

Известия НАН Армении, Физика, т.58, №3, с.293–303 (2023)

УДК 539.17

DOI:10.54503/0002-3035-2023-58.3-293

## УСЛОВНО ТОЧНО РЕШАЕМЫЙ ОДНОМЕРНЫЙ ДИРАКОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ПСЕВДОСКАЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А.М. КАЗАРЯН<sup>1</sup>, А.М. ИШХАНЯН<sup>1\*</sup>, В.М. РЕДЬКОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

<sup>2</sup>Институт физики НАН Беларуси, Беларусь

\*e-mail: aishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 20 июня 2023 г.)

Мы исследуем аналитически решаемый потенциал псевдоскалярного взаимодействия для одномерного стационарного уравнения Дирака, состоящего из степенных членов, пропорциональных  $x^{-1}$ ,  $x^{-1/3}$  и  $x^{1/3}$ . Этот потенциал классифицируется как условно точно решаемый из-за фиксированного значения коэффициента первого члена. Мы представляем общее решение уравнения Дирака в терминах функций Эрмита с нецелочисленными индексами, которые отличаются от обычных полиномов Эрмита с целочисленными индексами. Мы анализируем энергетический спектр связанных состояний и собственные функции и сравниваем результаты со случаем без члена  $x^{-1/3}$ .

### 1. Введение

В настоящей работе изучаются особенности, вносимые потенциалом *псевдоскалярного взаимодействия*, который входит в одномерное стационарное уравнение Дирака [1, 2] как произведение второй матрицы Паули  $\sigma_2$  и некоторой функции  $W(x)$ . Конкретный потенциал, который мы исследуем, состоит из степенных слагаемых, пропорциональных  $x^{-1}$  и  $x^{-1/3}$ , и члена  $W_2 x^{1/3}$  с положительным коэффициентом  $W_2$ . Это – запирающий потенциал, который имеет слабо сингулярное поведение в начале координат. Этот потенциал порождает релятивистские эффекты, которые заметно влияют на динамику системы, обеспечивая благодатную почву для изучения релятивистского поведения частиц в низкоразмерных пространствах [2–9]. В частности, как показано в [10], тип сингулярности, а также псевдоскалярный характер взаимодействия могут внести интересную сложность в описание энергетического спектра связанных состояний, если рассматривать всю  $x$ -ось.

Рассматриваемый потенциал относится к классу *условно точно решаемых* потенциалов [11–14], поскольку коэффициент члена, пропорционального  $x^{-1}$  не является варьируемым, а принимает определенное значение. Заметим, что это ограничение наложено с целью достижения аналитической разрешимости одномерного стационарного уравнения Дирака в терминах известных специальных

функций гипергеометрического класса – функций Эрмита (при произвольном коэффициенте задача может быть решена в терминах биконфлюэнтных функций Гойна [15, 16], см. [17, 18]). Аналитическая разрешимость обеспечивает подходящую базу для всестороннего понимания поведения частиц в условиях запирания. Применяя различные математические методы, такие как функции Эрмита с нецелочисленными индексами или другие подходящие инструменты, мы получаем представление о волновых функциях и уровнях энергии частиц под влиянием псевдоскалярного потенциала. Общее решение задачи и анализ энергетического спектра связанных состояний и соответствующих собственных функций проливают свет на сложную природу явления запирания и дают полезную информацию о поведении частиц в таких условиях.

Приложения одномерного уравнения Дирака с псевдоскалярным потенциалом охватывают различные области физики. В физике конденсированного состояния эта концепция находит применения при изучении низкоразмерных систем, таких как графен, полупроводниковые наноструктуры или топологические изоляторы, где релятивистские эффекты и запирание играют решающую роль [5, 19, 20]. Более того, в физике высоких энергий исследование этой теории способствует пониманию поведения частиц в сильных гравитационных полях или экзотических конфигурациях материи, а также в низкоразмерных пространствах [2, 3].

