СРАВНЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ С ВЕСОМ ОПЕРАТОРЫ

М. А. ХАЧАТУРЯН, В. Н. МАРГАРЯН

Российско-Армянский университет

E-mails: *khmikayel@gmail.com*, *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. В работе на языке кратности нулей подмногочленов найдены достаточные условия, при которых многочлен от двух переменных является гиперболическим с данным весом, когда его главная часть гиперболическа по Гордигу.

MSC2020 number: 12E10; 12D05; 26D05; 35A23.

Ключевые слова: характеристический многогранник (многогранник Ньютона); вес гиперболичности; гиперболические с весом многочлены (операторы).

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N - множество натуральных чисел, $N_0 := N \cup \{0\}$, N_0^n - n -мерное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in N_0$, $j = 1, \dots, n$, $R^n(E^n)$ - n -мерное вещественное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$), $\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел, $R_+^n := \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ и $R_0^n := \{\xi \in R^n, \xi_1 \cdots \xi_n \neq 0\}$. Для $\xi, \eta \in R^n(E^n)$, $\nu \in R_+^n$, $\alpha \in N_0^n$ и $t > 0$ обозначим $|\xi| := (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$, $(\xi, \eta) := \xi_1 \cdot \eta_1 + \dots + \xi_n \cdot \eta_n$, $|\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_n$, $|\xi^\nu| := |\xi_1|^{\nu_1} \cdots |\xi_n|^{\nu_n}$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, $t \cdot \xi = (t\xi_1, \dots, t\xi_n)$ и $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, где либо $D_j := \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ либо $D_j := i^{-1} \frac{\partial}{\partial_j}$ ($i^2 = -1$) $j = 1, \dots, n$.

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \xi^{\alpha}$ многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору $(P) := \{\alpha \in N_0^n, a_{\alpha} \neq 0\}$. Обозначим $m = m(P) := \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$ и представим многочлен в виде суммы однородных многочленов

$$(1.1) \quad P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_j(\xi) := \sum_{j=0}^m \left(\sum_{\alpha \in (P), |\alpha|=j} a_{\alpha} \xi^{\alpha} \right), \quad \xi \in R^n.$$

Определение 1.1. (см. [1] или [2] определение 12.3.3). Многочлен P представленной в виде (1.1) называется гиперболическим по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in R^n$, если $P_m(\tau) \neq 0$ и существует число $t_0 > 0$, для которого $P(\xi + it\tau) \neq 0$ при $\xi \in R^n$, $t \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} t| \geq t_0$.

Определение 1.2. (см [3] или [4]) Функция g , определенная на R^n , называется весом гиперболичности, если 1) $\inf_{\xi \in R^n} g(\xi) > 0$, 2) существуют числа $a \in [0, 1)$ и $c > 0$, для которых $g(\xi + \eta) \leq g(\xi)[1 + |\eta|^a]$, $\xi, \eta \in R^n$.

Определение 1.3. (см [3] или [4]). Пусть функция g является весом гиперболичности. Скажем, что многочлен P , представленный в виде (1.1), является g -гиперболическим относительно вектора $0 \neq \tau \in R^n$, если 1) $P_m(\tau) \neq 0$ и 2) существует постоянная $c > 0$, для которого $P(\xi + it\tau) \neq 0$ при $\xi \in R^n$, $t \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} t| \geq c \cdot g(\xi)$.

Если с некоторыми постоянными $\kappa \geq 1$ и $r \in (0, 1)$

$$\kappa^{-1}(1 + |\xi|^r) \leq g(\xi) \leq \kappa(1 + |\xi|^r) \quad \xi \in R^n,$$

то g -гиперболический многочлен называется $1/r$ -гиперболическим (см. [5]).

Для однородного многочлена R обозначим $\Sigma(R) := \{\xi \in R^n, |\xi| = 1, R(\xi) = 0\}$, $l(\eta) = l_R(\eta)$ ($\eta \in R^n$) - кратность нуля многочлена R в точке η , т.е. $l(\eta) = 0$ при $R(\eta) \neq 0$ и $l(\eta) = r$, при $R(\eta) = 0$, где натуральное число r определяется из условий

$$\sum_{|\alpha| < r} |R^{(\alpha)}(\eta)| := \sum_{|\alpha| < r} |(D^\alpha R)(\eta)| = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{|\alpha| = r} |R^{(\alpha)}(\eta)| \neq 0.$$

Для конечного набора $A := \{\nu^j\} \subset R_+^n$, через $\mathfrak{N}(A)$ обозначим выпуклую оболочку множества $A \cup \{0\}$, называемый характеристическим многогранником (х.м.) или многогранником Ньютона набора A . Многогранник $\mathfrak{N} \subset R_+^n$ называется вполне правильным (в.п.), если 1) $\mathfrak{N}$ имеет вершину в начале координат, 2) отличные от начала координат вершины на каждой оси координат и 3) компоненты внешних (относительно $\mathfrak{N}$) нормалей ($\mathfrak{N}$ -нормалей) $(n-1)$ -мерных не координатных граней положительны. Для в.п. многогранника $\mathfrak{N} \subset R_+^n$ и точки $0 \neq \eta \in R^n$ обозначим: $\mathfrak{N}^0$ - множество вершин $\mathfrak{N}$, $\Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$ - множество тех $\mathfrak{N}$ -нормалей $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $(n-1)$ -мерных не координатных граней, для которых $\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1$, $d_{\mathfrak{N}}(\lambda) := \max_{\nu \in \mathfrak{N}} (\lambda, \nu)$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N})$, $\rho_{\mathfrak{N}} := \max_{\nu \in \mathfrak{N}^0} |\nu|$, $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) := \max\{\nu \in \mathfrak{N}^0, \nu_j = 0 \text{ при } \eta_j = 0, 1 \leq j \leq n\}$ и положим $h_{\mathfrak{N}}(\xi) := \sum_{\nu \in \mathfrak{N}^0} |\xi^\nu|$, $\xi \in R^n$.

