Известия НАН Армении, Математика, том 58, н. 4, 2023, стр. 14 – 23.

К ВОПРОСУ СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ ОБЩИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Л. ГОГОЛАДЗЕ, Г. ЦАГАРЕЙШВИЛИ

I.Javakhishvili State Uniuversity, Tbilisi, Georgia
E-mails: *lgogoladze1@hotmail.com; giorgicagareishvili7@gmaikl.com*

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы сходимости и суммируемости рядов Фурье функций класса Lip 1 относительно общих ортонормированных систем (ОНС). Найдены достаточные условия, которым должны удовлетворять функции ОНС, чтобы ряд Фурье по этой системе каждой функции из класса Lip 1 п.в. сходился, безусловно сходился или суммировался методом (C, α), $\alpha > 0$. Доказана неулучшаемость некоторых полученных результатов.

MSC2020 number: 42C10.

Ключевые слова: ортонормированная система; ряд Фурье; сходимость; безусловная сходимость; коэффициенты Фурье.

1. Вспомогательные обозначения и утверждения

Пусть $f \in L_2(I)$ $(I = [0,1])$ и (φ_n) – ортонормированная на I система (ОНС) функций. Числа

$$C_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx \tag{1.1}$$

– коэффициенты Фурье функции f. Как известно, $\mathrm{Lip}\,1$ является пространством Банаха с нормой

$$||f||_{\mathrm{Lip}\,1} = ||f||_C + \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1 (Банах [1]). *Пусть $f \in L_2$ $(f \not\sim 0)$ – любая функция. Тогда существует ОНС такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n(x,f)| = +\infty \ \text{ п.в. на } [0,1],$$

где

$$S_n(x,f) = \sum_{k=1}^{n} C_k(f)\varphi_k(x).$$

Теорема 1.2 (Меньшова-Радемахера, см. [2, с. 332]). *Пусть* $(\varphi_n(x))$, $x \in [0,1]$, *произвольная ОНС. Тогда для п.в.* $x \in [0,1]$ *сходится всякий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty.$$

Теорема 1.3 (Орлич, см. [2, с. 350]). *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2(k+1)(\log\log(k+2))^{1+\varepsilon} < +\infty, \tag{1.3}$$

тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ *п.в. безусловно сходится на* $[0,1]$.

Теорема 1.4 ([3, с. 132]). *Пусть* (φ_n) *ОНС на* $[0,1]$. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < +\infty,$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *суммируем методом* (C,α), $\alpha > 0$, *п.в. на* $[0,1]$.

Справедливо равенство (см. [4])

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{n}} F(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) F(x)dx + f(1)\int_0^1 F(x)dx, \tag{1.4}$$

где $F, f \in L_2$ и функция $f(x)$ принимает лишь конечные значения в каждой точке отрезка $[0,1]$ (см. (1.1)).

Пусть w_n неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\mathrm{w}_n \le n, \tag{1.5}$$

и

$$P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} \varphi_k(x).$$

Легко видеть, что если $f \in L_2(I)$ (см. (1.1)),

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(f) \sqrt{\mathrm{w}_k} a_k = \int_0^1 f(x) P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx. \tag{1.6}$$

Пусть

$$D_n(a,\sqrt{\mathrm{w}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right|. \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. *Пусть* $(a_n) \in \ell_2$. *Через* H_n *обозначим множество всех* i ($i = 1,\dots,n-1$), *для каждого из которых найдется точка* $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ *такая, что*

$$\operatorname{sign}\int_0^x P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du \neq \operatorname{sign}\int_0^{\frac{i+1}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du,$$

тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in H_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du\right| = O(1). \tag{1.8}$$

Доказательство. В силу непрерывности функций $\int_0^x P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du$ найдется точка $x_{in} \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ такая, что

$$\int_0^{x_{in}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du = \int_{x_{in}}^{\frac{i}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du.$$

