АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ЗАДАЧАХ НА ПОСТРОЕНИЕ

УДК 512
DOI: 10.56246/18294480-2022.13-16

АРУТЮНЯН РОБЕРТ
Профессор Шушинского технологического университета,
Заведующий департаментом естественных наук, средств связи и информационных технологий
электронная почта: rharutyunyan@shushitech.am
АБРАМЯН ЛИАНА
Кандидат физко-математичеких наук, доцент
Преподаватель Арцахского государственного университета
электронная почта: liana_abrahamyan@mail.ru
ВАРДАНЯН ВАЛЯ
Преподаватель Шушинского Технологического университета
электронная почта: valyavardanmyan@mail.ru

Задачи на построение в течение многих веков вызывали большой интерес у математиков. Интерес к этим задачам обусловлен не только их красотой и оригинальностью методов решения, но и большой практической ценностью. Проектирование строительства, архитектура, конструирование различной техники основаны на геометрических построениях .

Более углубленное изучение возможности геометрических построений неизбежно связано с переводом геометрической задачи на язык алгебры. В работе, после краткого исторического очерка, показано, каким образом "рациональные" алгебраические операции - сложение, вычитание, умножение и деление производимые над заданными величинами, могут быть выполнены посредством геометрических построений. В частности, сумма, произведение, разность и частное двух чисел строятся, взяв за основу понятие "единичного" отрезка. В рассматриваемой задаче, данными числами порождается поле рациональных чисел - множество чисел, обладающее тем свойством, что любая рациональная операция, совершенная над

двумя (или более) элементами этого множества, приводит снова к элементу этого же множества.

Ключевые слова: *Задача на построение, алгебраические операции, построение, поле.*

1.Введение

Ещё со времён Древней Греции математики занимались разработкой методов решения задач на построение. Что такое геометрическая задача на построение? Задача на построение — это задача, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь только указанными инструментами[1-5]. Обычно задача на построение ставится как требование из заданных элементов в соответствии с заданными условиями, с помощью определённых инструментов построить указанную геометрическую фигуру или их множество, удовлетворяющие указанным свойствам. В любой задаче на построение следует различать:

1) заданные элементы и их характеристики (условия задач);

2) инструменты, с помощью которых можно выполнить требуемое построение;

3) искомую фигуру (или их множество) с указанными свойствами.

При этом все линейные элементы в условиях задач заданы в виде отрезков (а не их длин), а все угловые элементы — в виде углов (а не чисел, выражающих их величину). Обычно задачи на построение решают, пользуясь двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений).

С помощью односторонней линейки можно выполнить следующие основные построения:

1. Построить отрезок, соединяющий две данные (или построенные) точки.

2. Построить прямую, проходящую через две данные (или построенные) точки.

3. Построить луч, исходящий из данной точки и проходящий через другую данную точку.

С помощью циркуля можно выполнить следующие основные построения:

1. Построить окружность, если даны её центр и отрезок, равный радиусу окружности.

2. Построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если даны центр окружности и концы дуги.

Кроме основных, возможны следующие построения:

1. Построить (найти) точку пересечения двух данных прямых.

2. Построить (найти) точки пересечения данной прямой с данной окружностью.

3. Построить (найти) точки пересечения двух данных окружностей.

4. Взять на прямой, или на окружности, или вне их произвольную точку.

5. Провести на плоскости произвольную прямую.

Что значит решить задачу на построение? Решение задач на построение состоит не в том, чтобы выполнить «руками» соответствующие построения, а в том, чтобы найти алгоритм решения, то есть, описать решение задачи в виде последовательности уже известных стандартных построений. В этом смысле решение задач на построение хорошо иллюстрирует один из основных принципов решения любых математических задач: решить задачу — это значит свести её к какой-либо задаче, уже решённой ранее. К стандартным (элементарным) построениям обычно относят следующие:

1. Разделить данный отрезок на два равных отрезка.

2. Разделить данный угол на два равных угла (построить биссектрису угла).

3. Построить на данной прямой от данной точки в данном направлении отрезок, равный данному.

4. Построить угол с вершиной в данной точке с данной стороной угла по указанную сторону от неё и равный данному углу.

5. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

6. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

7. Построить треугольник по трём данным сторона

8. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

9. Построить треугольник по стороне и двум углам, прилежащим к ней.

10. Построить прямую, касательную к данной окружности и проходящую через данную точку вне этой окружности.

