Известия НАН Армении, Физика, т.58, №3, с.347–353 (2023)
УДК 548.732
DOI:10.54503/0002-3035-2023-58.3-347

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОЛЯ И ПОЛЯ ЗАРЯДОВ В СРЕДАХ

М.К. БАЛЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: mbalyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 2 мая 2023 г.)

Рассмотрены монохроматические электромагнитные поля в произвольным образом выбранном объеме как в однородных, так и в неоднородных средах. Получены формулы для полей с применением векторной функции Грина среды. Найдены две формы векторной функции Грина в однородных средах. Получены векторные формулы Кирхгофа и Кирхгофа–Котлера для задачи дифракции на отверстии в непрозрачном экране. Вследствие применения векторной функции Грина формула Кирхгофа–Котлера получена непосредственно, без обычно применяемых предположений.

1. Введение

В предыдущих работах [1–3] были найдены векторные формулы для электромагнитного поля в произвольно выбранном объеме при наличии в объеме движущихся зарядов. Были учтены как дифракционные поля, так и поля зарядов. Последние либо выражаются через потенциалы [1], либо через запаздывающий обобщенный вектор Герца [2]. Исследовались также дифракция и поля зарядов в монохроматическом случае [3].

В этой работе исследована векторная теория дифракции и полей заряженных частиц на основе использования векторной функции Грина среды. Основное внимание уделяется полям, гармонически зависящим от времени.

2. Уравнения электромагнитного поля в средах

Электромагнитное поле при плотности заряда $\rho(\mathbf{r},t)$ и плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла–Лоренца [4–8]

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ – индукция магнитного поля, $\mathbf{r}$ – пространственный радиус-вектор, t – время. Последнее уравнение в (1) называется уравнением непрерывности и выражает закон сохранения заряда. Пусть в произвольным образом выбранном объеме V среды имеются заряды, совершавшее заданное движение. В соответствии с этим плотности зарядов и токов представимы в виде суммы

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \ \mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 . \quad (2)$$

Индекс 1 соответствует зарядам, совершающим заданное движение, а индекс 2 – индуцированным зарядам. При линейном отклике среды (см., например, [8])

$$\rho_2 = -\mathrm{div}\mathbf{P},\ \mathbf{j}_2 = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\mathbf{M} , \quad (3)$$

где $\mathbf{P}$ – вектор поляризации (поляризованность), а $\mathbf{M}$ – намагниченность. Подстановка (3) в (1) приводит к системе

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1, \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_1. \end{gathered} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ – электрическая индукция, а $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ – напряженность магнитного поля [6, 8]. Электрическое поле имеет Фурье-представление

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega , \quad (5)$$

и то же самое для остальных величин. В итоге из (4) и (5) получим

$$\begin{gathered} \mathrm{rot}\mathbf{E}_\omega = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}_\omega, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H}_\omega = -\frac{i\omega\mathbf{D}_\omega}{c} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{1\omega}, \\ \mathrm{div}\mathbf{B}_\omega = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{D}_\omega = 4\pi\rho_{1\omega}. \end{gathered} \quad (6)$$

В средах с линейным откликом имеются следующие связи:

$$\mathbf{P}_\omega = \chi\mathbf{E}_\omega, \mathbf{M}_\omega = \alpha\mathbf{H}_\omega . \quad (7)$$

Здесь $\chi(\mathbf{r},\omega)$ – поляризуемость среды, а $\alpha(\mathbf{r},\omega)$ – магнитная восприимчивость. Следовательно, $\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r},\omega) = \mu(\mathbf{r},\omega)\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r},\omega)$. Причем диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\mathbf{r},\omega)=1+4\pi\chi(\mathbf{r},\omega)$, а магнитная проницаемость – $\mu(\mathbf{r},\omega)=1+4\pi\alpha(\mathbf{r},\omega)$. Эти связи и система уравнений (6) приводят к волновым уравнениям:

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{E}_\omega - \frac{\omega^2\varepsilon\mathbf{E}_\omega}{c^2} = \frac{4i\pi\omega}{c^2}\mathbf{j}_{1\omega}, \quad \mathrm{rot}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{H}_\omega - \frac{\omega^2\mu\mathbf{H}_\omega}{c^2} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\frac{\mathbf{j}_{1\omega}}{\varepsilon} . \quad (8)$$

