Известия НАН Армении, Математика, том 58, н. 5, 2023, стр. 85 – 101.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ДВОЙНОЙ СИСТЕМЕ УОЛША ПО СФЕРАМ

С. А. САРГСЯН, Л. Н. ГАЛОЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *stepansargsyan@ysu.am*, *levongaloyan@ysu.am*

Аннотация. В данной работе построена интегрируемая функция U двух переменных, коэффициенты Фурье по двойной системе Уолша которой на спектре положительны и расположены в убывающем порядке по всем направлениям, и для каждой почти везде конечной измеримой функции $f(x,y)$, $(x,y) \in [0,1)^2$ и для любого $\delta > 0$ можно найти ограниченную функцию $g(x,y)$ с

$$|\{(x,y) \in [0,1)^2 : \; g(x,y) \neq f(x,y)\}| \leq \delta,$$

и такую,что $|c_{k,s}(g)| = c_{k,s}(U)$ на спектре функции g и ее сферические частичные суммы ряда Фурье по двойной системе Уолша сходятся равномерно на $[0,1)^2$.

MSC2020 number: 42C10: 43A15.

Ключевые слова: сферическая частичная сумма; двойной ряд Фурье; равномерная сходимость; система Уолша.

1. Введение

Пусть $\{W_k(x)\}_{n=0}^{\infty}-$ система Уолша (см. например [1], стр. 12), и пусть $c_k(g) = \int_0^1 g(x)W_k(x)dx, k \geq 0-$ коэффициенты Фурье-Уолша функции $g \in L^1[0,1]$. Положим $spec(f) = \{k \in N \cup \{0\} : c_k(f) \neq 0\}$ и $S_n(x,g) = \sum_{k=0}^{n} c_k(g)W_k(x)$, где N множество натуральных чисел.

Система Уолша одна из популярных ортонормированных систем, которая является базисом во всех пространствах $L^p[0,1), p \in (1,\infty)$.

В ряде работ изучалась сходимость рядов Фурье по системе Уолша. Приведем те результаты, которые связаны с настоящей работой.

В [4] М. Г. Григоряном доказанно существование (**универсальной**) функции $U \in L^1[0,1)$, которая относительно системы Уолша обладает универсальным (L^1, L^{∞}) свойством, а именно, он доказал следующую теорему:

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21AG-1A066

Теорема 1.1. *Существует функция со строго убывающими коэффициентами Фурье-Уолша, обладающая следующим свойством: для каждой почти везде конечной измеримой на* $[0,1)$ *функции* f *и для любого* $\delta > 0$ *можно найти функцию* $g \in L^{\infty}[0,1)$ *с* $|\{x \in [0,1): \ g(x) \neq f(x)\}| \leq \delta$, *такую,что ее ряд Фурье по системе Уолша сходится равномерно на* $[0,1)$ *и такую,что* $|c_k(g)| = c_k(U), \ k \in spec(g)$.

Заметим, что идея исправления функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину [6]. Широко известно также и усиленное С-свойство Д. Е. Меньшова [7]. Отметим, что в работах [8] – [11] были получены некоторые результаты связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по системе Уолша и по тригонометрической системе универсальны в том или ином смысле в различных функциональных классах.

В этой статье мы рассмотрим вопрос: можно ли получить результат аналогичный Теореме 1 в двумерном случае.

Пусть $T = [0,1]^2$, и пусть $f \in L^p(T), p \in [1,\infty)$. Коэффициенты Фурье функции f по двойной системе Уолша $\{W_k(x)W_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через

$$c_{k,s}(f) = \iint_T f(t,\tau)W_k(t)W_s(\tau)dtd\tau \tag{1.1}$$

Положим

$$\Lambda(f) = spec\{c_{k,s}(f)\} = spec(f) = \{(k,s) : c_{k,s}(f) \neq 0; \ k,s \in N \cup \{0\}\}. \tag{1.2}$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье - Уолша определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x,y,f) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{M} c_{k,s}(f)W_k(x)W_s(y), \tag{1.3}$$

$$S_R(x,y,f) = \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} c_{k,s}(f)W_k(x)W_s(y). \tag{1.4}$$

Говорят, что двойной ряда Фурье-Уолша функции $f \in L^1[0,1)^2$ сходится в $L^p[0,1)^2, p > 0$ по прямоугольникам (по сферам), если

$$\lim_{N\to\infty, M\to\infty} \iint_T |S_{N,M}(x,y,f) - \ f(x,y)|^p \, dxdy = 0,$$

(соотвественно, если)

$$\lim_{R\to\infty} \iint_T |S_R(x,y,f) - \ f(x,y)|^p \, dxdy = 0.$$

Аналогично определяются почти всюду и равномерная сходимость по прямоугольникам и по сферам.

Отметим, что ряд классических результатов (такие теоремы, как теорема Л. Карлесона [15]: ряд Фурье любой функции $f \in L^2[0, 2\pi]$ сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$, теорема М. Рисса [14]: ряд Фурье любой функции $f \in L^p[0, 2\pi], p > 1$ сходится по норме $L^p[0, 2\pi]$, теорема А. М. Колмогорова [13]: ряд Фурье каждой функции $f \in L[0, 2\pi]$ сходится в метрике $L^p[0, 2\pi], 0 < p < 1$) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный. В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимости в $L^p[0, 2\pi], p \geq 1$ и сходимости почти всюду (см. [25-34]). В работе [16], Фефферманом получены следующие результаты:

Теорема 1.2. *Для любого $p \neq 2$ существует такая функция из класса $L^p(0, 2\pi)^2$, что сферические частичные суммы ряда Фурье по тригонометрической системе этой функции не сходятся по норме L^p.*

Теорема 1.3. *Существует непрерывная функция двух переменных, со всюду расходящимися прямоугольными частичными суммами ряда Фурье по тригонометрической системе.*

В работе [17] Д. Г. Харрис доказал, что для любого $p \in [1, 2)$ существует такая функция из $L^p(0, 1)^2$, что сферические частичные суммы ряда Фурье-Уолша этой функции расходятся почти всюду и по $L^p[0, 1)^2$ норме.