11. Построить прямоугольный треугольник по двум катетам, или по катету и гипотенузе, или по катету и острому углу, или по гипотенузе и острому углу.

В работе показано, каким образом простейшие алгебраические операции соответствуют элементарным геометрическим построениям.

2.1 Из истории геометрических построений

Простейшие задачи на построение возникли в глубокой древности при выполнении измерений участков земли и при выполнении работ по строительству различных сооружений. К первым из таких задач относятся построение отрезка, равного данному, деление отрезков и углов на две равные части, построение перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку. Решение этих задач было известно ещё в догреческий период. За время с VII до III в. до н. э. греческими учёными был накоплен и обработан обширный материал по геометрии и, в частности, о задачах на построение. Как и в настоящее время, древнегреческие учёные считали построение геометрическим только в том случае, если оно было выполнено посредством линейки и циркуля без использования других инструментов. Известно, что ещё Пифагор (VI в. до н. э.) открыл способы построения правильных пятиугольника и десятиугольника и решил некоторые более сложные задачи на построение. В разработку методов решения задач на построение большой вклад сделал Платон (V в. до н. э.) и его ученики. Со времён Платона стали различать основные этапы задач на построение:

- анализ;
- построение;
- доказательство;
- исследование.

Известный нам способ деления отрезка пополам впервые был изложен в комментариях Прокла (410–485). Большое место рассмотрению задач на построение отведено в «Началах» Евклида (III в. до н. э.).

Доказывая, что та или иная фигура может существовать, он указывал, как её можно построить, применяя только циркуль и линейку. Одна из труднейших задач на построение, которую уже умели решать в Древней Греции — построение окружности, касающейся трёх данных окружностей. Эта задача называется задачей Аполлония — по имени греческого геометра

Аполлония из Перги (ок. 200 г. до н. э.) Однако древним геометрам не удавалось выполнить некоторые построения, используя лишь циркуль и линейку, а построение, выполненное с помощью других инструментов, не считалось геометрическим.

К числу таких задач относятся так называемые три знаменитые классические задачи древности: квадратура круга, трисекция угла и удвоение куба, а именно построение квадрата, равновеликого данному кругу, деление произвольного угла на три равные части и построение куба, объём которого вдвое больше объёма заданного куба. Эти три задачи привлекали внимание математиков на протяжении столетий и лишь в середине XIX в. была доказана их неразрешимость, то есть, невозможность указанных построений только с помощью циркуля и линейки. Эти результаты были получены средствами не геометрии, а алгебры, что ещё раз подчеркнуло единство математики.

Ещё одной интересной задачей на построение с помощью циркуля и линейки является задача построения правильного многоугольника с заданным числом сторон. Древние греки умели строить правильный треугольник, квадрат, пятиугольник и пятнадцатиугольник, а также все многоугольники, которые получаются из них удвоением числа сторон, и только их.

Новый шаг в решении поставленной задачи был сделан лишь в 1801 году немецким математиком К. Гауссом, который открыл способ построения правильного семнадцатиугольника при помощи циркуля и линейки и указал все значения n, при которых возможно построение правильного n-угольника указанными средствами.

В возрасте 17 лет Гаусс исследовал возможность построения правильных "p-угольников", где p - простое число. В то время были известны построения только для случаев $p=3$ и $p=5$. Гаусс установил, что построения возможны в том и только в том случае, если p есть простое "число Ферма":

$$p = 2^{2^n} + 1.$$

Первые числа Ферма суть 3, 5, 17, 257, 65 537. Это открытие произвело на Гаусса такое впечатление, что он сразу отказался от филологической карьеры и решил посвятить свою жизнь математике и ее приложениям. Он и позднее смотрел на это первое из своих открытий с особенной гордостью. После смерти Гаусса в Гёттингене была воздвигнута его бронзовая статуя, с пьедесталом в форме правильного 17-угольника.

Таким образом, с помощью циркуля и линейки оказалось невозможным построить правильный семиугольник, девяти-, одиннадцати-, тринадцатиугольник и т. д. Другие геометрические построения В разные времена математики при решении задач на построение накладывали на используемые инструменты ещё более ограничительные условия. Так, живший в X веке персидский астроном и математик Абу-л-Вафа написал первый трактат, посвящённый построениям с помощью неклассических инструментов — линейки и циркуля с фиксированным раствором, названным в последствии «заржавевшим циркулем».