Соответствующие векторные функции Грина удовлетворяют приведенным ниже уравнениям [1]:

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{G}_{\mathrm{e}\omega} - \frac{\omega^2\varepsilon\mathbf{G}_{\mathrm{e}\omega}}{c^2} = \mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathrm{p}), \quad \mathrm{rot}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{G}_{\mathrm{m}\omega} - \frac{\omega^2\mu\mathbf{G}_{\mathrm{m}\omega}}{c^2} = \mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathrm{p}) . \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{f}$ – произвольный постоянный вектор, $\mathbf{r}_\mathrm{p}$ – радиус-вектор точки наблюдения p.

3. Нахождение электромагнитного поля в средах

Скалярно умножим первое и второе уравнение (9) на $\mathbf{E}_\omega$ и $\mathbf{H}_\omega$, первое и второе уравнение (8) на $\mathbf{G}_{e\omega}$ и $\mathbf{G}_{m\omega}$. Вычитая полученные уравнения одно из другого, приходим к двум соотношениям. После интегрирования этих соотношений по объему V среды с поверхностью S получим

$$\mathbf{fE}_\omega(\mathbf{r}_p) = \oint_S \frac{1}{\mu}\left[(\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{n})\mathrm{rot}\mathbf{G}_{e\omega} + \frac{i\omega\mu}{c}(\mathbf{H}_\omega \times \mathbf{n})\mathbf{G}_{e\omega}\right]dS + \frac{4i\pi\omega}{c^2}\int_V \mathbf{G}_{e\omega}\mathbf{j}_{1\omega}dV,$$

$$\mathbf{fH}_\omega(\mathbf{r}_p) = \oint_S \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}\left[(\mathbf{H}_\omega \times \mathbf{n})\mathrm{rot}\mathbf{G}_{m\omega} - \frac{i\omega\boldsymbol{\varepsilon}}{c}(\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{n})\mathbf{G}_{m\omega} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{1\omega} \times \mathbf{n})\mathbf{G}_{m\omega}\right]dS \quad (10)$$

$$+\frac{4\pi}{c\varepsilon}\int_V \mathbf{G}_{m\omega}\mathrm{rot}\mathbf{j}_{1\omega}dV.$$

При выводе мы воспользовались уравнениями (6) и формулой $\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ $= \mathbf{B}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\,\mathrm{rot}\mathbf{B}$.

Дальнейший анализ уравнений (10) возможен при явном виде векторных функций Грина. Это можно сделать, например, для однородных сред.

3.1. Электромагнитное поле в однородных средах

В однородных средах $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ и $\mu(\omega)$ не зависят от координат. Вместо (8) и (9) имеем

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_\omega - \frac{\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E}_\omega}{c^2} = \frac{4i\pi\omega\mu}{c^2}\mathbf{j}_{1\omega}, \quad \mathrm{rotrot}\mathbf{H}_\omega - \frac{\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H}_\omega}{c^2} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\mathbf{j}_{1\omega}, \quad (11)$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{G}_\omega - \frac{\omega^2\varepsilon\mu\mathbf{G}_\omega}{c^2} = \mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathrm{p}). \quad (12)$$

В этих уравнениях скорость света c в свободном пространстве заменяется на скорость света v в среде:

$$v(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}. \quad (13)$$

Исходя из (11) и (12) и выполняя те же выкладки, что и при выводе (10), получим

$$\mathbf{fE}_\omega(\mathbf{r}_p) = \oint_S \left[(\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{n})\mathrm{rot}\mathbf{G}_\omega + \frac{i\omega\mu}{c}(\mathbf{H}_\omega \times \mathbf{n})\mathbf{G}_\omega\right]dS + \frac{4i\pi\omega\mu}{c^2}\int_V \mathbf{G}_\omega\mathbf{j}_{1\omega}dV,$$

$$\mathbf{fH}_\omega(\mathbf{r}_p) = \oint_S \left[(\mathbf{H}_\omega \times \mathbf{n})\mathrm{rot}\mathbf{G}_0 - \frac{i\omega\varepsilon}{c}(\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{n})\mathbf{G}_\omega + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{1\omega} \times \mathbf{n})\mathbf{G}_\omega\right]dS \quad (14)$$

$$+\frac{4\pi}{c}\int_V \mathbf{G}_\omega\mathrm{rot}\mathbf{j}_{1\omega}dV.$$

Решение (12) формально можно получить, определяя векторную функцию Грина для данной частоты как интеграл

$$\mathbf{G}_\omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathrm{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathrm{p}, t-t_\mathrm{p})\exp[-i\omega(t-t_\mathrm{p})]dt, \quad (15)$$

где функция $\mathbf{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\mathrm{p}, t-t_\mathrm{p})$ удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{G}+\frac{1}{v(\omega)^2}\frac{\partial^2\mathbf{G}}{\partial t^2}=\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\text{p})\delta(t-t_\text{p})\,. \tag{16}$$

Здесь t_p – время наблюдения. Действительно, умножая (16) на $\exp[-i\omega(t-t_\text{p})]$ и интегрируя по времени, получим уравнение (12) векторной функции Грина для монохроматического случая. В решении (16) [1] заменим скорость света в пустоте скоростью света в среде для данной частоты:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_\text{p}-\mathbf{r},t_\text{p}-t)=\frac{\mathbf{f}}{4\pi\text{R}}\delta\left(t_\text{p}-t-\frac{R}{v(\omega)}\right)-\frac{v(\omega)^2}{4\pi}\mathrm{graddiv}\left(\frac{\mathbf{f}}{R}\left(t_\text{p}-t-\frac{R}{v(\omega)}\right)\theta\left(t_\text{p}-t-\frac{R}{v(\omega)}\right)\right) \tag{17a}$$

и вторая форма –

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_\text{p}-\mathbf{r},t_\text{p}-t)=-\mathrm{rotrot}\left(\frac{c^2\mathbf{f}}{4\pi R}\left(t_\text{p}-t-\frac{R}{v}\right)\theta\left(t_\text{p}-t-\frac{R}{v}\right)\right)+v^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\text{p})(t_\text{p}-t)\theta(t_\text{p}-t). \tag{17b}$$

Здесь $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\text{p}|$, а $\theta(\cdot)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Из формул (15)–(17b) находим две формы векторной функции Грина в однородной среде:

$$\mathbf{G}_\omega(\mathbf{r}_\text{p}-\mathbf{r})=\mathbf{f}G_\text{s}+\frac{v^2}{\omega^2}\mathrm{graddiv}(\mathbf{f}G_\text{s})\,, \tag{18}$$

$$\mathbf{G}_\omega(\mathbf{r}_\text{p}-\mathbf{r})=\frac{v^2}{\omega^2}\mathrm{rotrot}(\mathbf{f}G_\text{s})-\frac{v^2\mathbf{f}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\text{p})}{\omega^2}\,. \tag{19}$$

Здесь $G_\text{s}=e^{i\omega R/v}/(4\pi R)$ – скалярная функция Грина и удовлетворяет уравнению [9]

$$\Delta\text{G}_\text{s}+\frac{\omega^2}{v^2}\text{G}_\text{s}=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\text{p})\,. \tag{20}$$

Для нахождения электромагнитного поля в среде воспользуемся уравнениями (14), подставляя в них выражения (18) и (19). Используя формулы векторного анализа, **f** выводится как общий множитель в правой части. Используя также произвольность этого вектора, получим выражения для электромагнитного поля. При выводе неоднократно будет использовано свойство $\partial\mathbf{G}_\omega/\partial x_i=-\partial\mathbf{G}_\omega/\partial x_{\text{p}i}$, где $\partial/\partial x_i$ и $\partial/\partial x_{\text{p}i}$ производные по координатам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_\text{p}$, соответственно.

Сначала воспользуемся выражением (18). Вывод такого же типа, как при выводе выражений для электромагнитного поля в нестационарном случае в пустоте [1]. Мы здесь приведем лишь результат:

$$\begin{aligned}\mathbf{fE}_\omega(\mathbf{r}_\text{p})&=\mathbf{f}\Bigg[\frac{4i\pi\omega\mu}{c^2}\int_V G_\text{s}\mathbf{j}_{1\omega}dV-\frac{4\pi}{\varepsilon}\mathrm{grad}_\text{p}\int_V\rho_{1\omega}G_\text{s}dV\\&-\frac{i\omega\mu}{c}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\omega)G_\text{s}dS-\mathrm{rot}_\text{p}\oint_S G_\text{s}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega)dS+\mathrm{grad}_\text{p}\oint_S(\mathbf{nE}_\omega)G_\text{s}dS\Bigg]+\frac{ic}{\varepsilon\omega}\oint_S\mathrm{rot}[\mathbf{H}_\omega\mathrm{div}(\mathbf{f}G_\text{s})]d\mathbf{S},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{fH}_\omega(\mathbf{r}_\text{p})&=\mathbf{f}\Bigg[\frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}_\text{p}\int_V\mathbf{j}_{1\omega}G_\text{s}dV+\frac{i\omega\varepsilon}{c}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega)G_\text{s}dS-\mathrm{rot}_\text{p}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\omega)G_\text{s}dS+\mathrm{grad}_\text{p}\oint_S G_\text{s}(\mathbf{nH}_\omega)dS\Bigg]\\&-\frac{ic}{\mu\omega}\oint_S\mathrm{rot}[\mathbf{E}_\omega\mathrm{div}(\mathbf{f}G_\text{s})]d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

Последние члены представляют интегралы по замкнутой поверхности от ротора некоторой функции. В случае непрерывных на поверхности функций и их первых производных они равны нулю. Окончательно получаем

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = \frac{4i\pi\omega\mu}{c^2}\int_V G_\mathrm{s}\mathbf{j}_{1\omega}dV - \frac{4\pi}{\varepsilon}\mathrm{grad}_\mathrm{p}\int_V \rho_{1\omega}G_\mathrm{s}dV$$

$$-\frac{i\omega\mu}{c}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\omega)G_\mathrm{s}dS + \mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S G_\mathrm{s}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega)dS + \mathrm{grad}_\mathrm{p}\oint_S(\mathbf{n}\mathbf{E}_\omega)G_\mathrm{s}dS, \tag{22}$$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\int_V \mathbf{j}_{1\omega}G_\mathrm{s}dV + \frac{i\omega\varepsilon}{c}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega)\mathrm{G}_\mathrm{s}dS - \mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\omega)G_\mathrm{s}dS + \mathrm{grad}_\mathrm{p}\oint_S G_\mathrm{s}(\mathbf{n}\mathbf{H}_\omega)dS.$$

Здесь поверхностные интегралы представляют поле зарядов, расположенных вне выбранного объема, а объемные интегралы определяют поле зарядов, движущихся внутри объема. Случай разрывных полей рассматривается в следующем параграфе.

Вывод для электромагнитного поля с использованием второй формы (19) подобен случаю вывода нестационарного случая [2]. Поэтому здесь приведем только результат:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = \frac{4\pi i}{\omega}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\int_V \mathbf{j}_{1\omega}G_\mathrm{s}dV - \frac{4\pi i\mathbf{j}_{1\omega}(\mathbf{r}_p)}{\varepsilon\omega} - \mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega)G_\mathrm{s}dS - \frac{ic}{\varepsilon\omega}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\omega)G_\mathrm{s}dS,$$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = \frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\int_V \mathbf{j}_{1\omega}G_\mathrm{s}dV - \mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\omega)G_\mathrm{s}dS + \frac{ic}{\mu\omega}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\mathrm{rot}_\mathrm{p}\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega)G_\mathrm{s}dS. \tag{23}$$

Второй член выражения электрического поля в (23) обеспечивает выполнение уравнения $\mathrm{div}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = -4\pi i\mathrm{div}\mathbf{j}_{1\omega}(\mathbf{r}_\mathrm{p})/(\varepsilon\omega) = 4\pi\rho_{1\omega}(\mathbf{r}_\mathrm{p})/\varepsilon$. Формула (23) получена впервые.

3.2. Разрывные поля. Векторные формулы Кирхгофа и Кирхгофа–Котлера

Формулы (21) и полученные оттуда формулы для полей (22) неприменимы в случае дифракции на отверстии в непрозрачном экране по следующей причине. Экран разделяет пространство на два полупространства. До экрана находятся излучающие заряды, а после экрана нет зарядов ($\rho_{1\omega} = 0, \mathbf{j}_{1\omega} = 0$). Требуется найти поле в пространстве после экрана. Так как поля неизвестны на поверхности, то в первом приближении применяются разрывные граничные условия Кирхгофа [6, 7, 9]. Согласно последним, поля в отверстии равны полям без присутствия экрана, а поля и их первые производные непосредственно после экрана равны нулю. Формулы (22) неприменимы, так как в (21) мы отбросили поверхностные интегралы, содержащие полный ротор. В случае разрывных функций этого делать нельзя. В (21) в роли поверхности *S* берется поверхность экрана, замыкаемая опирающейся на экран бесконечно удаленной сферической поверхностью. Вкладом от последней можно пренебречь (так называемое условие излучения Зоммерфельда) [6, 9]. Поля будут выражаться через поверхностные интегралы по поверхности отверстия *D* с контуром D_c. Интегралы, содержащие полные роторы, теперь будут, согласно теореме Стокса, выражаться контурными интегралами по контуру отверстия D_c:

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = -\frac{i\omega\mu}{c}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{H}^\mathrm{i}_\omega)G_\mathrm{s}dS - \mathrm{rot}_\mathrm{p}\int_D G_\mathrm{s}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}^\mathrm{i}_\omega)dS + \mathrm{grad}_\mathrm{p}\int_D(\mathbf{n}\mathbf{E}^\mathrm{i}_\omega)G_\mathrm{s}dS] + \frac{ic}{\varepsilon\omega}\oint_{D_\mathrm{c}}\nabla G_\mathrm{s}(\mathbf{H}^\mathrm{i}_\omega d\mathbf{l}),$$

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}_\mathrm{p}) = \frac{i\omega\varepsilon}{c}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{E}^\mathrm{i}_\omega)G_\mathrm{s}dS - \mathrm{rot}_\mathrm{p}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{H}^\mathrm{i}_\omega)G_\mathrm{s}dS + \mathrm{grad}_\mathrm{p}\int_D G_\mathrm{s}(\mathbf{n}\mathbf{H}^\mathrm{i}_\omega)dS - \frac{ic}{\mu\omega}\oint_{D_\mathrm{c}}\nabla G_\mathrm{s}(\mathbf{E}^\mathrm{i}_\omega d\mathbf{l}). \tag{24}$$

$\mathbf{E}^{\mathrm{i}}_{\omega}$ и $\mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\omega}$ – поля в отсутствии экрана. Эти выражения без контурных интегралов называются векторными формулами Кирхгофа, а с контурными – векторными формулами Кирхгофа–Котлера. Поля, выраженные по формулам Кирхгофа, из-за прерывности граничных условий Кирхгофа, не удовлетворяют уравнениям Максвелла (1). Котлер добавил контурные интегралы в векторной формуле Кирхгофа, исходя из некоторых соображений, так, чтобы полученные формулы удовлетворяли уравнениям Максвелла [10, 7]. Здесь же, используя векторную функцию Грина и не делая предположений Котлера, мы автоматически получили формулы Кирхгофа–Котлера.

Для той же задачи дифракции с применением граничных условий Кирхгофа, из (23) получим

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}}) &= -\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{E}^{\mathrm{i}}_{\omega})G_{\mathrm{s}}dS-\frac{ic}{\varepsilon\omega}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\omega})G_{\mathrm{s}}dS,\\ \mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}}) &= -\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\omega})G_{\mathrm{s}}dS+\frac{ic}{\mu\omega}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\mathrm{rot}_{\mathrm{p}}\int_D(\mathbf{n}\times\mathbf{E}^{\mathrm{i}}_{\omega})G_{\mathrm{s}}dS.\end{aligned}\tag{25}$$

Эти формулы впервые получены в работе [11]. Они определяют поля заданием только тангенциальных компонент полей внутри отверстия. Можно доказать, что поля (25) удовлетворяют уравнениям Максвелла, и нет необходимости вводить дополнительные слагаемые. Но при приближении точки наблюдения к поверхности экрана нарушаются условия $\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}})\to\mathbf{E}^{\mathrm{i}}_{\omega}$ и $\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}_{\mathrm{p}})\to\mathbf{H}^{\mathrm{i}}_{\omega}$ [12]. Эти поля не удовлетворяют граничным условиям Кирхгофа, и для нахождения более точного решения необходимы дальнейшие последовательные приближения.