В работе [18] М. Г. Григоряном доказано существование функции $f_0 \in L^1(0, 2\pi)^2$, двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по сферам расходится в метриках $L^p(0, 2\pi)^2$ для любого $p \in (0, 1)$.

В работе [19] Р. Д. Гецадзе доказал, что существует непрерывная функция прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье-Уолша которой расходятся почти всюду.

Отметим, что до сих по неизвестно сходятся ли почти всюду сферические частичные суммы двойного ряда Фурье-Уолша каждой непрерывной функции?

Определение 1.1. *Будем говорить, что члены в двойной последовательности $\{c_{k,s}(f)\}_{k,s=0}^{\infty}$ на спектре $\Lambda(f)$ расположены в убывающем порядке, если $c_{k_2,s_2}(f) < c_{k_1,s_1}(f)$, когда $k_2 \geq k_1, s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1,\ \ (k_2, s_2), (k_1, s_1) \in \Lambda(f)$.*

В этой работе доказывается

Теорема 1.4. *Существует функция* $U \in L^1[0,1)^2$ *такая, что*

а) коэффициенты Фурье функции U *по двойной системе Фурье-Уолша на ее спектре положительны и расположены в убывающем порядке,*

б) для каждой почти везде конечной измеримой на $[0,1)^2$ *функции* f *и для любого* $\delta > 0$ *можно найти функцию* $g \in L^\infty[0,1)^2$ *с*

$$|\{(x,y) \in [0,1)^2 : \ g(x,y) \neq f(x,y)\}| \leq \delta,$$

сферические частичные суммы ряда Фурье которой по двойной системе Уолша сходятся равномерно на $[0,1)^2$,

в) $|c_{k,s}(g)| = c_{k,s}(U), \ (k,s) \in spec(g)$.

2. Доказательство лемм

Для краткости записи условимся употреблять следующие обозначения: $\|f\|_\infty \doteq \sup\limits_{x,y\in[0,1)^2} |f(x,y)|$, $\|f\|_1 \doteq \int_{[0,1)^2} |f(x,y)|dxdy$ (те же самые обозначения будут применяться для $\sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ и $\int_0^1 |f(x)|dx$). Под двоичным прямоугольником мы будем понимать декартово произведение $\Delta_1 \times \Delta_2$, где $\Delta_i, \ i = 1,2$ двоичные полуинтервалы вида $\Delta_s^{(\nu)} = [\frac{\nu-1}{2^s}, \frac{\nu}{2^s}), \ 1 \leq \nu \leq 2^s, \ s \geq 1$.

Мы будем использовать следующую лемму, доказанную в [4].

Лемма 2.1. *Для любых чисел* $k_0 \in N, \gamma_0 \neq 0, \varepsilon_0, \eta_0, \delta_0 \in (0,1), \epsilon_0 \in (0, \frac{|\gamma_0|}{\delta_0})$ *и для любого двоичного полуинтервала* $\Delta_0 = [\frac{\nu-1}{2^s}, \frac{\nu}{2^s})$, $1 \leq \nu \leq 2^s$, $s \geq 1$, *можно найти измеримое множество* $E \subset \Delta_0$, *функцию* $g(x)$, *полиномы* $H(x)$ *и* $Q(x)$ *вида*

$$H(x) = \sum_{l=2^{k_0}}^{2^k-1} b_l W_l(x) \ , \quad Q(x) = \sum_{l=2^{k_0}}^{2^k-1} \varepsilon_l b_l W_l(x),$$

обладающие следующими свойствами:

1) $\varepsilon_l = \pm 1$ *или* $0, \ \ 0 < b_{l+1} < b_l < \epsilon_0, \ \ \forall l \in [2^{k_0}, 2^k)$,

2) $\int_0^1 |H(x)|dx < \eta_0$,

3) $|E| > (1-\delta_0)|\Delta_0|$,

4) $g(x) = \begin{cases} \gamma_0, & x \in E \\ 0, & x \notin \ \Delta_0 \end{cases}$,

5) $\|g - Q\|_\infty < \varepsilon_0$, *б)* $\max\limits_{2^{k_0}\le n<2^k}\left\|\sum\limits_{l=2^{k_0}}^{n}\varepsilon_l b_l W_l(x)\right\|_\infty < \dfrac{3|\gamma_0|}{\delta_0}.$

Лемма 2.2. *Для любых чисел $n_0 \in N$, $\gamma \neq 0$, ε, $\delta, \epsilon, \eta \in (0,1)$ и для любого двоичного прямоугольника $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ существуют измеримое множество $E \subset \Delta$, функция $g(x,y)$, полиномы $H(x,y)$ и $Q(x,y)$ вида*

$$H(x,y) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1}\sum_{s=2^{m_0}}^{2^{m_1}-1} c_{k,s}W_k(x)W_s(y),$$

$$Q(x,y) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1}\sum_{s=2^{m_0}}^{2^{m_1}-1} \varepsilon_{k,s}c_{k,s}W_k(x)W_s(y), \quad \varepsilon_{k,s} = \pm 1,$$

обладающие следующими свойствами: коэффициенты $c_{k,s}$, $k \in [2^{n_0}, 2^{n_1}), s \in [2^{m_0}, 2^{m_1})$ расположены в убывающем порядке и

(1) $$0 < c_{k,s} < \varepsilon,$$

(2) $$|E| > (1-\delta)|\Delta|,$$

(3) $$\|H\|_1 < \eta,$$

(4) $$g(x,y) = \begin{cases}\gamma, & (x,y)\in E\\ 0, & x \notin \Delta\end{cases},$$

(5) $$\|g\|_\infty \le \frac{9}{\delta^2}|\gamma|,$$

(6) $$\|Q - g\|_\infty < \varepsilon,$$

(7) $$\max_{N_0^2+M_0^2\le R^2\le N_1^2+M_1^2}\left\|\sum_{N_0^2+M_0^2\le k^2+s^2\le R^2}\varepsilon_{k,s}c_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right\|_\infty \le \frac{22}{\delta^2}|\gamma|,$$

где $N_0 = 2^{n_0}$, $M_0 = 2^{m_0}, N_1 = 2^{n_1}-1$, $M_1 = 2^{m_1}-1$.