Широкое развитие в конце XIX в. получила теория построений при помощи циркуля и линейки. Например, было показано, что любое построение, выполняемое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью одной лишь линейки, если в плоскости построения задана некоторая окружность и указан её центр.

2.2. Постулаты, на которых основано решение задачи на построение

В элементарной геометрии при решении задач на построение используют следующие основные геометрические фигуры: точки, прямолинейные отрезки, окружности и их дуги. Кроме этого, используют множество этих фигур, а также конечные или бесконечные (например, углы) части плоскости, ограничиваемые основными фигурами.

Постулат 1. Прямая и прямолинейный отрезок соответственно считаются построенными тогда и только тогда, когда даны или построены две точки прямой или концы отрезка.

Постулат 2. Окружность считают построенной тогда и только тогда, когда даны или построены её центр и две точки, которыми определяется её радиус. (Одной из этих точек может быть центр, а другой — точка на окружности). Дугу окружности считают построенной в том и только в том случае, когда даны или построены её центр и её концы.

Постулат 3. Точку считают построенной, если она является пересечением двух данных или построенных прямых.

Постулат 4. Точку считают построенной, если она является общей точкой данной или построенной прямой и данной или построенной окружности.

Постулат 5. Точку считают построенной, если она является общей точкой двух данных или построенных окружностей.

Постулат 6. Всякую другую геометрическую фигуру считают построенной, если даны или построены основные фигуры, из которых она состоит или которые её ограничивают.

2.3. Построение полей

В порядке развития общих идей мы начнем с рассмотрения небольшого числа классических построений. Всякая проблема геометрического построения может быть схематизирована следующим образом: дано некоторое число отрезков, скажем, $a, b, c, \ldots$; требуется построить один или несколько отрезков $x, y, \ldots$. Даже если на первый взгляд проблема как будто имеет совсем иной вид, ее всегда можно переформулировать таким образом, чтобы она включилась в указанную схему.

Искомые отрезки фигурируют или в виде сторон треугольника, который требуется построить, или в виде радиусов кругов, или как прямоугольные координаты каких-то искомых точек.

Предположим для простоты, что требуется построить какой-то отрезок x. В таком случае геометрическое построение приводит к решению алгебраической задачи: установить соотношение (в форме уравнения) между искомой величиной x и данными величинами $a, b, c, \ldots$; затем, решая это уравнение, найти формулу для величины x и, наконец, выяснить, можно ли свести вычисление x к таким алгебраическим процедурам, которые соответствуют построениям, выполнимым с помощью циркуля и линейки.

Таким образом, в основе всей рассматриваемой теории лежит принцип аналитической геометрии - количественная характеристика геометрических объектов, основанная на введении континуума действительных чисел.

Заметим прежде всего, что простейшие алгебраические операции соответствуют элементарным геометрическим построениям. Если даны два отрезка, длины которых равны a и b (измерение производится посредством "единичного" отрезка), то очень легко построить отрезки $a+b$, $a-b$, ra (где r - рациональное число), a/b и ab [5].

Чтобы построить $a+b$ (рис. 1), проведем прямую линию и на ней отложем циркулем отрезки $OA=a$ и $AB=b$.

Тогда $OB=a+b$. Точно так же в случае $a-b$ мы откладываем $OA=a$ и $AB=b$, но на этот раз откладываем b в сторону, противоположную той, в которую отложили a.

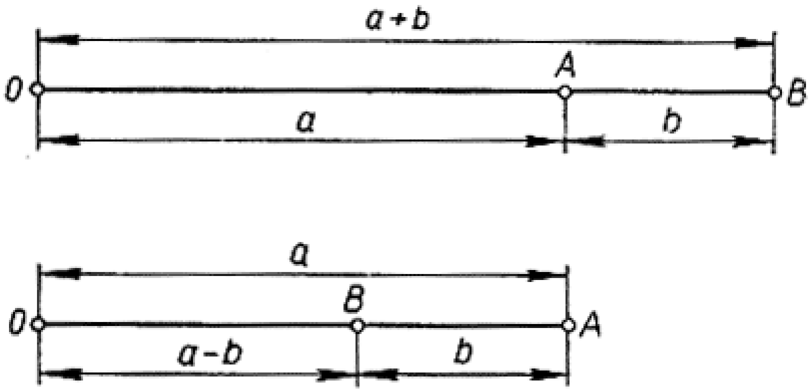

рис.1

Тогда $OB=a-b$. Для построениа $3a$, мы просто строим $a+a+a$; аналогично поступаем, если нужно построить pa, где p - целое число.