Известно, I) (см. [6] или [2] теорему 12.4.6) что если, для многочлена P представленный в виде (1.1), P_m гиперболичесен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in R^n$, то для гиперболичности по Гордингу многочлена P относительно τ необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $c > 0$ выполнялись следующие оценки $\widetilde{P_j}(\xi) := \sum_{\alpha} |P_j^{(\alpha)}(\xi)| \leq c \widetilde{P_m}(\xi)$, $\xi \in R^n$, $j = 0, \dots, m-1$,

II) (см. [1] или [2] теорему 12.5.4) Если оператор $P(D)$ (многочлен P) гиперболичесен по Гордингу относительно τ , то задача Коши для оператора $P(D)$ однозначно разрешима в $C^\infty(\Omega(\tau))$, где $\Omega(\tau) := \{x \in E^n, (x, \tau) > 0\}$,

III) (см. [5]) Если оператор $P(D)$ r -гиперболичесен, то задача Коши для оператора P поставлена корректно в изотропных пространствах типа Жевре $G^{r_1}(\Omega(\tau))$, при $1 \leq r_1 < r$,

IV) (см. [3] и [4]) Если оператор $P(D)$ $h_{\mathfrak{M}}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ -гиперболичесен относительно вектора $\tau = (0, \dots, 0, 1)$, где $\mathfrak{M} \subset R_+^{n-1}$ в.п. многогранник для которого $\max_{\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{M})} d_{\mathfrak{M}}(\lambda) < 1$, то задача Коши для оператора $P(D)$ поставлена корректно в мультианизотропных пространствах типа Жевре $G^{\mathfrak{M}}(\Omega(\tau))$, где $\mathfrak{M} \in R_+^n$ в.п. многогранник удовлетворяющий некоторым условиям, определяемые многогранником $\mathfrak{M}$.

Наша цель в настоящей заметке на языке кратности нулей подмногочленов P_j $j = 0, 1, \dots, m-1$ найти условия, при которых многочлен P , представленный в виде (1.1), будет g -гиперболическим относительно вектора τ , когда P_m гиперболичесен по Гордингу относительно τ .

2. СРАВНЕНИЕ С ВЕСОМ МНОГОЧЛЕНОВ

Определение 2.1. (см. [2] определение 10.1.1). Функция $g : R^n \rightarrow R_+^1$ называется медленно растущей, если $\inf_{\xi \in R^n} g(\xi) > 0$ и с некоторыми постоянными $c, a > 0$ $g(\xi + \eta) \leq c \cdot g(\xi)(1 + |\eta|)^a$, $\xi, \eta \in R^n$.

Для любого многочлена P и в.п. многогранника $\mathfrak{N} \subset R_+^n$ функции $\tilde{P}(\xi)$ и $h_{\mathfrak{N}}(\xi)$ являются медленно растущими весовыми функциями.

Определение 2.2. (см. например [7]). Медленно растущая весовая функция g называется медленно меняющийся, если для любого $\kappa > 0$ существует число $c = c(\kappa) > 0$, для которого $g(\xi + \eta) \leq c \cdot g(\xi)$, $\xi, \eta \in R^n$, $|\eta| \leq \kappa \cdot g(\xi)$.

Для любого $r \geq 0$ и $\lambda \in R_+^n$ функции $1 + |\xi|^r$, $1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{\lambda_j}$ являются медленно меняющимися весовыми функциями. Из [8] следует, что функция $h_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N} \in R_+^n$ в.п. многогранник, является медленно меняющийся если $\text{card} \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N}) = 1$.

Определение 2.3. (см. например [9]). Говорят, что многочлен P мощнее многочлена Q и записывают $Q < P$, если с некоторой постоянной $c > 0$

$$(2.1) \quad |Q(\xi)| \leq c \cdot (1 + |P(\xi)|) \quad \xi \in R^n.$$

Определение 2.4. Пусть g медленно растущая весовая функция. Скажем, что многочлен P g -сильнее многочлена Q и запишем $Q \prec^g P$, если с некоторой постоянной $c > 0$

$$(2.2) \quad \tilde{Q}(\xi, g(\xi)) \leq c \tilde{P}(\xi, g(\xi)), \quad \xi \in R^n,$$

где для данного многочлена R

$$\tilde{R}(\xi, t) := \sum_{\alpha} |R^{(\alpha)}(\xi)| t^{|\alpha|}, \quad \xi \in R^n, \quad t > 0.$$

Предложение 2.1. Если $Q < P$, то для любой медленно растущей весовой функции g $Q \prec^g P$.

Доказательство. Непосредственно следует из оценки 10.4.1 работы [2] с применением формулы Тейлора.

На примере покажем, что обратное утверждение не верно.

Пример 2.1 Пусть $n = 2$, $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^6$, $Q(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$ и $g(\xi) = (1 + |\xi|)^{3/4}$. Так как $P(s+1, s) = 1$, $Q(s+1, s) = (2s+1)^2$, $s = 1, 2, \dots$, то $Q \not< P$.

С другой стороны имеем, что $\tilde{P}(\xi, g(\xi)) \geq 6! \cdot g^6(\xi) \geq 6!(1 + |\xi|)^{4.5}$ $\xi \in R^n$ и $\tilde{Q}(\xi, g(\xi)) \leq c(1 + |\xi|)^4$, $\xi \in R^2$ с некоторой постоянной $c > 0$. Следовательно $Q \prec^g P$.

Лемма 2.1. Пусть g - медленно меняющийся весовая функция а P и Q некоторые многочлены. Для того, чтобы $Q \prec^g P$ необходимо и достаточно, чтобы существовало постоянная $c > 0$, для которого

$$(2.3) \quad |Q(\xi)| \leq c \tilde{P}(\xi, g(\xi)), \quad \xi \in R^n.$$

Доказательство. Выполнение оценки (2.3) при $Q \prec^g P$ очевидно. Докажем обратное. Из оценки (2.3) в силу оценки 10.4.1 работы [2] с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ имеем

$$\tilde{Q}(\xi, g(\xi)) \leq c_1 \sup_{|\eta| \leq g(\xi)} |Q(\xi + \eta)| \leq$$

$$\leq c_2 \sup_{|\eta| \leq g(\xi)} \sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi + \eta)| g^{|\alpha|}(\xi) \quad \xi, \eta \in R^n.$$

Т.к. g - медленно меняющийся весовой функция, то с применением формулы Тейлора с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ отсюда получаем

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\xi, g(\xi)) &\leq c_3 \sup_{|\eta| \leq g(\xi)} \sum_{\alpha} \left[\sum_{\beta} \frac{|P^{(\alpha+\beta)}(\xi)| \cdot |\eta^{\beta}|}{\beta!} \right] g^{|\alpha|}(\xi) \leq \\ &\leq c_4 \sum_{\gamma} |P^{(\gamma)}(\xi)| g^{|\gamma|}(\xi) \quad \xi \in R^n. \end{aligned}$$

Лемма доказано. $\square$

На примере покажем, что если g не является медленно меняющийся весовой функцией, то из оценки (2.3) не следует, что $Q \prec^g P$.