Доказательство Леммы 2.2. Применяя лемму 2.1, полагая в ее формулировке

$$\gamma_0 = \gamma,\ \Delta_0 = \Delta_1,\ k_0 = n_0,\ \ \eta_0 = \sqrt{\eta},\ \epsilon_0 = \sqrt{\epsilon},\ \delta_0 = \frac{\delta}{2},\ \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon\delta}{16},$$

определим измеримое множество $E_1 \subset \Delta_1$, функцию $g_1(x)$, полиномы $H_1(x)$ и $Q_1(x)$ вида

(2.1) $$H_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} b_k^{(1)}W_k(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1} b_k^{(1)}W_k(x),$$

$$Q_1(x)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1}\varepsilon_k^{(1)}b_k^{(1)}W_k(x) \ =\sum_{k=N_0}^{N_1}\varepsilon_k^{(1)}b_k^{(1)}W_k(x), \tag{2.2}$$

где

$$\varepsilon_k^{(1)}=0,\pm1 \ \ \forall k\in[2^{n_0},2^{n_1})=[N_0,N_1],$$

удовлетворяющие условиям:

$$0<b_{k+1}^{(1)}<b_k^{(1)}<\sqrt{\epsilon}, \quad \forall k\in[N_0,N_1), \tag{2.3}$$

$$|E_1|>(1-\delta/2)|\Delta_1|, \ \int_0^1|H_1(x)|dx<\sqrt{\eta}, \tag{2.4}$$

$$g_1(x)=\begin{cases}\gamma, & x\in \ E_1\\ 0, & x\notin \ \Delta_1\end{cases}, \tag{2.5}$$

$$\max_{N_0\le n\le N_1}\left\|\sum_{k=N_0}^{m}\varepsilon_k^{(1)}b_k^{(1)}W_k(x)\right\|_\infty\le\frac{2}{\delta}|\gamma|, \tag{2.6}$$

$$\|Q_1-g_1\|_\infty<\min\{|\gamma|;\delta\varepsilon/4\}. \tag{2.7}$$

Положим

$$M_0=2^{m_0}>N_1^2+1 \tag{2.8}$$

Снова применим Лемму 2.1, полагая в ее формулировке

$$\gamma_0=1,\Delta_0=\Delta_2, \ \ k_0=m_0, \quad \epsilon_0=\sqrt{\epsilon}\ , \ \delta_0=\frac{\delta}{2},\ \varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{4\|Q_1\|_\infty}.$$

Тогда определяются измеримое множество $E_2\subset[0,1]$, функция $g_2(y)$, полином $H_2(y)$ и $Q_2(y)$ вида

$$H_2(y)=\sum_{k=2^{m_0}}^{2^{m_1}-1}b_k^{(2)}W_k(y) \ =\sum_{k=M_0}^{M_1}b_k^{(2)}W_k(y), \tag{2.9}$$

$$Q_2(y)=\sum_{k=2^{m_0}}^{2^{m_1}-1}\varepsilon_s^{(2)}b_s^{(2)}W_s(y)=\sum_{k=M_0}^{M_1}\varepsilon_s^{(2)}b_s^{(2)}W_s(y), \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_s^{(2)}=0,\pm1 \ \ \forall s\in[2^{m_0},2^{m_1})=[M_0,M_1]$$

удовлетворяющие условиям:

$$0<b_{s+1}^{(2)}<b_s^{(2)}<\sqrt{\epsilon}, \ s\in[M_0,M_1), \tag{2.11}$$

$$|E_2|>(1-\frac{\delta}{2})|\Delta_2|, \ \int_0^1|H_2(y)|dy<\sqrt{\eta}, \tag{2.12}$$

$$g_2(y) = \begin{cases} 1: & y \in E_2 \\ 0: & y \notin \Delta_2 \end{cases}, \tag{2.13}$$

$$\|Q_2(y) - g_2(y)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(\|Q_1\|_\infty + 1)}, \tag{2.14}$$

$$\max_{M_0 \le m \le M_1} \left\| \sum_{k=M_0}^{m} \varepsilon_k^{(2)} b_k^{(2)} W_k(y) \right\|_\infty \le \frac{2}{\delta}. \tag{2.15}$$

Определим множество E, функцию $g(x,y)$, полиномы $H(x,y)$ и $Q(x,y)$ следующим образом:

$$g(x,y) = g_1(x) g_2(y), \quad E = E_1 \times E_2, \tag{2.16}$$

$$H(x,y) = H_1(x) H_2(y) = \sum_{k,s=N_0,M_0}^{N_1,M_1} c_{k,s} W_k(x) W_s(y), \tag{2.17}$$

$$Q(x,y) = Q_1(x) Q_2(y) = \sum_{k,s=N_0,M_0}^{N_1,M_1} \varepsilon_{k,s} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) =$$

$$= \sum_{k=N_0}^{N_1} \varepsilon_k^{(1)} b_k^{(1)} W_k(x) \sum_{s=M_0}^{M_1} \varepsilon_s^{(2)} b_s^{(2)} W_s(y), \tag{2.18}$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} b_k^{(1)} b_s^{(2)}, & N_0 \le k \le N_1,\ M_0 \le s \le M_1 \\ 0, & k \notin [N_0, N_1], \quad n \notin [M_0, M_1] \end{cases}, \tag{2.19}$$

$$\varepsilon_{k,s} = \begin{cases} \varepsilon_k^{(1)} \varepsilon_s^{(2)}, & N_0 \le k \le N_1,\ M_0 \le s \le M_1 \\ 0, & k \notin [N_0, N_1], \quad n \notin [M_0, M_1] \end{cases}. \tag{2.20}$$

