2. Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим (см., например, [2]), если каждая из его компонентов имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности; в противном случае называется неосциллирующим.

Определение 3. Система (1) называется осциллирующей, если ее каждое решение является осциллирующим.

Лемма 1. *Квадратная матрица A n-ого порядка $(n\geq 3)$, в которой для какой-то тройки чисел* $i\neq j\neq k$, $(i,j,k=1,2,...,n)$, *выполняется условие*

$$A_i-A_j=A_k-A_j\quad (A'_i-A'_j=A'_k-A'_j),$$

является вырожденной.

Доказательство. Предположим, что имеет место условие $A_i-A_j=A_k-A_j$ (аналогично проводится доказательство и во втором случае). Заменим в матрице A i -ый столбец на A_i-A_j, а k -ый столбец на A_k-A_j. При этом, как нам известно, определитель матрицы A не изменится. Однако, в полученной матрице, окажутся равными i -ый и k -ый столбцы. И, следовательно, определитель этой матрицы, а значит, и матрицы A, будет равен нулю.

Следствие. *Квадратная матрица n-ого порядка $(n\geq 3)$ в которой элементы хотя бы каких-то трех строк (столбцов) являются последовательными членами арифметической прогрессии, является вырожденной.*

Лемма 2. *Если элементы матрицы A, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам), являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, то множество собственных значений матрицы A содержит нуль (кратности $n-2$) и два действительных числа противоположных знаков.*

Доказательство. Предположим, что элементы матрицы A являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии с начальным членом равным a и с разностью d. Воспользовавшись методом математической индукции, а также, учитывая свойства определителя, нетрудно найти, что характеристическое уравнение для матрицы A можно представить в виде

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n\lambda^{n-2}\left(\lambda^2-(na+k)\lambda-md^2\right),$$

где $k,m>0$, откуда и будет следовать требуемое утверждение.

Теорема 1. *Если в системе* (1) *элементы матрицы A, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам), являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, то система* (1) *является неосциллирующей.*

Доказательство. Известно (см., например, [4]), что общее решение системы (1) можно представить в виде

$$\vec{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{m}\vec{g}_k(t)e^{\lambda_k t}, \qquad (2)$$

где $\lambda_k\ (k = 1,2,\dots,m)$ -отличные друг от друга собственные значения матрицы A, а координаты вектор-функции $\vec{g}_k(t)$ являются многочленами степени не выше $r_k - 1$, где r_k–кратность собственного значения λ_k. Согласно утверждению леммы 2, собственными значениями матрицы A будут 0 и некоторые вещественные числа λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Тогда общее решение системы (1) можно записать в виде

$$\vec{\varphi}(t) = c_1\vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{p}_2 e^{\lambda_2 t} + \vec{g}(t),$$

где $\vec{g}(t)$–вектор-функция, компоненты которой являются многочленами степени не выше $n -$, c_1, c_2–произвольные постоянные, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ –собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2. Очевидно, что при $t \to \infty$ компоненты $\vec{\varphi}(t)$ по модулю будут стремиться к бесконечности, и, следовательно, система не может быть осциллирующей.

Ниже приводится построенная в среде MathCad графическая интерпретация утверждения теоремы 1 для решения системы

$$\begin{cases} y_0' = y_0 + 7y_1 + 13y_2, \\ y_1' = 3y_0 + 9y_1 + 15y_2, \\ y_2' = 5y_0 + 11y_1 + 17y_2 \end{cases}$$

с начальным условием $y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = 1$.

$\frac{d}{dt}y0(t) = y0(t) + 7\cdot y1(t) + 13\cdot y2(t)$ $\quad y0(0) = 1$

$\frac{d}{dt}y1(t) = 3\cdot y0(t) + 9\cdot y1(t) + 15\cdot y2(t)$ $\quad y1(0) = 1$

$\frac{d}{dt}y2(t) = 5\cdot y0(t) + 11\cdot y1(t) + 17\cdot y2(t)$ $\quad y2(0) = 1$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_0 + 7\cdot Y_1 + 13\cdot Y_2 \\ 3\cdot Y_0 + 9\cdot Y_1 + 15\cdot Y_2 \\ 5\cdot Y_0 + 11\cdot Y_1 + 17\cdot Y_2 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad t1 := 10 \quad Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad N := 1000$$

$S := Rkadapt(Y0, t0, t1, N, D)$

$t := S^{\langle 0 \rangle} \quad y0 := S^{\langle 1 \rangle} \quad y1 := S^{\langle 2 \rangle} \quad y2 := S^{\langle 3 \rangle}$