## 2. Потенциал

Мы рассматриваем следующий потенциал псевдоскалярного взаимодействия:

$$W = \frac{c\hbar/6}{x} + \frac{W_1}{x^{1/3}} + W_2 x^{1/3}, \quad (1)$$

где  $W_1, W_2$  – реальные константы, для одномерного уравнения Дирака

$$E\sigma_0\psi = \left( -ic\hbar\sigma_1 \frac{d}{dx} + W(x)\sigma_2 + mc^2\sigma_3 \right) \psi, \quad (2)$$

где  $E$  – энергия и  $m$  – масса покоя частицы со спином  $1/2$ ,  $\psi$  – двухкомпонентная спинорная волновая функция:  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ ,  $c$  – скорость света,  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка,  $\sigma_0$  – единичная матрица и  $\sigma_{1,2,3}$  – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Заметим, что потенциал (1) является обобщением потенциала

$$W = \frac{c\hbar/6}{x} + W_2 x^{1/3}, \quad (4)$$

который недавно обсуждался в [10]. Для положительного  $W_2$ , этот потенциал поддерживает бесконечное количество связанных состояний. Однако в работе [10] было обнаружено существенное различие между дираковским и шрёдингеровским поведениями частицы в поле этого потенциала. Наш потенциал (1) включает дополнительный член, пропорциональный  $x^{-1/3}$ , и основная цель данного исследования – обсудить влияние этого компонента на вышеупомянутую

разницу. Заметим, что при положительном  $W_2$  потенциал (1) образует потенциальную яму, независимо от силы этого члена, определяемой значением параметра  $W_1$  (см. форму потенциала для  $x > 0$  на рисунке 1). Более того, понятно, что влияние этого члена на поведение потенциала проявляется главным образом вблизи начала координат. Поскольку в этой точке потенциал сингулярен, можно ожидать, что влияние введенного нами дополнительного члена будет особенно заметно на низколежащих энергетических уровнях. Уравнение (2) определяет систему двух связанных дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка для одной из компонент волновой функции,  $\psi_1$  или  $\psi_2$ . Например, положив

$$\psi_2 = \frac{iW\psi_1 - i\hbar\psi'_1}{E + mc^2}, \quad (5)$$

где штрих обозначает дифференцирование, уравнение для  $\psi_1$  имеет вид

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{E^2 - m^2c^4 - c\hbar W' - W^2}{c^2\hbar^2} \psi_1 = 0. \quad (6)$$

Это – уравнение типа Шрёдингера:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_S - U_1(x)) \psi_1 = 0, \quad (7)$$

для частицы с массой  $m$  и с энергией

$$E_S = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \quad (8)$$

с эффективным потенциалом

$$U_1 = \frac{W^2 + c\hbar W'}{2mc^2}. \quad (9)$$

Аналогичным образом, положив (ср. с (5))

$$\psi_1 = -\frac{iW\psi_2 + i\hbar\psi'_2}{E - mc^2}, \quad (10)$$

мы приходим к следующему эффективному уравнению типа Шрёдингера:

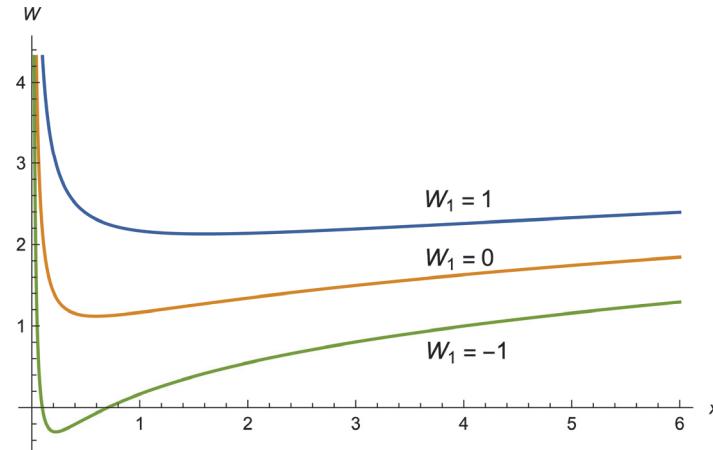


Рис.1. Потенциал (1) на положительной полуоси  $x > 0$  ( $c = \hbar = 1$ ,  $W_2 = 1$ ).