Отсюда и из (2.3), (2.4), (2.11), (2.17) и (2.19) следует, что члены в последовательности $\{c_{k,s},\ N_0 \le k \le N_1,\ \ M_0 \le s \le M_1\}$ положительны, расположены в убывающем порядке и

$$0 < c_{k,s} < \epsilon, \qquad |E| > (1-\delta)|\Delta|,$$

$$\iint_T |H(x,y)| dx dy = \int_0^1 |H_1(x)| dx \int_0^1 |H_1(y)| dy < \eta.$$

Из (2.5)-(2.7), (2.13)-(2.15) и (2.16) следует

$$g(x,y) = \begin{cases} \gamma, & (x,y) \in E \\ 0, & x \notin \Delta \end{cases},$$

$$\|g\|_\infty \le \|g_1\|_\infty \cdot \|g_2\|_\infty \le \frac{9}{\delta^2} |\gamma|.$$

В силу (2.7), (2.14)-(2.16) и (2.18) для всех $(x,y)\in[0,1)^2$ имеем

$$|Q(x,y)-g(x,y)|\le|Q_2(y)-g_2(y)|\cdot Q_1(x)+$$
$$+|Q_1(x)-g_1(x)|\cdot g_2(y)\le\varepsilon.$$

Теперь проверим выполнение утверждения 5). Пусть $N_0^2+M_0^2<R^2<N_1^2+M_1^2$, тогда для некоторого p_0 имеем $p_0\le R<p_0+1$. Из (2.8), (2.18)-(2.20) следует $R^2-N_1^2\ge(p_0-1)^2$ и, следовательно, получим

$$\max_{N_0^2+M_0^2\le R^2\le N_1^2+M_1^2}\left\|\sum_{N_0^2+M_0^2\le k^2+s^2\le R^2}\varepsilon_{k,s}c_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right\|_\infty\le$$
$$\le\left\|\sum_{k=N_0}^{N_1}\sum_{s=M_0}^{p_0-1}\varepsilon_{k,s}c_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right\|_\infty+\left\|\sum_{k=N_0}^{l}\varepsilon_{k,p_0}c_{k,p_0}W_k(x)W_{p_0}(y)\right\|_\infty=$$
$$=\left\|\sum_{k=N_0}^{N_1}\varepsilon_k^{(1)}b_k^{(1)}W_k(x)\right\|_\infty\cdot\left\|\sum_{s=M_0}^{p_0-1}\varepsilon_s^{(2)}b_s^{(2)}W_s(y)\right\|_\infty+$$
$$+|b_{m_0}^{(2)}|\cdot\max_{N_0\le m\le N_1}\left\|\sum_{k=N_0}^{m}\varepsilon_k^{(1)}b_k^{(1)}W_k(x)\right\|_\infty<\frac{12}{\delta^2}|\gamma|.$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Для любых чисел $\epsilon,\ \varepsilon,\delta,\eta\in(0,1)$, $n_0\in N$ и для любого полинома $f(x,y)\ne0,\ (x,y)\in[0,1)^2$ по двойной системе Уолша можно найти измеримое множество $E\subset[0,1)^2$, функцию $g(x,y)$, полиномы $H(x,y)$ и $Q(x,y)$ вида*

$$H(x,y)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1}\sum_{s=2^{m_0}}^{2^{m_1}-1}c_{k,s}W_k(x)W_s(y),$$

$$Q(x,y)=\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1}\sum_{s=2^{m_0}}^{2^{m_1}-1}\varepsilon_{k,s}c_{k,s}W_k(x)W_s(y),\quad\varepsilon_{k,s}=\pm1,$$

где $N_0=2^{n_0},M_0=2^{m_0}$, обладающие следующими свойствами: коэффициенты $c_{k,s},\ k\in[2^{n_0},2^{n_1}),s\in[2^{m_0},2^{m_1})$ расположены в убывающем порядке и

$$0<c_{k,s}<\epsilon,\tag{1}$$

$$g(x,y)=f(x,y),\quad\forall(x,y)\in E,\quad|E|>1-\delta,\tag{2}$$

$$\|Q-g\|_\infty<\ \varepsilon,\tag{3}$$

$$\|H\|_1<\eta,\tag{4}$$

$$\|g\|_\infty\le\frac{9}{\delta^2}\|f\|_\infty,\tag{5}$$

$$(6) \qquad \max_{N_0^2+M_0^2\le R^2\le N^2+M^2}\left\|\sum_{N_0^2+M_0^2\le k^2+s^2\le R^2}\varepsilon_{k,s}\,c_{k,s}\,W_k(x)\,W_s(y)\right\|_\infty \le \frac{22}{\delta^2}\|f\|_\infty,$$

где $N_0 = 2^{n_0},\ M_0 = 2^{m_0}, N = 2^{\bar n} - 1,\ M = 2^{\bar m} - 1.$

Доказательство Леммы 2.3. Ясно, что полином по двойной системе Уолша $f(x,y)$ есть ступенчатая функция вида

$$(2.21) \qquad f(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\gamma_\nu\chi_{\Delta_\nu}(x,y)$$

где $\Delta_\nu = [\frac{\nu_1-1}{2^{s_1}},\frac{\nu_1}{2^{s_1}})\times[\frac{\nu_2-1}{2^{s_2}},\frac{\nu_2}{2^{s_2}})$ и $\gamma_\nu\neq 0$, $1\le\nu<\nu_0$. ($\chi_E(x,y)$- характеристическая функция множества E). Последовательным применением леммы 2.2, для каждого $\nu = 1,2,...,\nu_0$ можно определить функции $g_\nu(x,y)$, множества $E_\nu\subset\Delta_\nu$, натуральные числа n_ν, m_ν и полиномы вида

$$(2.22) \qquad H_\nu(x,y) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\sum_{s=M_{\nu-1}}^{M_\nu-1}c_{k,s}^{(\nu)}W_k(x)W_s(y),$$

$$(2.23) \qquad Q_\nu(x,y) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}\sum_{s=M_{\nu-1}}^{M_\nu-1}\varepsilon_{k,s}^{(\nu)}c_{k,s}^{(\nu)}W_k(x)W_s(y),$$