Пример 2.2. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = \xi_1^8(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, $Q(\xi) = \xi_1^2 \cdot (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2$ и $g(\xi) = 1 + |\xi_1|^{\frac{2}{7}} + |\xi_2|^{\frac{2}{7}} + |\xi_1|^{\frac{1}{4}} \cdot |\xi_2|^{\frac{1}{4}} =: h_{\mathfrak{N}}(\xi)$, где $\mathfrak{N} \subset R_+^2$ в.п. многогранник с вершинами $(0, 0)$, $(2/7, 0)$, $(0, 2/7)$ и $(1/4, 1/4)$ (В силу вышесказанного, т.к. $\text{card } \Lambda^1(\mathfrak{N}) = 2 > 1$, функция g не является медленно меняющейся весовой функцией). Сначала покажем, что $Q \not\prec^g P$. Пусть $\xi^s = (1, s)$ $s = 1, 2, \dots$. Легко заметить, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ $\tilde{P}(\xi^s, g(\xi^s)) \leq c_1 \cdot s^2 g^8(\xi^s)$ $s = 1, 2, \dots$. Так как $g(\xi^s) \leq 4 \cdot s^{2/7}$, $s = 1, 2, \dots$, то отсюда получаем, что $\tilde{P}(\xi^s, g(\xi^s)) \leq 4^8 \cdot c_1 \cdot s^{30/7}$, $s = 1, 2, \dots$. С другой стороны, учитывая что $g(\xi^s) \geq s^{2/7}$, $s = 1, 2, \dots$, то $\tilde{Q}(\xi^s, g(\xi^s)) \geq |(D_1^2 Q)(\xi^s)| g^2(\xi^s) \geq s^{32/7}$, $s = 1, 2, \dots$. Следовательно $Q \not\prec^g P$. Покажем, что с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$(2.4) \quad |Q(\xi)| \leq c_2 \cdot \tilde{P}(\xi, g(\xi)) \quad \xi \in R^2.$$

Т.к. $\tilde{P}(\xi, g(\xi)) \geq |P(\xi)| + |(D_1^8 P)(\xi)| g^8(s) \geq \xi_1^8 |\xi|^2 + |\xi|^2 g^8(\xi) \geq \frac{1}{3} |\xi|^2 (\xi_1^8 + \xi_1^2 \xi_2^2 + |\xi|^{16/7})$ $\xi \in R^2$, то достаточно показать, что с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$(2.4') \quad |Q(\xi)| \leq c_3 |\xi|^2 (\xi_1^8 + \xi_1^2 \cdot \xi_2^2) \quad \xi \in R^2, \quad |\xi| \geq 2.$$

Так как выполнение оценки (2.4') очевидно при $|\xi_1| \geq |\xi|^{1/3}$ (тогда $|Q(\xi)| \leq |\xi|^2 \cdot \xi_1^8$) с постоянной $c_3 \geq 1$, то докажем его при $|\xi_1| \leq |\xi|^{1/3}$, $|\xi| \geq 2$. Так как тогда $|\xi_2| \geq \frac{1}{4} |\xi|$, то $|\xi|^2 \cdot \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 \geq \frac{1}{16} |\xi|^4 \cdot \xi_1^2 = \frac{1}{16} Q(\xi)$. Следовательно оценка (2.4') выполняется с постоянной $c_3 \geq 16$ и поэтому верна и оценка (2.4).

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^n$ в.п. многогранник для которого $d_{\mathfrak{N}} < 1$, P_m и P_k ($k \leq m$) однородные многочлены порядка m и k соответственно. Если $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$, то для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq$

$l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, где $l_m(\eta)$, $l_k(\eta)$ порядки нулей многочленов P_m , P_k в точке η и число $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)$ по $\mathfrak{N}$ и η определено в предыдущем параграфе.

Доказательство. Пусть $\eta \in \Sigma(P_m)$, для которого $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$. Из определения числа $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)$ следует существование числа $c_1 \geq 1$ для которого при всех $t \geq 1$

$$c_1 t^{\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)} \geq h_{\mathfrak{N}}(t \cdot \eta) \geq c_1^{-1} t^{\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)}.$$

Используя это, из условия $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$, в силу однородности многочленов P_m , P_k и определения чисел $l_m(\eta)$, $l_k(\eta)$ с некоторыми постоянными $c_2, c_3, c_4 > 0$ при $t \geq 1$ имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \geq l_k(\eta)} t^{k - |\alpha|(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_k^{(\alpha)}(\eta)| &= \sum_{\alpha} t^{k - |\alpha|(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_k^{(\alpha)}(\eta)| \leq \\ &\leq c_2 \sum_{\alpha} |P_k^{(\alpha)}(t \cdot \eta)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(t \cdot \eta) \leq c_3 \sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(t \cdot \eta)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(t \cdot \eta) \leq \\ &c_4 \sum_{\alpha} t^{m - |\alpha|(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_m^{(\alpha)}(\eta)| = c_4 \sum_{|\alpha| \geq l_m(\eta)} t^{m - |\alpha|(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_m^{(\alpha)}(\eta)|. \end{aligned}$$

Так как $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) \leq \rho_{\mathfrak{N}} < 1$, то отсюда с некоторой постоянной $c_5 > 0$ при $t \geq 1$ получаем

$$(2.5) \quad \sum_{|\alpha| \geq l_k(\eta)} t^{k - |\alpha|(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_k^{(\alpha)}(\eta)| \leq c_5 t^{m - l_m(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))}.$$

Из оценки (2.5) непосредственно следует, что $P_k^{(\alpha)}(\eta) = 0$ при тех $\alpha \in N_0^n$ для которых $k - |\alpha|(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta)) > m - l_m(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$. Так как при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ множество $\{\alpha \in N_0^n, |\alpha| < l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))\} \neq \emptyset$, то $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^n$ в.п. многогранник для которого $d_{\mathfrak{N}} < 1$ а P_m и Q_m однородные многочлены порядка m . Если $Q_m \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$, то $\Sigma(P_m) \subset \Sigma(Q_m)$ и $l_{P_m}(\eta) \leq l_{Q_m}(\eta) \forall \eta \in \Sigma(P_m)$.

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 2.2.

Следствие 2.2. Если при условиях леммы 2.2 $\eta \in R_0^n$, то при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$ $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$.

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 2.2, т.к. $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \rho_{\mathfrak{N}}$ для любого $\eta \in R_0^n$.

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^n$ в.п. многогранник, для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены порядка m и k ($m \geq k$) соответственно, для которых с некоторой постоянной $c > 0$

$$(2.6) \quad |P_k(\xi)| \leq c\tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}}(\xi)) \quad \xi \in R^n.$$

Тогда для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$ $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$.