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_S - U_2(x)) \psi_2 = 0, \quad (11)$$

с той же эффективной энергией  $E_S$  и эффективным потенциалом

$$U_2 = \frac{W^2 - c\hbar W'}{2mc^2}. \quad (12)$$

Сравнивая этот потенциал с (9), мы видим, что  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  не тождественны. Они различаются знаком слагаемого, пропорционального  $W'$ . Это различие обуславливает несколько особенностей. Чтобы обсудить этот аспект более подробно, ниже представлены явные формы двух потенциалов при  $x > 0$ :

$$U_1 = -\frac{5\hbar^2}{72mx^2} + \frac{W_1^2 + 2c\hbar W_2 / 3}{2mc^2 x^{2/3}} + \frac{W_1 W_2}{mc^2} + \frac{W_2^2}{2mc^2} x^{2/3}, \quad (13)$$

$$U_2 = \frac{7\hbar^2}{72mx^2} + \frac{\hbar W_1}{3mcx^{4/3}} + \frac{W_1^2}{2mc^2 x^{2/3}} + \frac{W_1 W_2}{mc^2} + \frac{W_2^2}{2mc^2} x^{2/3}. \quad (14)$$

Прежде всего отметим, что в окрестности начала координат первый потенциал является *притягивающим*, а второй – *отталкивающим* (см. рисунок 2). Далее, рассматривая структуру этих потенциалов, отметим, что второй потенциал имеет дополнительный тип функциональной зависимости от  $x$ , а именно слагаемое, пропорциональное  $x^{-4/3}$ . Так как этот член пропорционален  $W_1$ , то в зависимости от знака этого параметра он может как увеличивать, так и уменьшать отталкивание потенциала вблизи сингулярности в начале координат. Следовательно, в случае частицы, находящейся под действием потенциала  $U_2$  и подчиняющейся уравнению Шрёдингера (11), ожидается, что этот член может добавить новые особенности в энергетический спектр связанных состояний. Кроме того, напомним, что в контексте уравнения Дирака решения уравнений типа Шрёдингера (7) и (11), а именно функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – не являются независимыми; скорее, они связаны между собой соотношениями (5) или (10). Следовательно, эти соотношения также будут влиять на дираковский спектр.

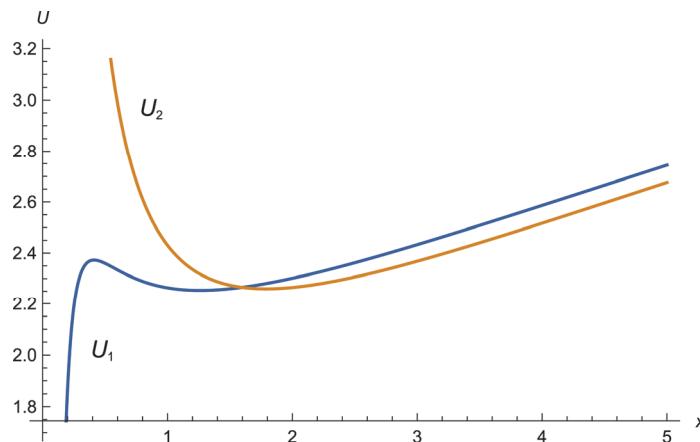


Рис.2. Эффективные шрёдингеровские потенциалы  $U_1$  и  $U_2$  ( $m = c = \hbar = 1$ ,  $W_1 = W_2 = 1$ ).

Еще одно наблюдение заключается в следующем: при ближайшем рассмотрении выясняется, что первый потенциал представляет собой частный случай первого потенциала Стиллинджера (см. уравнение (2.17) в [11]):

$$V_{S1} = -\frac{5\hbar^2}{72mx^2} + \frac{V_1}{x^{2/3}} + V_0 + V_2 x^{2/3}, \quad (15)$$

где  $V_{0,1,2}$  могут быть произвольными постоянными. Тем временем, второй потенциал представляет собой частный случай второго потенциала Экстона (см. уравнение (22) в [12]):

$$V_{E2} = \frac{7\hbar^2}{72mx^2} + \frac{V_1}{x^{4/3}} + \frac{9mV_1^2}{2\hbar^2 x^{2/3}} + V_0 + V_2 x^{2/3}. \quad (12)$$

Стоит отметить, что потенциалы Стиллинджера и Экстона являются частными случаями более общего пятипараметрического потенциала, принадлежащего биконфлюэнтному классу Гойна [17], который первоначально был введен Лемье и Бозе [18] (см. также [21]):

$$V(x) = \frac{V_0}{x^2} + \frac{V_1}{x^{4/3}} + \frac{V_2}{x^{2/3}} + V_3 + V_4 x^{2/3}. \quad (17)$$

Хотя в общем случае решение уравнения Шрёдингера для этого потенциала записывается с помощью биконфлюэнтных функций Гойна [15, 16], которые являются специальными функциями нового поколения, оказывается, что как для потенциала Стиллинджера, так и для потенциала Экстона решение может быть выражено через функции гипергеометрического класса. В данной работе мы используем решения, записанные с помощью функций Эрмита нецелого индекса [23], которые являются обобщением полиномов Эрмита [24]. Эти решения удобно получить обрыванием разложений биконфлюэнтных функций Гойна по функциям Эрмита [17].