где $N_\nu = 2^{n_\nu}, M_\nu = 2^{m_\nu}$, обладающие следующими свойствами: члены в последовательности

$$\{c_{k,s}^{(\nu)},\ N_{\nu-1}\le k<N_\nu,\ M_{\nu-1}\le s<M_\nu\}$$

положительны, расположены в убывающем порядке и для всех $\nu = 1,2,\ldots$

$$(2.24) \qquad \max_{N_\nu\le k<N_{\nu+1},M_\nu\le s<M_{\nu+1}} c_{k,s}^{(\nu+1)} < \min_{N_{\nu-1}\le k<N_\nu,M_{\nu-1}\le s<M_\nu} c_{k,s}^{(\nu)},$$

$$(2.25) \qquad |E_\nu| > (1-\delta)\cdot|\Delta_\nu|,$$

$$(2.26) \qquad g_\nu(x,y) = \begin{cases}\gamma_\nu,\ (x,y)\in E_\nu\\ 0,\quad x\notin\ \Delta_\nu\end{cases},$$

$$(2.27) \qquad |g_\nu(x,y)| \le \frac{9}{\delta^2}|\gamma_\nu|,$$

$$(2.28) \qquad \|Q_\nu - g_\nu\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\nu_0}\frac{\min_{(x,y)\in([0,1)^2}|f(x,y)|}{\|f\|_\infty},$$

$$(2.29) \qquad \max_{N_{\nu-1}^2+M_{\nu-1}^2\le R^2<N_\nu^2+M_\nu^2}\left|\sum_{N_{\nu-1}^2+M_{\nu-1}^2\le k^2+s^2\le R^2}\varepsilon_{k,s}^{(\nu)}c_{k,s}^{(\nu)}W_k(x)W_s(y)\right| \le \frac{12}{\delta^2}|\gamma_\nu|,$$

$$\|H_\nu\|_1 < \frac{\eta}{\nu_0}. \tag{2.29}$$

Определим множество E, функцию $g(x,y)$, числа $c_{k,s}$, $\varepsilon_{k,s}$ и полиномы $H(x,y)$ и $Q(x,y)$ следующим образом:

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \tag{2.30}$$

$$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x,y), \tag{2.31}$$

$$c_{k,s} = \begin{cases} c_{k,s}^{(\nu)}, \ N_{\nu-1} \le k < N_\nu, \quad M_{\nu-1} \le s < M_\nu, \quad 1 \le \nu \le \nu_0 \\ 0, \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}, \tag{2.32}$$

$$\varepsilon_{k,s} = \begin{cases} \varepsilon_{k,s}^{(\nu)}, \ N_{\nu-1} \le k < N_\nu, \quad M_{\nu-1} \le s < M_\nu, \quad 1 \le \nu \le \nu_0 \\ 0, \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}, \tag{2.33}$$

$$H(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} H_\nu(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \sum_{s=M_{\nu-1}}^{M_\nu - 1} c_{k,s}^{(\nu)} W_k(x) W_s(y) =$$

$$= \sum_{k,s=N_0,M_0}^{N,M} c_{k,s} W_k(x) W_s(y), \tag{2.34}$$

$$Q(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} \sum_{s=M_{\nu-1}}^{M_\nu - 1} \varepsilon_{k,s}^{(\nu)} c_{k,s}^{(\nu)} W_k(x) W_s(y) =$$

$$= \sum_{k,s=N_0,M_0}^{N,M} \varepsilon_{k,s} c_{k,s} W_k(x) W_s(y), \tag{2.35}$$

где $N = N_{\nu_0} - 1 = 2^{\bar{n}} - 1, M = M_{\nu_0} - 1 = 2^{\bar{m}} - 1$ ($\bar{n} = n_{\nu_0}, \bar{m} = m_{\nu_0}$). В силу (2.24) - (2.26) и (2.30) - (2.35) имеем: все ненулевые члены в последовательности $\{c_{k,s}(H)\ ,\ (k,s) \in spec(H)\}$ положительны, расположены в убывающем порядке и

$$\varepsilon_{k,s} = \pm 1, \quad 0 < c_{k,s} < \epsilon, \quad \forall (k,s) \in [N_0, N) \times [M_0, M), \quad |E| > 1 - \delta,$$

$$g(x,y) = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in E, \qquad |Q(x,y) - g(x,y)| < \varepsilon, \ \forall (x,y) \in [0,1)^2$$

$$\iint_T |H(x,y)| dxdy < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \iint_T |H_\nu(x,y)| dxdy < \eta.$$

т.е утверждения 1)-4) выполнены. Теперь проверим выполнение утверждений 5) и 6). Принимая во внимание равенство $g_\nu(x,y) = 0$ при $(x,y) \in ([0,1)^2 \setminus \Delta_\nu)$,$\forall \nu \in$

$[1, \nu_0]$ (см. (2.26)) в силу (2.21) и (2.27) для всех $(x, y) \in ([0,1)^2$ и $\nu \in [1, \nu_0]$ будем иметь

$$\left|\sum_{s=1}^{\nu} g_s(x,y)\right| \le \sum_{s=1}^{\nu} |g_s(x,y)| \le \sum_{s=1}^{\nu_0} \frac{9}{\delta^2} |\gamma_s| \chi_{\Delta_s}(x,y) = \frac{9}{\delta^2} |f(x,y)|. \tag{2.36}$$

Пусть $R \in [N_0^2 + M_0^2, N^2 + M^2]$, тогда для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$, $N_\nu^2 + M_\nu^2 \le R^2 \le N_{\nu+1}^2 + M_{\nu+1}^2$. Ясно, что (см. (2.32), (2.33) и (2.35))

$$\sum_{N_0^2+M_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \varepsilon_{k,s} c_{k,s} W_k(x) W_s(y) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\nu} Q_s(x,y) + \sum_{N_\nu^2+M_\nu^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \varepsilon_{k,s}^{(\nu)} c_{k,s}^{(\nu)} W_k(x) W_s(y).$$

Отсюда и из соотношений (2.28), (2.29) и (2.36) для всех $(x, y) \in [0,1)^2$ будем иметь

$$\left|\sum_{N_0^2+M_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \varepsilon_{k,s} c_{k,s} W_k(x) W_s(y)\right| \le \sum_{s=1}^{\nu} |Q_s(x,y) - g_s(x,y)| +$$

$$+ \left|\sum_{s=1}^{\nu} g_s(x,y)\right| + \left|\sum_{N_\nu^2+M_\nu^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \varepsilon_{k,s}^{(\nu)} c_{k,s}^{(\nu)} W_k(x) W_s(y)\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\nu_0} \nu \min_{(x,y) \in ([0,1)^2} |f(x,y)| + \frac{9}{\delta^2} |f(x,y)| + \frac{12|\gamma_\nu|}{\delta^2} \le \frac{22}{\delta^2} |f(x,y)|.$$

Лемма 2.3 доказана.