Доказательство. Заметим, что утверждение леммы при $\text{card } \Lambda^{(n-1)}(\mathfrak{N}) = 1$ и $\eta \in R_0^n$ непосредственно следует из следствия и леммы 2.1. Докажем утверждение леммы в общем случае. Пусть $\eta \in \Sigma(P_m)$, $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$ а точка $\tau \in R_0^n$ выбрано так, чтобы

$$(2.7) \quad \sum_{|\alpha|=l_k(\eta)} \frac{P_k^{(\alpha)}(\eta)\tau^\alpha}{\alpha!} \neq 0, \quad \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} \frac{P_m^{(\alpha)}(\eta)\tau^\alpha}{\alpha!} \neq 0.$$

Существование такой точки $\tau \in R_0^n$ следует из определений чисел $l_k(\eta)$ и $l_m(\eta)$. Рассмотрим поведение $P_k(\xi)$ и $\tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}}(\xi))$ на последовательности $\xi(s) = s \cdot \eta + s^{\rho_{\mathfrak{N}}} \cdot \tau$, $s = 1, 2, \dots$ при $s \rightarrow \infty$. В силу однородности многочлена P_k , определения числа $l_k(\eta)$ и (2.7) с применением формулы Тейлора, так как $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$ при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} P_k(\xi(s)) &= \sum_{\alpha} \frac{P_k^{(\alpha)}(s\eta)(s^{\rho_{\mathfrak{N}}}\tau)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{\alpha} s^{k-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} \frac{P_k^{(\alpha)}(\eta)\tau^\alpha}{\alpha!} = \\ &= \sum_{|\alpha| \geq l_k(\eta)} s^{k-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} \frac{P_k^{(\alpha)}(\eta)\tau^\alpha}{\alpha!} = \\ &= s^{k-l_k(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}})} \cdot \left(\sum_{|\alpha|=l_k(\eta)} \frac{P_k^{(\alpha)}(\eta)\tau^\alpha}{\alpha!} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Для оценки поведения $\tilde{P}_m(\xi(s), h_{\mathfrak{N}}(\xi(s)))$ при $s \rightarrow \infty$ рассмотрим следующие возможные случаи 1) $\eta \in R_0^n$ и 2) $\eta \notin R_0^n$ (в этом случае не умаляя общности за счет перенумерации индексов будем считать, что $\eta_1 \cdots \eta_r \neq 0$ $\eta_{r+1} = \cdots = \eta_n = 0$, $1 \leq r < n$).

Рассмотрим случай 1). Так как, в силу определения $\rho_{\mathfrak{N}}$, существует $\nu^0 \in \mathfrak{N}^0$, для которого $|\nu^0| = \rho_{\mathfrak{N}}$ и для любого $\nu \in \mathfrak{N}^0$ при $s \rightarrow \infty$

$$|(\xi(s))^\nu| = |(s \cdot \eta)^\nu| (1 + o(1)) = s^{|\nu|} |\eta^\nu| (1 + o(1)),$$

то существует постоянная $c_1 \geq 1$, для которого при всех $s \geq 1$

$$c_1^{-1} s^{\rho_{\mathfrak{N}}} \leq h_{\mathfrak{N}}(\xi(s)) \leq c_1 s^{\rho_{\mathfrak{N}}}.$$

Используя эту оценку, в силу однородности многочлена P_m и определения числа $l_m(r)$, с некоторыми постоянными $c_2, c_3, c_4 > 0$ при достаточно больших s , с применением формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned} & \tilde{P}_m(\xi(s), h_{\mathfrak{N}}(\xi(s))) = \\ &= \sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\xi(s))| h_{\mathfrak{N}}^{(\alpha)}(\xi(s)) \leq c_2 \sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\xi(s))| s^{|\alpha| \rho_{\mathfrak{N}}} \leq \\ & \leq c_2 \sum_{\alpha} \left[\sum_{\beta} \left| \frac{P_m^{(\alpha+\beta)}(s \cdot \eta)(s^{\rho_{\mathfrak{N}}} \tau)}{\beta!} \right| \right] s^{|\alpha| \rho_{\mathfrak{N}}} \leq \\ & \leq c_3 \sum_{\alpha} \sum_{\beta} s^{m-|\alpha+\beta|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_m^{(\alpha+\beta)}(\eta)| \leq \\ & c_4 \sum_{\gamma} s^{m-|\gamma|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_m^{(\gamma)}(\eta)| = c_4 \sum_{|\gamma| \geq l_m(\eta)} s^{m-|\gamma|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_m^{(\gamma)}(\eta)|. \end{aligned}$$

Так как $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, то отсюда в силу определения числа $l_m(\eta)$, с некоторой постоянной $c_5 > 0$ при достаточно больших s получаем, что

$$(2.9) \quad \tilde{P}_m(\xi(s), h_{\mathfrak{N}}(\xi(s))) \leq c_5 s^{m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}})}.$$

Из оценок (2.8) и (2.9) в силу (2.6) получаем, что $k - l_k(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}}) \leq m - l_m(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$. Отсюда при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$ следует, что $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}) > 0$. Следовательно $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$. Этим утверждение леммы в случае 1) доказано.

В случае 2) обозначим $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_r)$, $\xi'' := (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$. Тогда для любого $\nu \in \mathfrak{N}^0$ при $s \rightarrow \infty$

$$|(\xi(s))^{\nu}| = |(\xi'(s))^{\nu'}| \cdot |(\xi''(s))^{\nu''}| = s^{|\nu'|} |\eta^{\nu'}| \cdot s^{|\nu''| \rho_{\mathfrak{N}}} |(\tau'')^{\nu''}| \cdot (1 + o(1)).$$

Так как $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, то из условия в.п. многогранника $\mathfrak{N}$ следует (в случае 2)), что для любого $\nu \in \mathfrak{N}^0$ $|\nu'| + \rho_{\mathfrak{N}} |\nu''| < \rho_{\mathfrak{N}}$. Отсюда получаем, что при $s \rightarrow \infty$