### 3. Решение и связанные состояния

Решения уравнения Шрёдингера для потенциалов Стиллинджера и Экстона (15) и (16) обсуждались различными авторами (см., например, [10–12, 25–28]). Для наших целей удобно воспользоваться решением  $\psi_1(x)$  уравнения (7) для первого потенциала Стиллинджера (15), которое можно представить следующим образом:

$$\psi_1(x) = x^{1/6} e^{a-(z-A)^2/2} \left( C_1 H_{a-1}(z-A) + C_2 {}_1F_1\left(\frac{1-a}{2}, \frac{1}{2}, (z-A)^2\right) \right), \quad (18)$$

где  $C_{1,2}$  – произвольные константы, а  $H_{a-1}$  и  ${}_1F_1$  – функции Эрмита [23] и Куммера [22] соответственно, и  $z = z(x)$  определяет преобразование координат:

$$z = \sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}} x^{2/3}. \quad (19)$$

Параметры  $a$  и  $A$  задаются по формулам

$$a = \frac{3(E^2 - m^2 c^4)(E^2 - 4W_1 W_2 - m^2 c^4)}{16c\hbar W_2^3}, \quad A = \sqrt{\frac{3(E^2 - 2W_1 W_2 - m^2 c^4)^2}{8c\hbar W_2^3}}. \quad (20)$$

Напомним, что вторая компонента  $\psi_2(x)$  спинора Дирака задается уравнением (5). Можно легко проверить, что каждое из двух независимых фундаментальных решений, составляющих эту компоненту, является произведением элементарной функции и неприводимой линейной комбинации двух функций Эрмита или Куммера.

Заметим, что при  $W_1 = 0$  мы имеем  $A = \sqrt{2a}$ , что воспроизводит решение, примененное в [10]. Для ненулевого значения  $W_1$ , при обсуждении возможных связанных состояний мы сначала проверяем, что  $\psi_1(x)$  обращается в нуль при  $x \rightarrow +\infty$  только если  $C_2 = 0$ . Таким образом, для связанных состояний волновая функция имеет вид

$$\psi_1 = C_1 x^{1/6} e^{a-(z-A)^2/2} H_{a-1}(z-A). \quad (21)$$

Как показано в [10], поучительно рассмотреть поведение этой функции при приближении к началу координат. Имеем

$$\psi_1 = C_1 e^{a-A^2/2} (A_1 x^{1/6} + B_1 x^{5/6} + O(x^{3/2})), \quad (22)$$

где

$$A_1 = H_{a-1}(-A), \quad B_1 = -\sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}} (H_a(-A) + AH_{a-1}(-A)). \quad (23)$$

Следует отметить, что константы  $A_1$  и  $B_1$  одновременно не обращаются в ноль при любых допустимых значениях параметров потенциалов.

Заметим, что формулы (21)–(23) очень похожи на рассмотренные в [10], с той лишь разницей, что везде параметр  $\sqrt{2a}$  заменен параметром  $A$ . Однако ситуация меняется, когда мы изучаем поведение  $\psi_2$ . Действительно, структура уравнения (5) указывает, что в разложение  $\psi_2(x)$  в окрестности начала координат должны входить члены, пропорциональные  $x^{-1/6}$ ,  $x^{1/2}$ ,  $x^{7/6}$  и т.д. Особенностью случая с  $W_1 = 0$ , обсуждаемого в [10], является то, что коэффициент при члене  $x^{1/2}$  равен нулю. Однако в нашем случае этот коэффициент отличен от нуля, и мы получаем

$$\psi_2 = i \frac{C_1 e^{a-A^2/2}}{E + mc^2} \left( \frac{A_2}{x^{1/6}} + B_2 x^{1/2} + O(x^{7/6}) \right), \quad (24)$$

$$A_2 = -\frac{2c\hbar}{3} B_1 + W_1 A_1, \quad B_2 = W_2 (2a - A^2) A_1 + W_1 B_1. \quad (25)$$

Как видим, для ненулевого  $A_2$  волновая функция  $\psi_2(x)$  имеет сингулярность в начале координат. Однако фундаментальное требование квантовой механики состоит в том, что волновая функция везде должна быть конечна. Это означает, что  $A_2$  должен быть равен нулю. Это требование задает точное уравнение на собственные значения для энергетического спектра связанных состояний.

В явном виде это уравнение можно записать как

$$F = H_a(-A) + \left( A + \frac{\sqrt{3}W_1}{\sqrt{2c\hbar W_2}} \right) H_{a-1}(-A) = 0. \quad (26)$$

Для  $W_1 = 0$ , который гарантирует, что  $A = \sqrt{2a}$ , мы получаем такой же результат как в [10]. Как показано там, довольно точное приближение для этого случая записывается следующим образом:

$$E_n \approx \pm \sqrt{m^2 c^4 + W_2^{3/2} \sqrt{\frac{16c\hbar}{3} \left( n - \frac{1}{6} \right)}}. \quad (27)$$

Эта формула показывает, что индекс Маслова [29] в данном случае равен  $-1/6$ , в отличие от случая Шрёдингера, для которого этот индекс равен  $+1/6$ , как можно установить исходя из полуклассических соображений [30, 31].

Чтобы обсудить случай ненулевого значения  $W_1$ , необходимо изучить связь между индексом и аргументом вовлеченных функций Эрмита. Эта связь определяется значениями параметров  $a$  и  $-A$ . Эти параметры как функции от  $W_1$  изображены на рисунке 3. Как видно, для  $W_1 \approx 0$  мы имеем  $A \approx \sqrt{2a}$ , а для ненулевых значений  $W_1$ ,  $A$  всегда больше, чем  $\sqrt{2a}$ . Это можно выявить аналитически, заметив, что при положительном  $W_2$  мы имеем

$$A^2 - 2a = \frac{3W_1^2}{2c\hbar W_2} > 0. \quad (28)$$

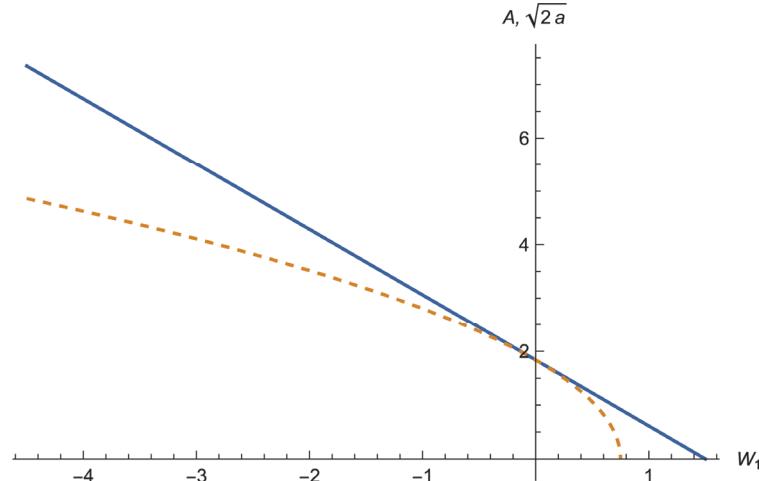


Рис.3. Параметры  $A$  (сплошная линия) и  $\sqrt{2a}$  (пунктирная линия) в зависимости от  $W_1$ .  $E = 2$ ,  $m = c = \hbar = W_2 = 1$ .

Кроме того, заметим, что когда  $E$  стремится к бесконечности,  $A$  приближается к  $\sqrt{2a}$  при любом значении  $W_1$  (рис.4). Следовательно, для высоколежащих уровней можно применить приближение функции Эрмита для левой переходной области  $-A \approx -\sqrt{2a}$  функциями Эйри [24]. Получается следующее приближение

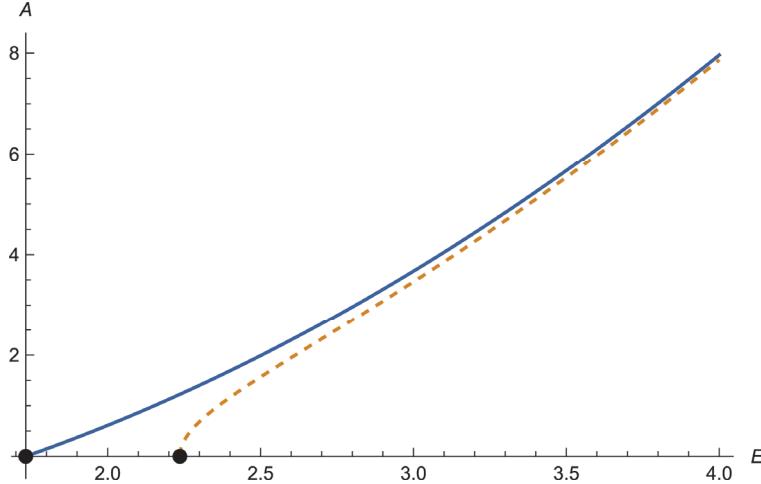


Рис.4. Параметры  $A$  (сплошная линия) и  $\sqrt{2a}$  (пунктирная линия) как функции от энергии. Заполненные кружки обозначают точки  $\sqrt{2W_1W_2 + m^2c^4}$  и  $\sqrt{4W_1W_2 + m^2c^4}$ .  $m = c = \hbar = W_1 = W_2 = 1$ .

уравнения (26) для собственных значений энергии через элементарные функции:

$$F \approx f(a) \sin(\pi(a - \gamma_M)) = 0, \quad (29)$$

где  $f(a)$  – фактор, который нигде не обращается в нуль и

$$\gamma_M = -\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{Ai(u_1) - \sqrt[12]{\frac{2a+1}{2a-1}} \frac{A+s}{\sqrt{2a}} Ai(u_2)}{Bi(u_1) - \sqrt[12]{\frac{2a+1}{2a-1}} \frac{A+s}{\sqrt{2a}} Bi(u_2)} \right), \quad (30)$$

где

$$u_{1,2} = 2^{1/3} (2a \pm 1)^{1/6} (A - \sqrt{2a \pm 1}), \quad s = \frac{\sqrt{3}W_1}{\sqrt{2c\hbar}W_2}. \quad (31)$$

Зависимость  $\gamma_M$  от энергии показана на рисунке 5. Как видно, это монотонная функция, изменяющаяся в интервале  $(-1/6, 0)$ . Когда энергия стремится к бесконечности, она приближается к значению  $\gamma_M = -1/6$ . Следовательно, для высоколежащих уровней имеем приближенное уравнение спектра  $a \approx n - 1/6$ . Решая это уравнение относительно  $E$ , получаем (ср. с (27))

$$E_n \approx \pm \sqrt{m^2c^4 + 2W_1W_2 + 2W_2 \sqrt{W_1^2 + \frac{4c\hbar W_2}{3} \left( n - \frac{1}{6} \right)}}. \quad (32)$$

Эта формула указывает на то, что индекс Маслова остается неизменным по сравнению со случаем без потенциального члена  $W_1x^{-1/3}$ . Отметим, что данная функциональная форма энергетического спектра применима и для низколежащих уровней. Однако для этих уровней необходимо использовать меньшее значение  $|\gamma_M|$ . Поскольку величина необходимого уменьшения величины  $|\gamma_M|$  зависит от

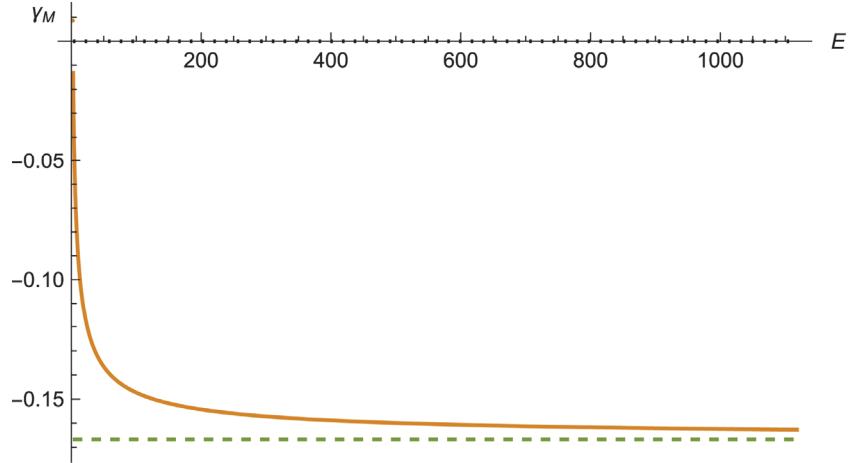


Рис.5. Зависимость  $\gamma_M$  от энергии.  $m = c = \hbar = W_1 = W_2 = 1$ .