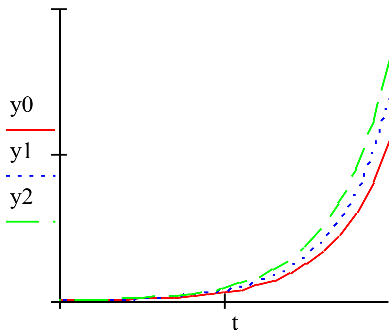

Рис. 1

Лемма 3. *Квадратная матрица A n-ого порядка $(n \ge 2)$, в которой элементы по крайней мере 2-х каких-то строк (столбцов) являются последовательными членами геометрической прогрессии, является вырожденной.*

Действительно, предположим,что в матрице A, указанным в лемме 3 свойством обладают столбцы A_i и A_j, тогда ясно, что найдется такое число q, что $A_j = \,]A_i$. Воспользовавшись известными свойствами определителя, будем иметь

$$\det A = \det\,[A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n] = \det\,[A_1, A_2, ..., A_i, ..., qA_i, ..., A_n] =$$

$$= q \cdot \det\,[A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_i, ..., A_n] = \,)\,,$$

поскольку в последнем определителе два столбца оказались равными.

Лемма 4. *Если элементы матрицы A, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам), являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, то множество собственных значений матрицы A содержит нуль (кратности $n-\ \ $) и одно вещественное число.*

Доказательство. Предположим, что элементы матрицы A являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии с начальным членом равным a и с знаменателем q. Используя метод математической индукции, с учетом свойств определителя, нетрудно доказать, что характеристическое уравнение для матрицы A можно представить в виде

$$\det(A - \lambda\ \ ) = -\ )^n \lambda\ \ (\lambda\ - a\sum_{k=}^{n-} q^{k(n-\ )}),$$

откуда и будет следовать требуемое утверждение.

Теорема 2. *Если в системе* (1) *элементы матрицы A, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам) являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии, то система* (1) *является неосциллирующей.*

Доказательство. Воспользовавшись формулой (2), а также, учитывая утверждение леммы 4, получим, что, что общее решение системы (1) можно представить в виде

$$\varphi\ \ ) = \vec{p}e^{\lambda} + \vec{\ }(t),$$

где λ – отличное от нуля собственное значения матрицы A, c – произвольная постоянная, $\vec{p}$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ а координаты вектор-функции $\vec{g}(t)$ являются многочленами степени не выше $n-\ \ $. Очевидно, что при $t \to\ \infty$ компоненты $\vec{\varphi}\ \ )$ по модулю будут стремиться к бесконечности, и, следовательно, система не может иметь осциллирующее решение.

Ниже, на рисунке 2, приводится построенная в среде MathCad графическая интерпретация утверждения теоремы 2 для решения системы

$$\begin{cases} y_0' = \ y_0 - y_1 + y_2, \\ y_1' = \ -y_0 + y_1 - y_2, \\ y_2' = \ y_0 - y_1 + y_2 \end{cases}$$

с начальным условием $y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = \ \ $.

$$\frac{d}{dt}y0(t) = y0(t) - y1(t) + y2(t) \qquad y0(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y1(t) = -y0(t) + y1(t) - y2(t) \qquad y1(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y2(t) = y0(t) - y1(t) + y2(t) \qquad y2(0) = 1$$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_0 - Y_1 + Y_2 \\ -Y_0 + Y_1 - Y_2 \\ Y_0 - Y_1 + Y_2 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad t1 := 10 \quad Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad N := 1000$$

$$S := Rkadapt(Y0, t0, t1, N, D)$$

$$t := S^{\langle 0 \rangle} \quad y0 := S^{\langle 1 \rangle} \quad y1 := S^{\langle 2 \rangle} \quad y2 := S^{\langle 3 \rangle}$$

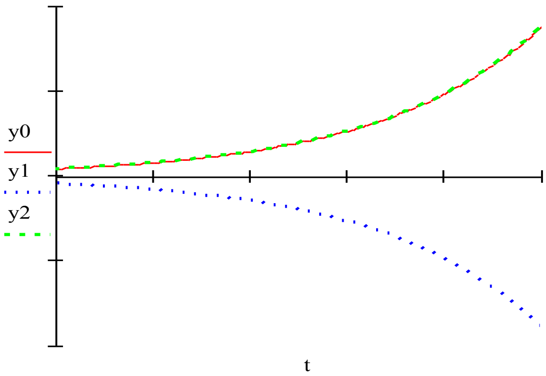

Рис. 2

Лемма 5. *Квадратная матрица A n-ого порядка $(n \geq 3)$, в которой элементы хотя бы каких-то трех строк (столбцов) являются последовательными числами Фибоначчи, является вырожденной.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, предположим, что указанным в лемме свойством обладают элементы столбцов A_i, A_j и A_k. Очевидно, что в случае совпадения двух из этих трех столбцов, вопрос будет решен, поэтому можно предположить, что один из этих столбцов начинается с числа, превосходящего первые числа остальных столбцов. Пусть этот столбец A_k. Поскольку в последовательности чисел Фибоначчи каждый член, начиная с третьего, является линейной комбинацией предыдущих, то столбец A_k будет линейно зависим от столбцов A_i и A_j, а, следовательно, определитель такой матрицы будет равен нулю. Лемма доказана.