$$(2.10) \quad h_{\mathfrak{N}}(\xi(s)) = o(1) \cdot s^{\rho_{\mathfrak{N}}}.$$

Так как $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, то в силу (2.7), определения числа $l_m(\eta)$ и однородности многогранника P_m с применением формулы Тейлора для $P_m(\xi(s))$ при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$|P_m(\xi(s))| = \left| \sum_{\alpha} \frac{P_m^{(\alpha)}(s\eta)(s^{\rho_{\mathfrak{N}}} \tau)^{\alpha}}{\alpha!} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \sum_{\alpha} s^{m-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} \frac{P_m^{(\alpha)}(\eta)\tau^{\alpha}}{\alpha!} \right| = \left| \sum_{|\alpha| \geq l_m(\eta)} s^{m-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} \frac{P_m^{(\alpha)}(\eta)\tau^{\alpha}}{\alpha!} \right| = \\
 (2.11) \quad &= s^{m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}})} \left| \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} \frac{P_m^{(\alpha)}(\eta)\tau^{\alpha}}{\alpha!} \right| (1+o(1)).
 \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом в силу (2.10) при $s \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha \neq 0} |P_m^{(\alpha)}(\xi(s))| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi(s)) &= o(1) \sum_{\alpha \neq 0} s^{|\alpha|\rho_{\mathfrak{N}}} |P_m^{(\alpha)}(\xi(s))| \leq \\
 &\leq o(1) \cdot \sum_{\alpha \neq 0} s^{|\alpha|\rho_{\mathfrak{N}}} \sum_{\beta} \left| \frac{P_m^{(\alpha+\beta)}(s\eta) \cdot (s^{\rho_{\mathfrak{N}}}\tau)^{\beta}}{\beta!} \right| \leq \\
 o(1) \cdot \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta} s^{m-|\alpha+\beta|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_m^{(\alpha+\beta)}(\eta)| &= o(1) \cdot \sum_{\gamma \neq 0} s^{m-|\gamma|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_m^{(\gamma)}(\eta)| \leq \\
 &\leq o(1) \cdot \sum_{\gamma \geq l_m(\eta)} s^{m-|\gamma|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_m^{(\gamma)}(\eta)| \leq o(1) \cdot s^{m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}})}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (2.11) с некоторой постоянной $c_6 > 0$ при достаточно больших s получаем, что

$$(2.12) \quad \tilde{P}_m(\xi(s), h_{\mathfrak{N}}(\xi(s))) \geq c_6 s^{m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}})}.$$

Из оценок (2.8) и (2.12) в силу (2.6) получаем, что $k - l_k(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}}) \geq m - l_m(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$. Отсюда при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$ следует, что $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$. Этим утверждение леммы в случае 2), тем самым полностью, доказана. $\square$

Следствие 2.3. Пусть при условиях леммы 2.3 $\text{card } \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N}) = 1$ и $\eta \in \Sigma(P_m)$. Если $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, то $\eta \in \Sigma(P_k)$ и $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$.

Доказательство. Так как при

$$\text{card } \Lambda^{n-1}(\mathfrak{N}) = 1$$

функция $h_{\mathfrak{N}}$ является медленно меняющейся весовой функцией, то в силу леммы 2.1 из оценки (2.3) следует, что $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$. Тогда в силу леммы 2.2 получаем утверждение следствия 2.3.

Лемма 2.4. Пусть $k \geq l \geq 0$, $0 \leq j \leq l$. Тогда при всех $x, y, z \geq 0$ $x^{k-j}y^{l-j}z^j \leq x^k y^l + x^{k-l}z^l$.

Лемма 2.5. Пусть $m \geq k \geq 0$, $\delta \in (0, 1)$, $m \geq l_0 \geq (m - k)/(1 - \delta)$ и $k \geq l_1 \geq l_0 - (m - k)/(1 - \delta)$. Тогда для любого $\kappa \geq 1$ существует постоянная $c > 0$, для которого при всех $x \geq 1$, $y \in [0, 1]$ и $z \in [\kappa^{-1}x, \kappa x]$

$$(2.13) \quad x^k y^{l_1} + x^{k_1 - l_1} z^{l_1} \leq c(x^m y^{l_0} + x^{m - l_0} z^{l_0}).$$

Доказательство. Рассмотрим следующие возможные случаи I) $k = m$ и II) $k < m$. Так как в случае I) из условия леммы следует, что $l_1 \geq l_0$, то в случае I) возможны следующие под-случаи I.1) $l_1 = l_0$, $k = m$ и I.2) $l_1 > l_0$, $k = m$. В под-случае I.1) выполнение оценки с постоянной $c \geq 1$ очевидно. В случае I.2), при условиях леммы, для любых $x \geq 1$, $y \in [0, 1]$ и $z \in [\kappa^{-1}x^\delta, \kappa x]$ имеем

$$\begin{aligned} x^k y^{l_1} + x^{k - l_1} z^{l_1} &= x^m y^{l_1} + x^{m - l_1} z^{l_1} \leq x^m y^{l_0} + (x^{m - l_1} z^{l_1 - l_0}) z^{l_0} \leq \\ &\leq x^m y^{l_0} + \kappa^{l_1 - l_0} x^{m - l_0} z^{l_0}, \end{aligned}$$

откуда следует оценка (2.13) с постоянной $c \geq \kappa^{l_1 - l_0}$.

Рассмотрим случай II). Так как

$$x^{m - l_0} z^{l_0} \geq \kappa^{-l_0} x^{m - l_0(1 - \delta)} \text{ при } x \geq 1, z \geq \kappa^{-1} x^\delta,$$

то при условиях леммы, с применением неравенства Гелдера при $p = l_0/[l_0 - (m - k)/(1 - \delta)] (> 1)$, $q = p/(p - 1) = (1 - \delta)l_0/(m - k)$, для первого слагаемого левого части оценки (2.13) при всех $x \geq 1$, $y \in [0, 1]$, $z \in [\kappa^{-1}x^\delta, \kappa x]$ имеем

$$\begin{aligned} x^k y^{l_1} &\leq x^k \cdot y^{l_0 - (m - k)/(1 - \delta)} = (x^m y^{l_0})^{[l_0 - (m - k)/(1 - \delta)]/l_0} \times \\ &\times (x^{m - k})^{[m/(1 - \delta)l_0 - 1]} \leq \frac{l_0 - (m - k)/(1 - \delta)}{l_0} x^m y^{l_0} + \\ (2.14) \quad &+ \frac{m - k}{(1 - \delta)l_0} x^{m - (1 - \delta)l_0} \leq x^m y^{l_0} + \kappa^{l_0} m^{m - l_0} z^{l_0}. \end{aligned}$$

Для оценки второго слагаемого левой части оценки (2.13) в случае II) рассмотрим следующие возможные под-случаи II.1) $l_0 \leq l_1$ и II.2) $l_0 > l_1$. В под-случае II.1) при условиях леммы при всех $x \geq 1$, $z \in [\kappa^{-1}x^\delta, \kappa x]$ имеем, что

$$\begin{aligned} x^{k - l_1} z^{l_1} &= (x^{k - l_1} z^{l_1 - l_0}) z^{l_0} \leq \kappa^{l_1 - l_0} x^{k - l_0} z^{l_0} \leq \\ (2.15) \quad &\leq \kappa^{l_1 - l_0} x^{m - l_0} z^{l_0}. \end{aligned}$$

В под-случае II.2), с применением неравенства Гелдера когда $p = l_0/l_1 (> 1)$, $q = p/(p - 1) = l_0/(l_0 - l_1)$ при условиях леммы для всех $x \geq 1$, $y \in [0, 1]$ и $z \in [\kappa^{-1}x^\delta, \kappa x]$ имеем, что

$$x^{k - l_1} z^{l_1} = (x^{m - l_0} z^{l_0})^{l_1/l_0} x^{k - l_1 m/l_0} \leq \frac{l_1}{l_0} x^{m - l_0} z^{l_0} + \frac{l_0 - l_1}{l_0} x^{(k - l_1 m/l_0)l_0/(l_0 - l_1)}.$$

Так как из условия $l_1 \geq l_0 - (m - k)/(1 - \delta) > 0$ леммы следует, что $(kl_0 - l_1 m)/(l_0 - l_1) \leq m - (1 - \delta)l_0$, следовательно при $x \geq 1$, $z \in [\kappa^{-1}x, \kappa x]$ $x^{m-l_0(1-\delta)} \leq \kappa^{l_0} x^{m-l_0} z^{l_0}$, то отсюда получаем, что при всех $x \geq 1$, $y \in [0, 1]$ и $z \in [\kappa^{-1}x^\delta, \kappa x]$ $x^{k-l_1} z^{l_1} \leq 2\kappa^{l_0} x^{m-l_0} z^{l_0}$.

Из оценок (2.14) и (2.15) в под-случае II.1) и оценок (2.14) и (2.7) в под-случае II.2) получаем оценку (2.13) с постоянной $c \geq 3 \cdot \max\{\kappa^{l_1}, \kappa^{l_0}\}$. Этим оценка (2.13) в случае II) и тем самым в общем случае доказана. Лемма 2.6 доказана. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 3.1. Пусть R -однородный многочлен порядка m от двух переменных, $l = l(\eta)$ ($\eta \in R^2$, $|\eta| = 1$) порядок нуля многочлена R в точке η и $\tau \in R^2$, $|\tau| = 1$, $(\tau, \eta) = 0$. Тогда $D_\tau^l R(\eta) \neq 0$ и при $(t, u) \rightarrow (+\infty, 0)$

$$R(t(\eta + u\tau)) = \frac{1}{l!} \cdot t^m u^l (D_\tau^l R(\eta)) \cdot (1 + o(1)),$$

где D_τ производная по направлению вектора τ .

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^2$ в.п. многогранник для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены от двух переменных порядка m и k ($m \geq k$) соответственно. Если для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, то $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$.

Доказательство. Предположим противное, что при условиях теоремы существует последовательность $\{\xi^s\} \subset R^2$ для которого при $s \rightarrow \infty$

$$(3.1) \quad \tilde{P}_k(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s))/\tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) \rightarrow \infty.$$

Так как по определению $h_{\mathfrak{N}}$ $h_{\mathfrak{N}}(\xi) \geq 1 \forall \xi \in R^2$ ($0 \in \mathfrak{N}^0$), то с некоторой постоянной $c_1 > 0$ $\tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) \geq c_1 h_{\mathfrak{N}}^m(\xi^s) \geq c_1$, $s = 1, 2, \dots$. Следовательно при выполнении соотношения (3.1) $|\xi^s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. За счет перехода на подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ можно считать, что $|\xi^s| \geq 1$, $s = 1, 2, \dots$ и существует $\eta \in R^2$, $|\eta| = 1$ для которого при $s \rightarrow \infty$ $\eta^s := \xi^s/|\xi^s| \rightarrow \eta$. Рассмотрим следующие возможные случаи 1) $\eta \notin \Sigma(P_m)$, 2) $\eta \in \Sigma(P_m)$, $l_m(\eta) \leq (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ и 3) $\eta \in \Sigma(P_m)$, $l_m(\eta) > (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ (в этом случае из условий теоремы имеем, что $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$). В случае 1) в силу однородности многочленов P_m , P_k и условия $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$ теоремы с некоторым постоянными $c_1, c_2 > 0$ при достаточно больших s имеем

$$(3.2) \quad \tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) \geq |P_m(\xi^s)| = |\xi^s|^m |P_m(\eta^s)| \geq \frac{1}{2} |\xi^s|^m |P_m(\eta)|,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_k(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) &= \sum_{\alpha} |P_k^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) \leq c_1 \sum_{\alpha} |P_k^{(\alpha)}(\xi^s)| \cdot |\xi^s|^{|\alpha|\rho_{\mathfrak{N}}} = \\
 (3.3) \quad &= c_1 \sum_{\alpha} |\xi^s|^{k-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}})} |P_k(\eta^s)| \leq c_2 |\xi^s|^k.
 \end{aligned}$$

Т.к. $m \geq k$ то оценки (3.2) и (3.3) противоречат соотношению (3.1). Рассмотрим случай 2). Тогда при достаточно больших s , в силу определения числа $l_m(\eta)$, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) &\geq \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} |P_m^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) = \\
 &= |\xi^s|^{m-l_m(\eta)} \cdot h_{\mathfrak{N}}^{l_m(\eta)}(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} |P_m^{(\alpha)}(\eta^s)| \geq \\
 (3.4) \quad &\geq c_3 |\xi^s|^{m-l_m(\eta)} \cdot h_{\mathfrak{N}}^{l_m(\eta)}(\xi^s).
 \end{aligned}$$

Так как $\eta^s = \xi^s/|\xi|^s \rightarrow \eta$ при $s \rightarrow \infty$, то в силу определения числа $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем что $h_{\mathfrak{N}}(\xi^s) \geq c_4 |\xi^s|^{\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)}$ $s = 1, 2, \dots$. Используя это из оценки (3.4), с некоторой постоянной $c_5 > 0$, при достаточно больших s получаем

$$(3.5) \quad \tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) \geq c_5 |\xi^s|^{m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))}.$$

Так как в случае 2) $k \leq m - l_m(\eta)(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ ($l_m(\eta) \leq (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$), то оценки (3.3) и (3.5) противоречат соотношению (3.1).