Следовательно, используя неравенство Гельдера, заключаем

$$\begin{aligned}\sum_{i\in H_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du\right| &\leq \sum_{i\in H_n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)|du \\ &\leq \int_0^1 |P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)|du \leq \left(\int_0^1 P_n^2(a,\sqrt{\mathrm{w}},u)du\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 w_k\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{w_n}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = O(1)\sqrt{w_n}.\end{aligned}$$

Умножая это неравенство на $\frac{1}{n}$ и используя неравенство (1.5), получаем справедливость леммы 1.1. □

2. Постановка задач

Вопросы ортогональных рядов изучены, например, в монографии [2] и в работах [6]–[10]. Отметим, что из теорем Меньшова [5] и Банаха [1] следует, что сходимость общих ортогональных рядов и сходимость общих рядов Фурье для функций из некоторого дифференциального класса являются разными задачами. В первом случае решающую роль играют коэффициенты ортогонального ряда. Во втором случае принадлежность функции f ($f \not\simeq 0$) к любому дифференциальному классу не гарантирует сходимость ее ряда Фурье относительно общих ОНС. Стало быть, надо наложить условия на функции ОНС, чтобы ряд Фурье по этой системе имел «хорошие» свойства. Точнее, рассмотрим следующие классы функций:

A_1, непрерывные функции.

A_2, функции ограниченной вариации.

A_3, абсолютно непрерывные функции.

A_4, классы H_ω.

Рассмотрим также свойства рядов Фурье:

B_1, сходимость почти всюду.

B_2, суммируемость методами Чезаро п.в.

B_3, безусловная сходимость.

B_4, абсолютная сходимость и т.д.

Ставятся задачи: каким условиям должны удовлетворять функции ОНС, чтобы ряд Фурье каждой функции из класса A_i, $i = 1, 2, 3, 4, \dots$, имел свойство B_j, $j = 1, 2, 3, 4, \dots$. Некоторые из вышеотмеченных задач были рассмотрены в работах [11]–[20].

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть* (φ_n) *ОНС на* $[0,1]$, $h(x) = 1$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(h)\mathrm{w}_k < \infty. \tag{3.1}$$

Если для любой последовательности $(a_n) \in \ell_2$ *(см. (1.7))*

$$D_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}) = O(1), \tag{3.2}$$

то $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(f)\mathrm{w}_n < +\infty$ *для любой функции* $f \in \mathrm{Lip}\,1$.

Доказательство. В равенстве (1.4) положим $F(x) = P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x)$, тогда

$$\int_0^1 f(x)P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx = \sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx \tag{3.3}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right)P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx$$
$$+ f(1)\int_0^1 P_n(a,\sqrt{\mathrm{w}},x)\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Полагая $f \in \mathrm{Lip}\,1$ и учитывая (3.2) имеем

$$(3.4) \quad |I_1| \le \sum_{i=1}^{n-1} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right| \left| \int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x) dx \right|$$

$$= O(1)\,\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x) dx \right| = O(1) D_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}) = O(1).$$

Пусть $\Delta_{in} = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ и $f \in \mathrm{Lip}\,1$. Тогда имеем

$$|I_2| \le \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \Delta_{in}} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x)| dx$$

$$= O(1)\,\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x)| dx$$

$$= O(1)\,\frac{1}{n} \int_0^1 |P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x)|\, dx = O(1)\,\frac{1}{n} \left(\int_0^1 P_n^2(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(3.5) \qquad = O(1)\,\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathrm{w}_k \right)^{\frac{1}{2}} = O(1)\,\frac{\sqrt{\mathrm{w}_n}}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(1).$$

Далее, используя неравенство Коши и (3.1) получим:

$$|I_3| = \left| f(1) \int_0^1 P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x)\, dx \right| = O(1) \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} \varphi_k(x)\, dx \right|$$

$$= O(1) \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} \int_0^1 \varphi_k(x)\, dx \right| = O(1) \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} C_k(h) \right|$$

$$= O(1) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^2(h) \mathrm{w}_k \right)^{\frac{1}{2}} = O(1).$$

Из последнего неравенства и (3.3)–(3.5) будем иметь

$$\left| \int_0^1 f(x) P_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}, x) dx \right| = O(1).$$

Отсюда и из (1.6) для любого $(a_n) \in \ell_2$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} C_k(f) = O(1).$$

Если теперь в качестве a_k возьмем $|a_k| \operatorname{sign} C_k(f)$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} C_k(f)| = O(1).$$

Таким образом, для любого $(a_n) \in \ell_2$ сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\mathrm{w}_k} C_k(f)$.