$W_1$ , влияние потенциального члена  $\sim x^{-1/3}$  на спектр действительно более выражено для низколежащих энергетических уровней.

## 5. Обсуждение

В данной работе мы рассмотрели некоторый аналитически решаемый потенциал псевдоскалярного взаимодействия для одномерного стационарного уравнения Дирака, обладающий специфическими свойствами. Потенциальная функция состоит из степенных слагаемых, пропорциональных  $x^{-1}$ ,  $x^{-1/3}$  и  $x^{1/3}$ , и классифицируется как условно точно решаемая из-за фиксированного значения коэффициента при члене  $x^{-1}$ . Если коэффициент при слагаемом  $x^{1/3}$  положителен, этот потенциал действует как ограничивающий потенциал со слабо сингулярным поведением в начале координат.

Рассмотренный потенциал является расширением потенциала псевдоскалярного взаимодействия, рассмотренного в работе [10], где член  $W_1 x^{-1/3}$  отсутствует. Мы представили общее решение уравнения Дирака в терминах функций Эрмита с нецелочисленными индексами и вырожденных гипергеометрических функций, а также построили собственные функции связанных состояний в терминах функций Эрмита. Кроме того, мы получили точное уравнение для энергетического спектра, построили аппроксимацию спектра для высоко лежащих уровней и сравнили результаты со случаем, когда член  $x^{-1/3}$  отсутствует. Полученные результаты показывают, что включение члена  $x^{-1/3}$  оказывает существенное влияние на энергетический спектр и собственные функции, особенно на низколежащие энергетические уровни.

Потенциал псевдоскалярного взаимодействия с членом  $x^{-1/3}$  можно использовать для моделирования различных физических систем, в частности, низкоразмерных систем, таких как графен, полупроводниковые наноструктуры или топологические изоляторы, где релятивистские эффекты и запирание являются важными факторами. Кроме того, результаты могут иметь отношение к изуче-

нию поведения частиц в сильных гравитационных полях, экзотических конфигурациях материи или в низкоразмерных пространствах.

Данное исследование поддержано Комитетом по Науке Армении (гранты No. 21SC-BRFFR-1C021, 21AG-1C064 и 21AA-1C028) и проектом F21ARM-22 Национальной Академии наук Беларуси.

Авторы не имеют конфликт интересов.