В случае 3) за счет перехода на подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ возможны следующие подслучая 3.1) $\xi^s = |\xi^s|\eta$, $s = 1, 2, \dots$, 3.2) $\xi^s \neq |\xi^s|\eta$ $s = 1, 2, \dots$. В подслучае 3.1), в силу однородности многочленов P_m, P_k , определения чисел $l_m(\eta), l_k(\eta)$, так как $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$ и с некоторой постоянной $\kappa \geq 1$ (в силу определения $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)$)

$$\kappa |\xi^s|^{\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)} \geq h_{\mathfrak{N}}(\xi^s) \geq \kappa^{-1} |\xi^s|^{\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)} \quad s = 1, 2, \dots,$$

то существуют постоянные $c_j > 0$, $j = \overline{6, 9}$ для которых при достаточно больших s

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) &\geq \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} |P_m^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) \geq c_6 |\xi^s|^{m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} \times \\
 (3.6) \quad &\times \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} |P_m^{(\alpha)}(\eta^s)| \geq c_7 |\xi^s|^{m-l_m(\eta)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))},
 \end{aligned}$$

$$\tilde{P}_k(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) = \sum_{\alpha} |P_k^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) \leq c_8 \sum_{\alpha} |\xi^s|^{k-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_k^{(\alpha)}(\eta)| =$$

$$(3.7) \quad = c_8 \sum_{|\alpha| \geq l_k(\eta)} |\xi^s|^{k-|\alpha|(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))} |P_k^{(\alpha)}(\eta)| \leq c_9 |\xi^s|^{k-l_k(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))}.$$

Так как из условия $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)) > 0$ теоремы следует, что $k-l_k(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)) \leq m-l_m(\eta)(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$, то оценки (3.6) и (3.7) противоречат соотношению (3.1). Рассмотрим подслучай 3.2). Пусть $\tau \in R^2$, $|\tau| = 1$ и $(\tau, \eta) = 0$. Тогда в подслучае 3.2) точки ξ^s $s = 1, 2, \dots$ можно представить в следующем виде $\xi^s = t_s(\eta + u_s \tau)$ $s = 1, 2, \dots$, где при $s \rightarrow \infty$

$$(3.8) \quad (t_s, u_s) \rightarrow (+\infty, 0) \text{ и } t_s/|\xi^s| \rightarrow 1.$$

Поэтому в дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что $t_s \geq 1$, $|u_s| \leq 1$ $s = 1, 2, \dots$. Так как проядок нуля многочлена $P_k^{(\alpha)}$, $\alpha \in N_0^2$ в точке η при $|\alpha| \leq l_k(\eta)$ не меньше чем $l_k(\eta) - |\alpha|$, то с применением предложения 3.1, в силу однородности многочлена P_k и соотношения (3.8), с некоторой постоянной $c_{10} > 0$ при достаточно больших s имеем.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) &= \sum_{|\alpha| \leq l_k(\eta)} |P_k^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) + \sum_{|\alpha| > l_k(\eta)} |P_k^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) \leq \\ &\leq c_{10} \left[\sum_{|\alpha| \leq l_k(\eta)} |\xi^s|^{k-|\alpha|} |u_s|^{l_k(\eta)-|\alpha|} h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) + \sum_{|\alpha| > l_k(\eta)} |\xi^s|^{k-|\alpha|} h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) \right]. \end{aligned}$$

Так как $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, следовательно $h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)/|\xi^s| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то в силу леммы 2.4, с некоторой постоянной $c_{11} > 0$ при достаточно больших s получаем, что

$$(3.9) \quad \tilde{P}_k(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) \leq c_{11} \left[|\xi^s|^k |u_s|^{l_k(\eta)} + |\xi^s|^{k-l_k(\eta)} h_{\mathfrak{N}}^{l_k(\eta)}(\xi^s) \right].$$

Для $\tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s))$, при достаточно больших s , в силу предложения 3.1 и определения числа $l_m(\eta)$, с некоторой постоянной $c_{12} > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m(\xi^s, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s)) &\geq |P_m(\xi^s)| + \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} |P_m^{(\alpha)}(\xi^s)| h_{\mathfrak{N}}^{|\alpha|}(\xi^s) \geq \\ &\frac{1}{2} \left[|\xi^s|^m |u_s|^{l_m(\eta)} |D_{\tau}^{l_m(\eta)} P_m(\eta)| + |\xi^s|^{m-l_m(\eta)} \cdot h_{\mathfrak{N}}^{l_m(\eta)}(\xi^s) \cdot \sum_{|\alpha|=l_m(\eta)} |P_m^{(\alpha)}(\eta)| \right] \geq \\ (3.10) \quad &\geq c_{12} \left[|\xi^s|^m |u_s|^{l_m(\eta)} + |\xi^s|^{m-l_m(\eta)} h_{\mathfrak{N}}^{l_m(\eta)}(\xi^s) \right]. \end{aligned}$$

Так как, в силу определения числа $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)$ и условия $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, с некоторой постоянной $\kappa \geq 1$

$$(3.11) \quad \kappa |\xi^s| \geq h_{\mathfrak{N}}(\xi^s) \geq \kappa^{-1} |\xi^s|^{\rho_{\mathfrak{N}}(\eta)} \quad s = 1, 2, \dots,$$

числа $k, m, l_0 := l_m(\eta), l_1 := l_k(\eta), \delta := \rho_{\mathfrak{N}}(\eta)$ и тройки $(x_s, y_s, z_s) := (|\xi^s|, |u_s|, h_{\mathfrak{N}}(\xi^s))$ (в силу (3.11)) при достаточно больших s удовлетворяют условиям леммы 2.5, то существует постоянная $c_{13} > 0$ для которого при этих s

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & |\xi^s|^k |u_s|^{l_k(\eta)} + |\xi^s|^{k-l_k(\eta)} h_{\mathfrak{N}}^{l_k(\eta)}(\xi^s) \leq \\ & \leq c_{13} (|\xi^s|^m |u_s|^{l_m(\eta)} + |\xi^s|^{m-l_m(\eta)} h_{\mathfrak{N}}^{l_m(\eta)}(\xi^s)). \end{aligned}$$

Из оценок (3.9) и (3.10) в силу (3.12) получаем противоречие с соотношением (3.1). Полученные противоречия доказывают справедливость утверждения теоремы. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Следствие 3.1. Пусть $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1 \subset R_+^2$ в.п. многогранники, для которых $\rho_{\mathfrak{N}} < 1, \rho_{\mathfrak{N}_1} < 1, P_m$ и P_k однородные многочлены от двух переменных порядка m и k ($m \geq k$) соответственно. Если для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \rho_{\mathfrak{N}_1}(\eta)$, то $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$ тогда и только тогда, когда $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}_1}} P_m$.

Доказательство. Пусть $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$. Тогда в силу леммы 2.2 $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ если $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$. Тогда из условий леммы имеем, что $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}_1}(\eta))$ при всех $\eta \in \Sigma(P_m)$, для которых $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}_1}(\eta))$. Отсюда в силу теоремы 3.1 получаем, что $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}_1}} P_m$.