3. Доказательство Теоремы 2.2.

Пронумеровав все полиномы Уолша с рациональными коэффициентами мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3.1}$$

Последовательным применением леммы 2.3 для всех $n \in N$ можно определить функции

$$\{g_n^{(j)}(x,y)\}_{j=1}^{n},$$

множества

$$\{E_n^{(j)}\}_{j=1}^{n},$$

и полиномы

$$\{H_n^{(j)}(x,y)\}_{j=1}^{n}, \ \{Q_n^{(j)}(x,y)\}_{j=1}^{n},$$

вида

$$H_n^{(j)}(x,y) = \sum_{k,s=N_n^{(j-1)},M_n^{(j-1)}}^{N_n^{(j)}-1,M_n^{(j)}-1} a_{k,s}^{(n,j)} W_k(x)W_s(y),\ 1 \le j \le n, \tag{3.2}$$

$$Q_n^{(j)}(x,y) = \sum_{k,s=N_n^{(j-1)},M_n^{(j-1)}}^{N_n^{(j)}-1,M_n^{(j)}-1} \delta_{k,s}^{(n,j)} a_{k,s}^{(n,j)} W_k(x)W_s(y) \ \ (\delta_{k,s}^{(n,j)} = \pm 1, 0), \tag{3.3}$$

где

$$N_p^{(i_1)} < N_p^{(i_2)},\ \text{если } 0 \le i_1 < i_2 \le p \text{ и } N_p^{(p)} < N_{p+1}^{(0)},\ p \ge 1,$$

$$M_p^{(i_1)} < M_p^{(i_2)},\ \text{если } 0 \le i_1 < i_2 \le p \text{ и } M_p^{(p)} < M_{p+1}^{(0)},\ p \ge 1, \tag{3.4}$$

удовлетворяющие условиям: для фиксированных $n \in [1,\infty)$ и $j \in [1,n]$ коэффициенты $a_{k,s}^{(n,j)}$, $(k,s) \in spec(H_n^{(j)})$ положительны, расположены в убывающем порядке и

$$B_n^{(j)} < A_n^{(j-1)},\ 1 \le j \le n, \qquad B_n^{(1)} < \frac{A_{n-1}^{(n-1)}}{2^n}, n = 1,2,...,$$

где

$$A_n^{(j)} = \min_{(\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H_n^{(j)})} a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(n,j)},\ \ B_n^{(j)} = \max_{(\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H_n^{(j)})} a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(n,j)}, \tag{3.5}$$

$$g_n^{(j)}(x,y) = f_n(x,y) \ \text{ при } \ (x,y) \in E_n^{(j)},\ \ |E_n^{(j)}| = 1 - 2^{-j-n}, \tag{3.6}$$

$$\|g_n^{(j)} - Q_n^{(j)}\|_\infty < 4^{-4n}, \tag{3.7}$$

$$\|g_n^{(j)}\|_\infty < 9 \cdot 4^{j+n} \|f_n\|_\infty, \tag{3.8}$$

$$\max_{(R_n^{(j-1)})^2 \le R^2 \le (R_n^{(j)})^2} \left\| \sum_{(R_n^{(j-1)})^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \delta_{k,s}^{(n,j)} a_{k,s}^{(n,j)} W_k(x)W_s(y) \right\| <$$

$$< 22 \cdot 4^{j+n} \|f_n\|_\infty,\ \ R_n^{(j)} = \sqrt{(N_n^{(j)})^2 + (M_n^{(j)})^2}, \tag{3.9}$$

$$\|H_n^{(j)}\|_1 < 4^{-4n}. \tag{3.10}$$

Определим функцию $U(x,y)$ и числа $a_{k,s}$, $k,s = 0,1,2...$ следующим образом:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} H_n^{(j)}(x,y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k,s=N_n^{(j-1)},M_n^{(j-1)}}^{N_n^{(j)}-1,M_n^{(j)}-1} a_{k,s}^{(n,j)} W_k(x)W_s(y) \right) = \sum_{k,s=0}^{\infty} b_{k,s} W_k(x)W_s(y) \tag{3.11}$$

(3.12)
$$b_{k,s}=\begin{cases} a_{k,s}^{(n,j)},\ (k,s)\in[N_n^{(j-1)},N_n^{(j)})\times[M_n^{(j-1)},M_n^{(j)}),\ 1\le j\le n,\quad n\in[1,\infty) \\ 0,\quad \text{в остальных случаях}\end{cases}.$$

В силу (3.10) - (3.12) имеем

$$\iint\limits_T |U(x,y)|dxdy\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\iint\limits_T |H_n^{(j)}(x,y)|dxdy\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}4^{-(n+j)}<1,$$

и

$$\iint\limits_T\left|U(x,y)-\sum_{k,s=0}^{N_n^{(n)},M_n^{(n)}}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right|dxdy\le$$

$$\le\sum_{n=q}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\iint\limits_T |H_n^{(j)}(x,y)|dxdy\right)\le 2^{-q}\to 0.$$

Отсюда и из (1.1) следует

$$b_{k,s}=c_{k,s}(U)\ ,k,s=0,1,2,... \tag{3.13}$$

Учитывая соотношения (3.5), (3.12) и (3.13), получим, что коэффициенты Фурье-Уолша функции U на спектре $\Lambda(U)$ (см.(1.2)) положительны и расположены в убывающем порядке.

Пусть $f(x,y)-$ любая почти везде конечная измеримая функция определенная на $[0,1)^2$. Принимая во внимание многомерный аналог теоремы Лузина (см [2], стр.323-325) и пункт б) теоремы 2.2 , без ограничения общности можно считать, что $f(x,y)\in C[0,1)^2$. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.1) можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N}f_{k_n}(x,y)-f(x,y)\right\|_{\infty}=0\ , \tag{3.14}$$

$$\|f_{k_n}(x,y)\|_{\infty}\le 4^{-3n-2},\quad n\ge 2, \tag{3.15}$$

$$k_1>j_0=[\log_{\frac{1}{2}}\delta]+1. \tag{3.16}$$

где $[a]$- целая часть числа a. Пусть

$$Q_1(x,y)=Q_{k_1}^{(j_0+1)},\quad E_1=E_{k_1}^{(j_0+1)},\quad g_1=g_{k_1}^{(j_0+1)}. \tag{3.17}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1=\nu_1<...<\nu_{q-1}$ функции $f_{\nu_1}(x,y),...,f_{\nu_{q-1}}(x,y)$, $g_0(x,y),g_1(x,y).....g_{q-1}(x)$, множества $E_n,\ 1\le n\le q-1$

и полиномы

$$Q_n(x,y)=Q_{\nu_n}^{(n+j_0)}(x,y)=\sum_{k,s=N_{\nu_n}^{(n+j_0-1)},M_{\nu_n}^{(n+j_0-1)}}^{N_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1,M_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1}\delta_{k,s}^{(\nu_n,n+j_0)}\ a_{k,s}^{(\nu_n,n+j_0)}W_k(x)W_s(y),$$

которые для всех $1\le n\le q-1$ удовлетворяют условиям:

$$\|g_n\|_\infty<2^{-(n-8)},\quad g_n(x,y)=f_{k_n}(x,y),\quad (x,y)\in E_n,\quad |E_n|>1-\delta 2^{-n},$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}[Q_k(x,y)-g_k(x,y)]\right\|_\infty<4^{-(n-1)},\ 1\le n\le q-1,\tag{3.18}$$

$$\max_{(R_{\nu_n}^{(n+j_0-1)})^2\le R^2\le(R_{\nu_n}^{(n+j_0)})^2}\left\|\sum_{(R_{\nu_n}^{(n+j_0-1)})^2\le k^2+s^2\le R^2}\delta_{k,s}^{(\nu_n,n+j_0)}\ a_{k,s}^{(\nu_n,n+j_0)}W_k(x)W_s(y)\right\|_\infty$$

$$<2^{-n},\quad R_{\nu_n}^{(j)}=\sqrt{(N_{\nu_n}^{(j)})^2+(M_{\nu_n}^{(j)})^2}.$$

Нетрудно видеть, что из последовательности (3.1) можно выбрать функцию $f_{\nu_q}(x,y)$, чтобы

$$\left\|f_{\nu_q}(x,y)-\left(f_{k_q}(x,y)-\sum_{i=1}^{q-1}[Q_i(x,y)-g_i(x,y)]\right)\right\|_\infty<4^{-3q-2}.\tag{3.19}$$

Положим

$$g_q(x,y)=f_{k_q}(x,y)+[g_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x,y)-f_{\nu_q}(x,y)],\tag{3.20}$$

(3.21)

$$Q_q(x,y)=Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x,y)=\sum_{k,s=N_{\nu_q}^{(q+j_0-1)},M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}}^{N_{\nu_q}^{(q+j_0)}-1,M_{\nu_q}^{(q+j_0)}-1}\delta_{k,s}^{(\nu_q,n+j_0)}a_{k,s}^{(\nu_q,q+j_0)}W_k(x)W_s(y),$$

$$E_q=E_{\nu_q}^{(q+j_0)}.\tag{3.22}$$

Из (3.6), (3.16), (3.20) и (3.22) вытекает, что

$$g_q(x,y)=f_{k_q}(x,y),\quad (x,y)\in E_q,\quad |E_q|>1-\delta 2^{-q}.\tag{3.23}$$

В силу (3.7) и (3.18)-(3.21) имеем

$$\left\|\sum_{j=1}^{q}[Q_j(x,y)-g_j(x,y)]\right\|_\infty=\left\|\sum_{j=1}^{q-1}[Q_j(x,y)-g_j(x,y)]+Q_q(x,y)-g_q(x,y)\right\|_\infty\le$$

(3.24)

$$\le\left\|f_{\nu_q}(x,y)-\left(f_{k_q}(x,y)-\sum_{i=1}^{q-1}[Q_i(x,y)-g_i(x,y)]\right)\right\|_\infty+\|g_{\nu_q}^{(q+j_0)}-Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}\|_\infty<4^{-3q}.$$

Ясно, что (см. (3.9), (3.21))

$$\max_{M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}\le l<M_{\nu_q}^{(q+j_0)}}\left\|\sum_{k=M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}}^{l}\delta_{k,s}^{(\nu_q,q+j_0)}a_{k,s}^{(\nu_q,q+j_0)}W_k(x)W_s(y)\right\|_\infty<2^{-q}, \tag{3.25}$$

Из (3.8), (3.12), (3.17)-(3.19) следует

$$\|g_q(x,y)\|_\infty\le\left\|f_{\nu_q}(x,y)-\left(f_{k_q}(x,y)-\sum_{i=1}^{q-1}[Q_i(x,y)-g_i(x,y)]\right)\right\|_\infty+$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{q-1}[(Q_j(x,y))-g_j(x,y)]\right\|_\infty+\|g_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x,y)\|_\infty<$$

$$<4^{-3q-3}+4^{-3q+3}+4^{q+j_0}\|f_{\nu_q}(x)\|_\infty<2^{-q+8}. \tag{3.26}$$

Ясно, что по индукции можно определить последовательности множеств $\{E_q\}_{q=1}^\infty$, функций $\{g_q(x,y)\}_{q=1}^\infty$ $(g_1(x,y)=f_{k_1}(x,y))$ и полиномов $\{Q_q(x,y\}$, удовлетворяющих условиям (3.23)-(3.26) для всех $q\ge1$. Положим

$$E=\bigcap_{q=1}^\infty E_q\ . \tag{3.27}$$

Из (3.6), (3.22) и (3.27) вытекает

$$|E|>1-\delta.$$

В силу (3.14) имеем

$$\left\|\sum_{q=1}^\infty g_q\right\|_\infty\le\sum_{q=1}^\infty\|g_q\|_\infty<\infty. \tag{3.28}$$

Определим функцию $g(x,y)$, числа $\{\delta_{k,s}\}$ следующим образом:

$$g(x,y)=\sum_{q=1}^\infty g_q(x,y), \tag{3.29}$$

(3.30)

$$\delta_{k,s}=\begin{cases}\delta_{k,s}^{(\nu_q,q+j_0)},\ (k,s)\in[N_{\nu_q}^{(q+j_0-1)},N_{\nu_q}^{(q+j_0)})\times[M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)},M_{\nu_q}^{(q+j_0)}),\ q=1,2,\dots,\\ 0,\quad (k,s)\notin\bigcup_{q=1}^\infty[N_{\nu_q}^{(q+j_0-1)},N_{\nu_q}^{(q+j_0)})\times[M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)},M_{\nu_q}^{(q+j_0)})\end{cases}.$$

Из (3.14), (3.23), (3.28) и (3.29) имеем

$$g(x,y)\in L^\infty[0,1)^2,\ g(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in E.$$

Покажем, что сферические частичные суммы двойного ряда

$$\sum_{k,s=0}^\infty\delta_{k,s}c_{k,s}(U)\ W_k(x)W_s(y).$$

сходятся к $g(x,y)$ равномерно на $[0,1)^2$ по сферам. В силу (3.21), (3.26),(3.29) и (3.30) для всех $R \in [R_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}, R_{\nu_q}^{(q+j_0)})$, где $R_{\nu_q}^{(j)} = \sqrt{(N_{\nu_q}^{(j)})^2 + (M_{\nu_n}^{(q)})^2}$, будем иметь

$$\left\| \sum_{k^2+s^2 \le R^2} \delta_{k,s} c_{k,s}(U) W_k(x) W_s(y) - g(x,y) \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=q}^{\infty} \|g_j(x,y)\| + \left\| \sum_{j=1}^{q-1} [Q_j(x,y) - g_j(x,y)] \right\| +$$

$$+ \max_{(R_{\nu_q}^{(q+j_0-1)})^2 \le R^2 \le (R_{\nu_q}^{(q+j_0)})^2} \left\| \sum_{(R_{\nu_q}^{(q+j_0-1)})^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \delta_{k,s}^{(\nu_q, q+j_0)} c_{k,s}^{(\nu_q, q+j_0)} W_k(x) W_s(y) \right\| <$$

$$< 2^{-q-1}.$$

Отсюда следует

$$\delta_{k,s} c_{k,s}(U) = c_{k,s}(g)), .k, s = 0, 1, 2, ..$$

Следовательно, ряд Фурье функции $g(x,y)$ по двойной системе Уолша сходится к ней равномерно на $[0,1)^2$ по сферам. Из (3.3) и (3.30) вытекает $|c_{k,s}(g)| = c_{k,s}(U), (k,s) \in spec(g)$. Теорема 2.2 доказана.

Список литературы

[1] Б. Голубов, А. Ефимов, В. Скворцов, Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения, М., Изд-во URSS/ЛКИ, 346 стр. (2008).

[2] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., Изд-во Наука, 480 стр. (1974).

[3] C. Watari, "Mean convergence of Fourier- Walsh series", Tohoku Math. J, **16**, no. 2, 183 – 188 (1964).

[4] M. G. Grigoryan, "On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series", Banach Journal of Math. Analysis, **11**, no. 3, 698 – 712 (2017).

[5] M. G. Grigorian, "Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system", Studia. Math., **198**, no. 2, 197 – 206 (2010).

[6] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сб., **28**, no. 2, 266 – 294 (1912).

[7] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сб., **53**, no. 2, 67 – 96 (1942).

[8] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, "On the universal function for the class $L^p[0,1], p \in (0,1)$", Journal of Func. Anal., **270**, no. 8, 3111 – 3133 (2016).

[9] M. G. Grigoryan , L. N. Galoyan, "On the universal functions", Journal of Approximation Theory, **225**, 191 – 208 (2018).

[10] М.Г. Григорян, "Об универсальных рядах Фурье", Матем. Заметки, **108**, no. 2, 296 – 299 (2020).

[11] М. Г. Григорян, "Функции с универсальными рядами Фурье- Уолша", Матем. Сб., **211**, no. 6, 107 – 131 (2020).

[12] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, "Функции, универсальные относительно тригонометрической системы", Изв. РАН, Сер. матем., **85**, no. 2, 73 – 94 (2021).

[13] A. H. Kolmogorov , "Sur les fonctions harmoniques conjugee set les series de Fourier", FM, **7**, 23 – 28 (1925).
[14] M. Riss, "Sur les fonctionsconjugees", Math. Zeit., **27**, 214 – 244 (1927).
[15] L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math., **116**, 135 – 157 (1966).
[16] C. Fefferman, "The multiple problem for the ball", Ann. Math., **94**, no. 2, 330 – 336 (1971).
[17] D. C. Harris, "Almost everywhere divergence of multiple Walsh-Fourier series", Amer. math. soc., **101**, no. 4 (1987).
[18] М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике сферических частичных сумм двойных рядов Фурье", Матем.заметки, **203**, N 3, 49 – 78 (2012).
[19] Р. Д. Гецадзе, "Непрерывная функция с расходящимся почти всюду кратным рядом Фурье по системе Уолша-Пелли", Матем. сб., **128**(170), 2(10), 269 – 286 (1985).

Поступила 18 декабря 2022

После доработки 21 марта 2023

Принята к публикации 05 апреля 2023