Используя метод, применяемый при доказательствах теорем 1 и 2, нетрудно доказать, что имеет место

Теорема 3. *Если в системе* (1) *элементы матрицы A, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам), являются последовательными числами Фибоначчи, то система* (1) *является неосциллирующей.*

Ниже, на рисунке 3, приводится построенная в среде MathCad графическая интерпретация утверждения теоремы 3 для решения системы

$$\begin{cases} y_0' = y_0 + 3y_1 + 13y_2, \\ y_1' = y_0 + 5y_1 + 21y_2, \\ y_2' = 2y_0 + 8y_1 + 34y_2 \end{cases}$$

с начальным условием $y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) = 1$.

$$\frac{d}{dt}y0(t) = y0(t) + 3\cdot y1(t) + 13\cdot y2(t) \qquad y0(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y1(t) = y0(t) + 5y1(t) + 21y2(t) \qquad y1(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y2(t) = 2y0(t) + 3\cdot y1(t) + 34\cdot y2(t) \qquad y2(0) = 1$$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_0 + 3\cdot Y_1 + 13\cdot Y_2 \\ Y_0 + 5Y_1 + 21\cdot Y_2 \\ 2Y_0 + 3\cdot Y_1 + 34\cdot Y_2 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad t1 := 10 \quad Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad N := 1000$$

$$S := Rkadapt(Y0, t0, t1, N, D)$$

$$t := S^{\langle 0 \rangle} \quad y0 := S^{\langle 1 \rangle} \quad y1 := S^{\langle 2 \rangle} \quad y2 := S^{\langle 3 \rangle}$$

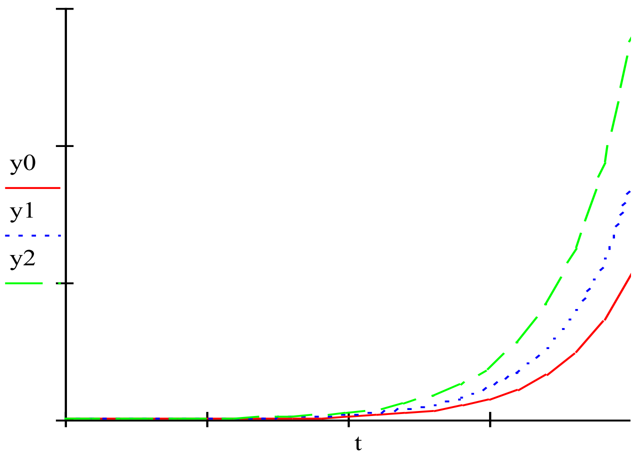

Рис. 3

В завершении рассмотрим случай, когда строки матрицы A представляют собой циклические перестановки одного ряда чисел. Имеют место

Лемма 6. *Квадратная матрица* A *n-ого порядка* $(n \ge 2)$, *в которой строки (столбцы) являются циклическими перестановками одной и той же последовательности из разных чисел длины n, является невырожденной, причем собственные значения матрицы* A *являются действительными числами. Характеристическое уравнение для матрицы* A *в случае четного* n *имеет вид*

$$(\lambda - a)(\lambda - b)\prod_{k=1}^{(n-2)/2}(\lambda^2 - \lambda_k^2) = 0,$$

а в случае нечетного n

$$(\lambda - a)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(\lambda^2 - \lambda_k^2) = 0,$$

где a, b, λ_k *-действительные числа.*

Теорема 4. *Если в системе* (1) *строки матрицы* A *являются циклическими перестановками одной и той же последовательности длины n, состояшей из разных чисел, то система* (1) *является неосциллирующей.*

Доказательство. Известно (см., например, [4]), что общее решение системы (1) в случае, когда корни характеристического уравнения являются простыми, можно представить в виде

$$\vec{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k\vec{p}_k e^{\lambda_k t}, \qquad (3)$$