Отсюда в силу известной теоремы $(C_k(f)\sqrt{\mathrm{w}_k}) \in \ell_2$, т.е., для любой функции $f \in \mathrm{Lip}\,1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(f) \mathrm{w}_k < +\infty.$$

Теорема 3.1 доказана. □

Теорема 3.2. *Пусть* (φ_n) *ОНС на* $[0,1]$ *и выполняется условие* (3.1)*. Если для любой последовательности* $(a_n) \in \ell_2$ *выполняется условие (см.* (1.7)*)*

$$D_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}) = O(1) \quad \textit{при} \ \mathrm{w}_k = \log^2 k,$$

тогда для любой функции $f \in \operatorname{Lip} 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k(f)\varphi_k(x)$ *сходится п.в. на* $[0,1]$.

Доказательство. Действительно, полагая в теореме 3.1 $\mathrm{w}_k = \log^2 k$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(f) \log^2 k < \infty.$$

Теперь справедливость теоремы 3.2 вытекает из теоремы 1.2. □

Теорема 3.3. *Пусть* (φ_n) *ОНС на* $[0,1]$ *и выполняется условие* (3.1)*. Если для любой последовательности* $(a_n) \in \ell_2$ *и для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполняется условие (см.* (1.7)*)*

$$D_n(a, \sqrt{\mathrm{w}(\varepsilon)}) = O(1) \quad \textit{при} \ \mathrm{w}_k(\varepsilon) = \log^2(k+1)(\log\log(k+2))^{1+\varepsilon},$$

тогда ряд Фурье любой функции $f \in \operatorname{Lip} 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(f)\varphi_n(x)$$

безусловно сходится п.в. на $[0,1]$.

Доказательство. Действительно, полагая в теореме 3.1

$$\mathrm{w}_k(\varepsilon) = \log^2(k+1)(\log\log(k+2))^{1+\varepsilon}$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(f)\mathrm{w}_k(\varepsilon) < \infty.$$

Теперь справедливость теоремы 3.3 вытекает из теоремы 1.3. □

Теорема 3.4. *Пусть* (φ_n) *ОНС на* $[0,1]$ *и выполняется условие* (3.1)*. Если для любой последовательности* $(a_n) \in \ell_2$ *выполняется условие (см.* (1.7)*)*

$$D_n(a, \sqrt{\mathrm{w}}) = O(1) \quad \textit{при} \ \mathrm{w}_n = (\log\log n)^2,$$

тогда ряд Фурье любой функции $f \in \operatorname{Lip} 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(f)\varphi_n(x)$$

суммируется методом (C,α)*,* $\alpha > 0$*, п.в. на* $[0,1]$.

Доказательство. Действительно, полагая в теореме 3.1 $\mathrm{w}_n = (\log\log n)^2$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(f)(\log\log n)^2 < \infty.$$

Теперь справедливость теоремы 3.4 вытекает из теоремы 1.4. □

Теорема 3.5. *Пусть* (φ_n) *заданная на* $[0,1]$ *ОНС и выполняется условие* (3.1). *Если для некоторой последовательности* $(b_n) \in \ell_2$

$$\limsup_{n\to\infty} D_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}) = +\infty, \tag{3.6}$$

тогда существует функция $g \in \operatorname{Lip} 1$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(g)\mathrm{w}_n = +\infty.$$

Доказательство. Не ограничивая общности допустим, что

$$\left| \int_0^1 P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)\, dx \right| = O(1). \tag{3.7}$$

Действительно, если

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_0^1 P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)\, dx \right| = +\infty,$$

то в виду того, что

$$\left| \int_0^1 P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)\, dx \right| = \left| \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} b_k \sqrt{\mathrm{w}_k} \varphi_k(x)\, dx \right|$$
$$= \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \sqrt{\mathrm{w}_k} \int_0^1 \varphi_k(x)\, dx \right| \le \sum_{k=1}^{n} |b_k| \sqrt{\mathrm{w}_k} |C_k(h)|, \quad h(x) = 1,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sqrt{\mathrm{w}_k} |C_k(h)| = +\infty.$$

Отсюда, поскольку $b_k \in \ell_2$, вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k(h)|^2 \mathrm{w}_k = +\infty.$$

Так как $h \in \operatorname{Lip} 1$ ($h(x) = 1$), получаем доказательство теоремы 3.5. Следовательно, в дальнейшем будем считать, что справедливо (3.7).

Теперь рассмотрим последовательность функций

$$g_n(x) = \int_0^x \operatorname{sign} \int_0^u P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, v)\, dv\, du. \tag{3.8}$$

В равенстве (1.4) положим $f = g_n$ и $F(x) = P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)$, получим

$$
\begin{aligned}
(3.9)\quad & \left|\int_0^1 g_n(x) P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right| \\
&= \Bigg|\sum_{i=1}^{n-1}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right) - g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(g_n(x) - g_n\left(\frac{i}{n}\right)\right) P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx \\
&\quad + g_n(1)\int_0^1 P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\Bigg| \geq |M_1| - |M_2| - |M_3|.
\end{aligned}
$$

Из (3.7) и (3.8) легко следует, что

$$
(3.10)\qquad |M_3| = \left|g_n(1)\int_0^1 P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right| = O(1).
$$

Согласно (3.8), $|g_n(x) - g_n(\frac{i}{n})| \leq \frac{1}{n}$ при $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и поскольку $(b_k) \in \ell_2$,

$$
\begin{aligned}
|M_2| &\leq \frac{1}{n}\int_0^1 |P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)|dx \leq \frac{1}{n}\left(\int_0^1 P_n^2(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
(3.11)\qquad &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \mathrm{w}_k\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\mathrm{w}_n}}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = O(1).
\end{aligned}
$$

Пусть $E_n = \{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus H_n$, где H_n – множество, которое было определено в лемме 1.1. Тогда, если $i \in E_n$, то

$$
\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right) - g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx = -\frac{1}{n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right|.
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i\in E_n}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right) - g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right| \\
&\qquad = \frac{1}{n}\sum_{i\in E_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right|.
\end{aligned}
$$

Используя последнее равенство, будем иметь

$$
\begin{aligned}
(3.12)\quad |M_1| &= \left|\sum_{i=1}^{n-1}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right) - g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\right| \\
&= \Bigg|\sum_{i\in E_n}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right) - g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx \\
&\quad + \sum_{i\in H_n}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right) - g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b, \sqrt{\mathrm{w}}, x)dx\Bigg|
\end{aligned}
$$

$$\geq \frac{1}{n}\sum_{i\in E_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right|$$
$$-\left|\sum_{i\in H_n}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right)-g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right|.$$

Из (3.8) и (1.8), получаем

$$\left|\sum_{i\in H_n}\left(g_n\left(\frac{i}{n}\right)-g_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i\in H_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)\right|dx = O(1).$$

Отсюда и из (3.12) имеем

$$|M_1| \geq \frac{1}{n}\sum_{i\in E_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right| - \frac{1}{n}\sum_{i\in H_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right|$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right| - \frac{2}{n}\sum_{i\in H_n}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right|$$
$$\geq D_n(b,\sqrt{\mathrm{w}}) - O(1). \tag{3.13}$$

Наконец из (3.9)–(3.11) и (3.13) заключаем

$$\left|\int_0^1 g_n(x)P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx\right| \geq |M_1|-|M_2|-|M_3| \geq D_n(b,\sqrt{\mathrm{w}})-O(1). \tag{3.14}$$

Рассмотрим последовательность линейных, ограниченных на Lip 1 функционалов

$$U_n(f) = \int_0^1 f(x)P_n(b,\sqrt{\mathrm{w}},x)dx.$$

Согласно (3.6) и (3.14)

$$\limsup_{n\to\infty}|U_n(g_n)| = +\infty.$$

С другой стороны (см. (1.2)),

$$\|g_n\|_{\mathrm{Lip}\,1} = \|g_n\|_C + \sup_{x,y\in[0,1]}\left|\frac{g_n(x)-g_n(y)}{x-y}\right| \leq 2.$$

Следовательно, в силу теоремы Банаха–Штейнгауза, существует функция $g \in$ Lip 1 такая, что

$$\limsup_{n\to\infty}|U_n(g)| = +\infty.$$

Таким образом, при $(b_k)\in\ell_2$ расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k C_k(g)\sqrt{\mathrm{w}_k}.$$

Отсюда и заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2(g)\mathrm{w}_k = +\infty.$$

Теорема 3.5 полностью доказана. □

Из теоремы 3.5 вытекает неулучшаемость теоремы 3.1 в определенном смысле.

Список литературы

[1] S. Banach, "Sur la divergence des series orthogonales", Studia Math., **9**, 139 – 155 (1940).

[2] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, АФЦ (1999).

[3] Г. Алексич, Проблемы сходимости ортогональных рядов, Издат. Иностр. Лит., Москва (1963).

[4] Л. Гоголадзе, В. Цагарейшвили, "Некоторые классы функций и коэффициенты Фурье относительно общих ортонормированных систем", Труды МИАН, **280**, 162 – 174 (2013).

[5] D. E. Menshov, "Sur les series des functions orthogonales I", Fundam. Math. **4**, 82 – 105 (1923).

[6] H. Rademacher, "Einige Satze uber Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen", Math. Ann. **87**, no. 1-2, 112 – 138 (1922).

[7] W. Orlicz, Zur theorie derOrthogonalreihen, Bull. Intern. Acad. Sci. Polon. Cracovie, 81 – 115 (1927).

[8] S. Kaczmarz, "Uber die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen", Math. Z. **23**, no. 1, 263 – 270 (1925).

[9] K. Tandori, "Uber die orthogonalen Funktionen. I", Acta Sci. Math. (Szeged), **18**, 57 – 130 (1957).

[10] А. М. Олевский, "Об ортогональных рядах по полным системам", Матем. сб., **58**(100):2, 707 – 748 (1962).

[11] J. R. McLaughlin, "Integrated orthonormal series", Pacific J. Math. **42**, 469 – 475 (1972).

[12] С. В. Бочкарев, "Абсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам", УМН **27**, no. 2(164), 53 – 76 (1972).

[13] B. S. Kashin, "On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series", Anal. Math. **2**, no. 4, 249 – 266 (1976).

[14] Л. Д. Гоголадзе, В. Ш. Цагарейшвили, "Безусловная сходимость рядов Фурье функций ограниченной вариации", Сиб. матем. журн. **59**, no. 1, 86 – 94 (2018).

[15] L. Gogoladze and V. Tsagareishvili, "Differentiable functions and general orthonormal systems", Mosc. Math. J. **19**, no. 4, 695 – 707 (2019).

[16] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, "Summability of general orthonormal Fourier series", Studia Sci. Math. Hungar. **52**, no. 4, 511 – 536 (2015).

[17] Л. Д. Гоголадзе, Г. Цагарейшвили, "Общие коэффициенты Фурье и сходимость почти всюду", Изв.РАН, **85**, no. 2, 60 – 72 (2021).

[18] G. Cagareishvili, "General Fourier coefficients and problems of summability almost everywhere", Ann. Polon. Math. **126**, no. 2, 113 – 128 (2021).

[19] G. Tutberidze and V. Tsagaraeishvili, "Multipliers of absolute convergence", Mat. Zametki, **105**, no. 3, 433 — 443 (2019).

[20] G. Tutberidze and V. Tsagaraeishvili, "Absolute convergence factors of Lipshitz class functions for general Fourier series", Geo. Math., J., https://doi.org/10.1515/gmj-2021-2107 (2022).

Поступила 07 июня 2022

После доработки 06 августа 2022

Принята к публикации 26 августа 2022