4. Заключение

В этой работе, являющейся продолжением работ [1–3], продолжается исследование векторной теории дифракции и полей заряженных частиц в электродинамике. Рассмотрены монохроматические поля как в однородных, так и в неоднородных средах. Получены формулы для полей в произвольным образом выбранном объеме с применением векторной функции Грина среды. Для однородных сред найдены две формы векторной функции Грина. С использованием этих функций получены две формулы для полей. Применение полученных формул к задаче дифракции на отверстии в непрозрачном экране позволило непосредственно получить формулу Кирхгофа–Котлера. При этом не были сделаны предположения, которые обычно делаются для добавления членов к векторной формуле Кирхгофа.

Векторные формулы электромагнитного поля могут быть применены, например, в задачах дифракционного излучения, эффекта Смита–Парселя и т. д. [13–16].

ЛИТЕРАТУРА

1. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys., **57**, 331 (2022).
2. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys., **58**, 92 (2023).
3. **M.K. Balyan.** J. Contemp. Phys., **58** (2023) (accessed for publication).
4. **J.D. Jackson.** Classical Electrodynamics. New York: Wiley, 1998.

5. **L.D. Landau, E.M. Lifshits**. Course of Theoretical Physics, vol. 2. The Classical Theory of Fields. London: Athenaum Press, 1996.
6. **M. Born, E. Wolf.** Principles of Optics. Oxford: Pergamon Press, 1980.
7. **J.A. Stratton.** Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941.
8. **B.G. Levich.** Theoretical Physics, An advanced text, vol. 1, Theory of the Electromagnetic field, Theory of Relativity. Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1970.
9. **S. Solimeno, B. Crosignani, P. DiPorto.** Guiding, Diffraction and Confinement of Optical Radiation. New York: Academic Press, 1986.
10. **F. Kottler.** Ann. Phys. (Leipzig), **71**, 457 (1923).
11. **W. Franz.** Z. Naturforschg, **3a**, 500 (1948).
12. **A. Sommerfeld.** Optics. New York: Academic Press, 1954.
13. **M.L. Ter Mikaelyan, B.V. Khachatryan.** Rep. Natl. Acad. Sci. Armen. Phys., **XL**, 13 (1965). [Russian].
14. **B.V. Khachatryan.** Proc. Natl. Acad. Sci. Armen. Phys., 133 (1965). [Russian].
15. **B.M. Bolotovskii, G.V. Voskresenskii.** Sov. Phys. Usp., **9,** 73 (1966).
16. **B.M. Bolotovskii, E.A. Galst'yan.** Phys. Usp., **43**, 755 (2000).

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄԵՆԵՐԱՆԳ ԴԻՖՐԱԿՏԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ԵՎ ԼԻՑՔԵՐԻ ԴԱՇՏԵՐԸ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ

Մ.Կ. ԲԱԼՅԱՆ

Ինչպես անհամասեռ, այնպես էլ համասեռ միջավայրերում կամայականորեն ընտրված ծավալում դիտարկվում են մեներանգ էլեկտրամագնիսական դաշտերը: Ընտրված ծավալում դաշտերի համար ստացվել են բանաձևեր օգտագործելով միջավայրի վեկտորական Գրինի ֆունկցիան: Համասեռ միջավայրերի համար գտնվել են վեկտորական Գրինի ֆունկցիայի երկու ձևեր: Ստացվել են Կիրխհոֆի և Կիրխհոֆ-Կոտլերի վեկտորական բանաձևերն անթափանց էկրանում անցքի վրա դիֆրակցիայի խնդրի համար: Վեկտորական Գրինի ֆունկցիայի կիրառման շնորհիվ Կիրխհոֆ-Կոտլերի բանաձն ստացվում է ուղղակիորեն, առանց սովորաբար արվող ենթադրությունների:

ELECTROMAGNETIC VECTOR MONOCHROMATIC DIFFRACTION FIELDS AND FIELDS OF CHARGES IN MEDIA

M.K. BALYAN

Monochromatic electromagnetic fields are considered inside an arbitrarily chosen volume both in inhomogeneous and in homogeneous media. Formulas for the fields in the selected volume are obtained using the vector Green's function of the medium. For homogeneous media, two forms of the vector Green's function are found. The Kirchhoff and Kirchhoff-Kottler vector formulas for the problem of diffraction by an aperture in an opaque screen are obtained. Due to the use of the vector Green's function, the Kirchhoff-Kottler formula is obtained directly, without using the usual assumptions.