где $\lambda_k\ (k=1,2,...,n)$ - собственные значения матрицы A, $c_к$ -произвольные постоянные, $\vec{p}_к$ - собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_k. Воспользовавшись формулой (3), а также, учитывая утверждение леммы 5, получим, что, что общее решение системы (1) в случае четного n можно представить в виде

$$\vec{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{(n-2)/2}\left(c_k\vec{p}_k e^{\lambda_k t}+c_{-k}\vec{p}_{-k}e^{-\lambda_k t}\right)+c_{n/2}\vec{p}_{n/2}e^{\lambda_{n/2}t}+c_{n/2+1}\vec{p}_{n/2+1}e^{\lambda_{n/2+1}t}, \qquad (4)$$

а в случае нечетного n

$$\vec{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\left(c_k\vec{p}_k e^{\lambda_k t}+c_{-k}\vec{p}_{-k}e^{-\lambda_k t}\right)+c_{(n+1)/2}\vec{p}_{(n+1)/2}e^{\lambda_{(n+1)/2}t}, \qquad (5)$$

где λ_k – отличные друг от друга собственные значения матрицы A, $c_к, c_{-k}, c_{n/2}, c_{n/2+1}$, $c_{(n+1)/2}$ – произвольные постоянные, $\vec{p}_к\ (\vec{p}_{-k})$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_k\ (\lambda_{-k})$, $\vec{p}_{n/2}, \vec{p}_{n/2+1}$ и $\vec{p}_{(n+1)/2}$ – собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям соответственно $\lambda_{n/2}, \lambda_{n/2+1}$ и $\lambda_{(n+1)/2}$. Заметим, что согласно той же лемме $\lambda_{n/2}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b^2}}{2}$, $\lambda_{n/2+1}=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b^2}}{2}$, $\lambda_{(n+1)/2}=a$. Из соотношений (4) и (5) ясно, что при $t\to\infty$ компоненты $\vec{\varphi}(t)$ по модулю будут стремиться к бесконечности, а, значит, система (1) будет неосциллирующей.

Ниже, на рисунке 4, приводится построенная в среде MathCad графическая интерпретация утверждения теоремы 4 для решения системы

$$\begin{cases} y_0' = -y_0+3y_1+7y_2, \\ y_1' = 3y_0+7y_1-y_2, \\ y_2' = 7y_0-y_1+3y_2 \end{cases}$$

с начальным условием $y_0(0)=\ ,\ y_1(0)=-\ ,\ y_2(0)=\ .$

$$\frac{d}{dt}y0(t) = -\ 0(t) + 3\cdot y1(t) + 7\cdot y2(t) \qquad y0(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y1(t) = 3\,y0(t) + 7\,y1(t) - \ 2(t) \qquad y1(0) = -$$

$$\frac{d}{dt}y2(t) = 7\,y0(t) - \ 1(t) + 3\cdot y2(t) \qquad y2(0) = 1$$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} -\ _0 + 3\cdot Y_1 + 7\cdot Y_2 \\ 3\,Y_0 + 7\,Y_1 - Y_2 \\ 7\,Y_0 - Y_1 + 3\cdot Y_2 \end{pmatrix} \quad t0 := \ \quad t1 := 10 \quad Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \quad N := 1000$$

$$S := \text{Rkadapt}(Y0,\ 0,\ 1,\ N,\ D)$$

$$t := S^{\langle\ \rangle} \quad y0 := S^{\langle\ \rangle} \quad y1 := S^{\langle\ \rangle} \quad y2 := S^{\langle\ \rangle}$$

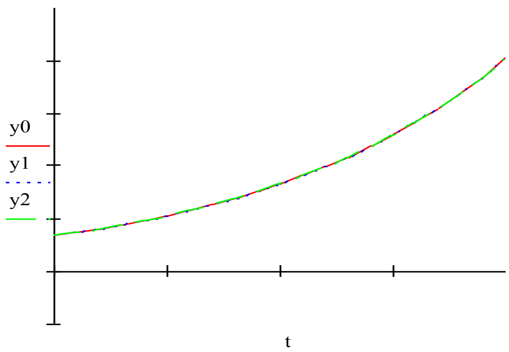

Рис. 4

Литература

1. Butler G. J. *Oscillation theorems for a non-linear analogue of Hill's equatio*n, Quart. J. Math., 1976, 27, N106, 159-171.
2. Kinguradze I.T. *On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations.* Archivum Mathematicum, vol. 14 (1978), № 1, 21-44.
3. Chantladze T., Kandelaki N. and Lomtatidze A. *Oscillation and nonoscillation criteria for a second order linear equation.* Georgian Math. J. 6 (1999), № 5, 401-404.
4. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2007.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Мир, 1970.

Сведение об авторе:

Георгий Саакян - кандидат физ-мат. наук, проректор по учебной части АрГУ.
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.-м.н. Хачатряном.