Авторы в равной степени внесли свой вклад в данную работу в концептуализации исследования, математических выводах и написании рукописи. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **P.W. Atkins.** Quanta: A handbook of concepts: Oxford University Press, Oxford, 1991.
2. **F. Gross.** Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory: Wiley, New York (1999).
3. **S. Braibant, G. Giacomelli, M. Spurio.** Particles and Fundamental Interactions: An Introduction to Particle Physics: Springer, Heidelberg, 2012.
4. **S. Weinberg.** The Quantum theory of fields, vol.1, Foundations: Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
5. **A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim,** Rev. Mod. Phys., **81**, 109-162 (2009).
6. **N.P. Armitage, E.J. Mele, A. Vishwanath,** Rev. Mod. Phys. **90**, 015001 (2018).
7. **S.M. Barnett,** New J. Phys., **16**, 093008 (2014).
8. **M.M. Cunha, H.S. Dias, E.O. Silva,** Phys. Rev. D, **102**, 105020 (2020).
9. **D. Batic, K. Morgan, M. Nowakowski, S.B. Medina,** Gravitation and Cosmology, **24**, 224-244 (2018).
10. **A.M. Ishkhanyan, V.P. Krainov,** Physica Scripta, **98**, 075229 (2023).
11. **F.H. Stillinger,** J. Math. Phys., **20**, 1891-1895 (1979).
12. **H. Exton,** J. Phys. A, **28**, 6739-6741 (1995).
13. **R. Dutt, A. Khare, Y.P. Varshni,** J. Phys. A, **28**, L107-L113 (1995).
14. **G. Lévai, P. Roy,** Phys. Lett. A, **264**, 117-123 (1999).
15. **A. Ronveaux.** Heun's Differential Equations, London: Oxford University Press, 1995.
16. **S.Yu. Slavyanov, W. Lay.** Special functions: Oxford University Press, 2000.
17. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan,** Ann. Phys., **383**, 79-91 (2017).
18. **A. Lemieux, A.K. Bose,** Ann. Inst. Henri Poincaré A, **10**, 259-270 (1969).
19. **D. Bimberg** (ed.), Semiconductor Nanostructures, Berlin: Springer, 2008.
20. **S.-Q. Shen.** Topological Insulators. Dirac Equation in Condensed Matters, Heidelberg: Springer, 2012.
21. **A. Ishkhanyan, V. Krainov.** Eur. Phys. J. Plus, **131**, 342 (2016).
22. **F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark** (eds.), NIST Handbook of Mathematical Functions, New York: Cambridge University Press, 2010.
23. **N.N. Lebedev.** Special Functions and Their Applications, New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965.
24. **G. Szegő.** Orthogonal Polynomials: Am. Math. Soc., Providence, 1975.
25. **M. Znojil,** Phys. Rev. A, **61**, 066101 (2000).

26. C. Grosche, J. Phys. A, **28**, 5889-5902 (1995).
27. T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan. Physics of Atomic Nuclei, **81**, 869-873 (2018).
28. A.M. Ishkhanyan, J. Karwowski. Mod. Phys. Lett. A, **34**, 1950195 (2019).
29. V.P. Maslov, M.V. Fedoriuk. Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics, London: Reidel, 1981.
30. C. Quigg, J.L. Rosner, Phys. Rep., **56**, 167-235 (1979).
31. A.M. Ishkhanyan, V.P. Krainov. JETP Lett., **105**, 43-46 (2017).

ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆՈՐԵՆ ՃԵԳՐԻՏ ԼՈՒԾՎՈՂ ՄԻԱՉԱՓ ԴԻՐԱԿՅԱՆ  
ՊՍԵՎԴՈՍԿԱԼՅԱՐ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼ

Ա.Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ա.Ա. ԻՇԽԱՆՅԱՆ, Վ.Մ. ՌԵԴԿՈՎ

Ուսումնասիրված է անալիտիկորեն լուծվող պանդուկայար փոխազդեցության մի պոտենցիալ՝ Դիրակի միաշափ ստացիոնար հավասարման համար, որը բաղկացած է  $x^{-1}$ ,  $x^{-1/3}$  և  $x^{1/3}$  անդամներից: Քանի որ առաջին անդամի գործակիցն ունի ֆիքսված արժեք, այս պոտենցիալը դասակարգվում է որպես պայմանականորեն ճշգրիտ լուծվող: Ներկայացված է Դիրակի հավասարման ընդհանուր լուծումը ոչամբող ինդեքսով Հերմիտի ֆունկցիաներով, որոնք տարբերվում են ամբողջ թվային ինդեքսով Հերմիտի բազմանդամներից: Վերլուծված են կապված վիճակների էներգիական սպեկտրը, սեփական ֆունկցիաները և արդյունքները համեմատված են այն դեպքի հետ, երբ  $x^{-1/3}$  անդամը բացակայում է:

### A CONDITIONALLY EXACTLY SOLVABLE 1D DIRAC PSEUDOSCALAR INTERACTION POTENTIAL

A.M. GHAZARYAN, A.M. ISHKHANYAN, V.M. RED'KOV

We study an analytically solvable pseudoscalar interaction potential for the one-dimensional stationary Dirac equation, which consists of power terms proportional to  $x^{-1}$ ,  $x^{-1/3}$ , and  $x^{1/3}$ . This potential is classified as conditionally exactly solvable due to the fixed strength of the first term at a specific constant. We present the general solution to the Dirac equation in terms of non-integer index Hermite functions, which are distinct from the conventional integer index Hermite polynomials. We analyze the energy spectrum of the bound states and the eigenfunctions and compare the results with the case without the  $x^{-1/3}$  term.