$\frac{a}{3}$ строится следующим приемом (рис. 2): на произвольной прямой откладываем $OA=a$ и затем проводим другую прямую через точку O. На этой прямой откладываем произвольный отрезок $OC=c$ и строим $OD=3c$. Соединяем A и D прямой линией и проводим через точку C прямую, параллельную AD; пусть эта прямая пересекает OA в точке B. Треугольники OBC и OAD подобны начит,

$$\frac{OB}{a}=\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD}=\frac{1}{3} \text{ и } OB=\frac{a}{3}.$$

Таким же образом можно, вообще, построить $\frac{a}{q}$, где q – целое число.

Совершая эту операцию над отрезком pa, мы построим ra, где $r = \frac{p}{q}$ какое либо рациональное число.

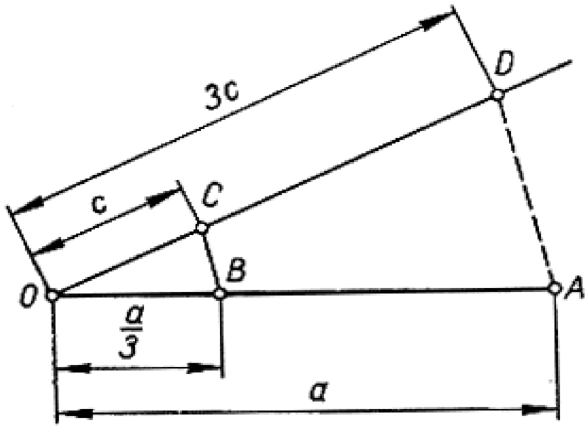

рис.2

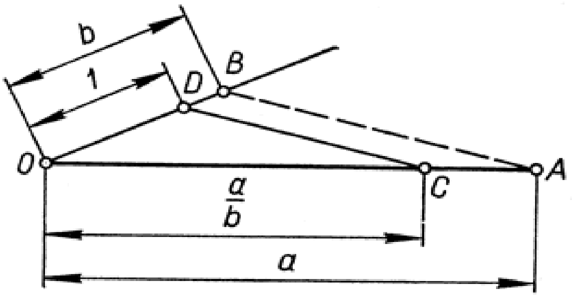

рис.3

Чтобы построить a/b (рис. 3), откладываем $OB = b$ и $OA = a$ на сторонах произвольного угла с вершиной O и на стороне OB откладываем отрезок $OD = 1$. Через D проводим прямую, параллельную AB; пусть она пересекает OA в точке C. Тогда будем иметь: $OC = \frac{a}{b}$. Построение ab показано на рис. 4; здесь AD - прямая, проходящая через A и параллельная BC.

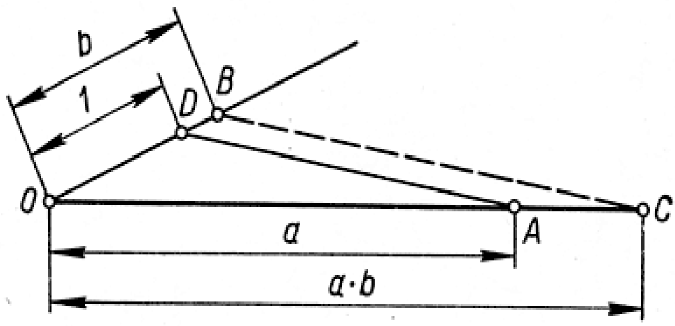

рис.4

Отсюда следует, что "рациональные" алгебраические операции – сложение, вычитание, умножение и деление,-производимые над заданными величинами, могут быть выполнены посредством геометрических построений. Исходя из данных отрезков, измеряемых действительными числами $a,b,c,\ldots$ мы можем, последовательно выполняя эти простые построения, построить любую величину, которая через $a,b,c,\ldots$ выражается рационально, т. е. с помощью лишь перечисленных выше четырех основных действий.

Множество всех величин, которые таким образом могут быть получены из $a,b,c,\ldots$ образует то, что называется числовым полем - множество чисел, обладающее тем свойством, что любая рациональная операция, совершенная над двумя (или более) элементами этого множества, приводит снова к элементу этого же множества. В рассматриваемом нами случае говорят, что поле порождается данными числами $a,b,c,\ldots$

Список использованной литературы

1. Блинков А. Д., Блинков Ю. А., Геометрические задачи на построение, М., МЦНМО, 2010.