Этим утверждение следствия доказано, так как для доказательства обратного утверждения достаточно поменять местами многогранники $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_1$.

Замечание 3.1. Легко заметить, что для любого в.п. многогранника $\mathfrak{N} \subset R_+^2$ и $0 \neq \eta \in R^2$ $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \max_{\nu \in \mathfrak{N}^0} \nu_1$ при $\eta_2 = 0$, $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \max_{\nu \in \mathfrak{N}^0} \nu_2$ при $\eta_1 = 0$ и $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \rho_{\mathfrak{N}} = \max_{\nu \in \mathfrak{N}^0} |\nu|$ при $\eta \in R_0^2$.

Следствие 3.2. Если при условиях следствия 3.1 $\Sigma(P_m) \subset R_0^2$, то условия $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m, P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}_1}} P_m$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\rho_{\mathfrak{N}} = \rho_{\mathfrak{N}_1}$.

Доказательство. Непосредственно следует из следствия 3.1 и замечания 3.1. Аналогичным образом (как доказана теорема 3.1) можно доказать следующую:

Теорема 3.2. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^2, P_m$ и P_k те же, что и в теореме 3.1. Если для любого $\eta \in \Sigma(P_m)$ при $l_m(\eta) > (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$ следует, что $l_k(\eta) > l_m(\eta) - (m-k)/(1-\rho_{\mathfrak{N}})$, то существует постоянная $c > 0$ для которого

$$(3.13) \quad |P_k(\xi)| \leq c \tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}}(\xi)) \quad \forall \xi \in R^2.$$

Следствие 3.3. Пусть $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1 \subset R^2$ в.п. многогранники, для которых $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, $\rho_{\mathfrak{N}_1} < 1$, P_m и P_k однородные многочлены от двух переменных порядка m и k $m \geq k$ соответственно. Если $\rho_{\mathfrak{N}} = \rho_{\mathfrak{N}_1}$, то для выполнения оценки (3.13) необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$(3.13') \quad |P_k(\xi)| \leq c_1 \tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}_1}(s)) \forall \xi \in R^2$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству следствия 3.1 с использованием теоремы 3.2 вместо теоремы 3.1 и леммы 2.3 вместо леммы 2.2.

Теорема 3.3. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^2$ в.п. многогранник, для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$, а P многочлен от двух переменных представленный в виде (1.1). Если многочлен P_m гиперболичен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in R^2$ а многочлены P_k $k = 1, \dots, m-1$ удовлетворяют следующему условию: для любых $\eta \in \Sigma(P_m)$ и $k > m - l_m(\eta)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}}(\eta))$ то многочлен P $h_{\mathfrak{N}}$ -гиперболичен относительно вектора τ .

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 3.3 работы [9], так как при условиях нашей теоремы, в силу теоремы 3.1 $P_k \prec^{h_{\mathfrak{N}}} P_m$ $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Следствие 3.4. Пусть $\mathfrak{N}, P$ и τ те же, что и в теореме 3.3 а $\mathfrak{N}_1 \subset R_+^2$ некоторый в.п. многогранник. Если $\rho_{\mathfrak{N}}(\eta) = \rho_{\mathfrak{N}_1}(\eta)$ при всех $\eta \in \Sigma(P_m)$, то многочлен P $h_{\mathfrak{N}_1}$ -гиперболичен относительно вектора τ .

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 3.3 и следствия 3.1.

Теорема 3.4. Пусть $\mathfrak{N} \subset R_+^2$ в.п. многогранник для которого $\rho_{\mathfrak{N}} < 1$ а P - многочлен от двух переменных, представленный в виде (1.1). Если многочлен P_m гиперболичен по Гордингу относительно вектора $0 \neq \tau \in R^2$ а многочлены P_k $k = 1, \dots, m-1$ удовлетворяют следующему условию: для любых $\eta \in \Sigma(P_m)$ и $k > m - l_m(\eta)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$ $l_k(\eta) \geq l_m(\eta) - (m - k)/(1 - \rho_{\mathfrak{N}})$, то многочлен P $1/\rho_{\mathfrak{N}}$ гиперболичен относительно вектора τ .

Доказательство. Из условий теоремы, в силу теоремы 3.2 с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем, что

$$|P_k(\xi)| \leq c_1 \tilde{P}_m(\xi, h_{\mathfrak{N}}(\xi)) \quad \xi \in R^2, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Так как с некоторой постоянной $\kappa > 0$ в силу условия теоремы

$$h_{\mathfrak{N}}(\xi) \leq \kappa(1 + |\xi|^{\rho_{\mathfrak{N}}}) =: g(\xi) \quad \xi \in R^2$$

и следовательно с некоторой постоянной $c_2 > 0$ $\tilde{P}(\xi, h_{\mathfrak{M}}(\xi)) \leq c_2 \tilde{P}_m(\xi, g(\xi))$ $\xi \in R^2$, то в силу леммы 2.1 $P_k \prec^g P_m$, так как g является медленно меняющейся весовой функцией. Отсюда в силу теоремы 3.3 работы [9] получаем, что многочлен P g -гиперболичен относительно вектора τ или что то же самое, учитывая определение функции g , P $1/\rho_{\mathfrak{M}}$ гиперболичен относительно вектора τ . Теорема 3.4. доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Gårding, “Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients”, Acta. Math **85**, 1 – 62 (1951).
- [2] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators 2, Springer-Verlag (1983).
- [3] D. Calvo, A. Morando, “Multianisotropic Gevrey Classes and Ultradistributions”, Univ. di Torino quaderno **41**, 1 – 38 (2002).
- [4] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, “О задаче Коши в мультианизотропных классах Жевре для гиперболических с весом уравнений”, Изв. НАН Арм. **50**, no. 2, 36 – 46 (2015).
- [5] E Larsson, “Generalized hyperbolicity”, Arkiv for Math. Band **7**, no. 2, 11 – 32 (1966).
- [6] L. Svenson, “Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of Polynomials with hyperbolic Principal Part”, Ark. Math. **8**, 145 – 162 (1968).
- [7] G. Garello, “Pseudodifferential operators with symbols in weighted Sobolev spaces and regularity for partial differential equations”, Math. Nacht. **239-240**, 62 – 70 (2002).
- [8] Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, “О решениях типа Жевре гипоэллиптических уравнений”, Изв. НАН. Арм. **31**, no. 2, 40 – 46 (1996).
- [9] В. Н. Маргарян, Г. Г. Казарян, “Об одном классе слабо гиперболических операторов”, Изв. НАН Арм. **56**, no. 6, 57 – 69 (2021).

Поступила 24 ноября 2022

После доработки 24 ноября 2022

Принята к публикации 05 апреля 2023