2. Лозанцкий Э. Д., Математика, поступающим в вузы, Киев, Вища школа,1976.

3. Август Адлер., Теория геометрических построений / перевод с немецкого проф. Г. М. Фихтенгольца, Л., 1940.

4. Пойа Д., Математическое открытие, Москва, 2010.

5. R. Courant, H. Rorrins, What is Mathematics?,New York University , Oxford University Press, 1966.

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ ՌՈԲԵՐՏ
Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարանի
բնագիտության, կապի միջոցների և տեղեկատվական
տեխնոլոգիաների դեպարտամենտի ղեկավար, պրոֆեսոր
էլփոստ՝ rharutyunyan@shushitech.am
ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ ԼԻԱՆԱ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ,
Արցախի պետական համալսարանի դասախոս
էլփոստ՝ liana_abrahamyan@mail.ru
ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ ՎԱԼՅԱ
Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարանի դասախոս
էլփոստ՝ valyavardanmyan@mail.ru

Կառուցման խնդիրները դարեր շարունակ մեծ հետաքրքրություն են առաջացրել մաթեմատիկոսների շրջանում, որը պայմանավորված է ոչ միայն դրանց գեղեցկությամբ և լուծման մեթոդների ինքնատիպությամբ, այլև մեծ գործնական արժեքով: Շինարարական նախագծերը, ճարտարապետությունը, տարբեր սարքավորումների նախագծերը հիմնված են կառուցման խնդիրների վրա:

Կառուցման խնդիրների ավելի խորն ուսումնասիրությունը անխուսափելիորեն կապված է երկրաչափական խնդրի ներկայացմանը հանրահաշվի լեզվով: Աշխատանքում պատմական համառոտ ակնարկից հետո ցույց է տրվում, թե ինչպես տրված մեծությունների վրա «ռացիոնալ» հանրահաշվական գործողություններ՝ գումարում, հանում, բազմապատկում և բաժանում, կարելի է կատարել երկրաչափական կառուցումների միջոցով: Մասնավորապես երկու թվերի գումարը, արտադրյալը, տարբերությունը և քանորդը կառուցված են «միավոր» հատվածի հասկացության հիման վրա: Քննարկվող խնդրի մեջ կառուցվող թվերը առաջացնում են ռացիոնալ թվերի դաշտ՝ թվերի մի բազմություն, որն ունի այն հատկությունը, որ այդ բազմության երկու (կամ ավելի) տարրերի վրա կատարված ցանկացած ռացիոնալ գործողություն նորից հանգեցնում է նույն բազմության տարրի:

Բանալի բառեր՝ կառուցման խնդիր, հանրահաշվական գործողություն, լուծում, կառուցում, դաշտ:

ALGEBRAIC OPERATIONS IN CONSTRUCTION TASKS

HARUTYUNYAN ROBERT
Professor, Head of the Department of Natural Sciences,
Telecommunication and Information Technologies
Shushi Tech.University,
e-mail: rharutyunyan@shushitech.am
ABRAHAMYAN LIANA
PhD in Physics and Mathematics,
Associate Professor, Lecturer of Artsakh State University,
e-mail: liana_abrahamyan@mail.ru
VARDANYAN VALYA
Lecturer of Shushi Tech.University
e-mail: valyavardanmyan@mail.ru

Construction tasks have aroused great interest among mathematicians for many centuries. Interest in these problems is not only due to their beauty and originality of solution methods, but also to their great practical value. Construction design, architecture, design of various equipment are based on geometric constructions.

A more in-depth study of the possibility of geometric constructions is invertibly connected with the translation of a geometric problem into the language of algebra. In the work, after a brief historical sketch, it is shown how "rational" algebraic operations - addition, subtraction, multiplication and division performed on given quantities, can be performed by means of geometric constructions. In particular; the sum, product, difference and quotient of two numbers are constructed based on the concept of a "single" segment. In the problem under consideration, these numbers generate the field of rational numbers - a set of numbers that has the property that any rational operation performed on two (or more) elements of this set leads again to an element of the same set.

Keywords: construction task, solution, algebraic operation, construction, field.

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 15.09.2022թ.:
Հոդվածը գրախոսվել է 18.09.2022թ.: