НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ. ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОЛОСЕ

КУТУЗЯН НЕЛЛИ
Кандидат физико-математических наук, доцент,
Проректор Гаварского государственного университета
электронная почта: n.kutuzyan@gsu.am
ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ
Член корреспондент инженерной Академии Армении,
Доктор физико-математических наук, профессор,
преподаватель Гаварского государственного университета
электронная почта: lshekyan@mail.ru

В рамках теории С. П.Тимошенко [1] обобщенной модели изгиба балки, когда на прогибы балки влияют как поперечные, так и действующие на ее серединной линии продольные сжимающие или растягивающие силы, рассматривается плоская контактная задача об изгибе упругой балки на упругом шероховатом основании в виде полосы, нижняя горизонтальная грань которой защемлена.

Вертикальное упругое перемещение, которое получает контактирующаяся с балкой каждая граничная точка шероховатой полосы, представлено в виде суммы двух перемещений. Одно из этих перемещений обусловлено деформациями верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы и определяется по экспериментальным данным [2], а второе перемещение возникает вследствие глобальной деформации полосы и берется из решения соответствующей граничной задачи линейной теории упругости для упругой однородной изотропной полосы [3].

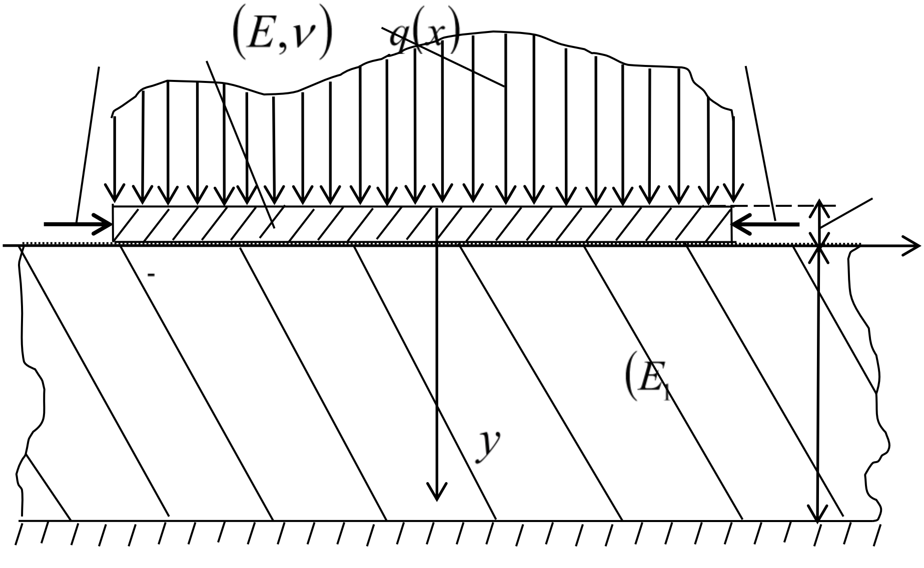
Задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [4] при дополнительных условий. Эффективное решение задачи получено по разработанной в [5] методике, основанной на теории Гаммерштейна [4] и принципа сжимающих отображений [6]. Получено приближенное аналитическое решение задачи.

Ввиду огромного теоретического и практического интереса существует множество работ по изгибу балок на упругом основании. Наиболее близкими к данной работе являются работа [7], где

предполагается, что слой абсолютно гладкий, а также работа [8], где внешняя поперечная распределенная нагрузка балки линейна.

Ключевые слова: *изгиб балки, однородная упругая полоса, шероховатость, поперечные и продольные силы, контактные напряжения.*

1. Постановка задач. Пусть балка длины $2a$, высоты h, модуля упругости E и коэффициента Пуассона υ под действием распределенных вертикальных сил интенсивности $q(x)$ $(-a \le x \le a)$ и осевых горизонтальных сжимающих сил T изгибаясь вдавливается в упругую бесконечную полосу толщиной h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, нижняя грань которой $y = h_1$ жестко защемлена (фиг.1).



Фиг. 1. Схема контактного взаимодействия тел.

Требуется определить законы распределения контактных давлений $p(x)$, действующих между балкой и полосой, вертикальные перемещения $\mathrm{v}(x)$ точек изогнутой оси балки, функции изгибающих моментов $M(x)$ и поперечных сил $Q(x)$ в сечениях балки.

2. Упругое равновесие балки. Дифференциальное уравнение изгиба балки поперечными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом влияние действующих вдоль серединной линии балки сжимающих сил T, по теории С. П. Тимошенко ([1], стр.422, формула (217), $T=-N_x, w=\mathrm{v}$, $N_y=N_{xy}=0$) имеет вид

$$D\frac{d^4\mathrm{v}}{dx^4}+T\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}=p(x)-q(x)\,,\ (-a<x<a) \tag{1}$$

где $D=Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$ – жесткость балки на изгиб. При этом функции $\mathrm{v}(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями

$$M(x)=D\frac{d^2\mathrm{v}}{dx^2}\,,\ Q(x)=D\frac{d^3\mathrm{v}}{dx^3}\,. \tag{2}$$

Уравнение (1) рассматривается при следующих граничных условиях $M(\pm a)=0$, или

$$(d^2\mathrm{v}/dx^2)\big|_{x=\pm a}=0\,, \tag{3}$$

указывающих на то, что в концевых точках балки $x=\pm a$ отсутствуют изгибающие моменты $M(x)$. При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^{a}[p(x)-q(x)]dx=0\ \Rightarrow\ \int_{-a}^{a}p(x)dx=\int_{-a}^{a}q(x)dx=P\,, \tag{4}$$

$$\int_{-a}^{a}x[p(x)-q(x)]dx=0\ \Rightarrow\ \int_{-a}^{a}xp(x)dx=\int_{-a}^{a}xq(x)dx=M\,, \tag{5}$$

где P и M являются соответственно величины главного вектора и относительно началу координат O главного момента заданной распределенной нагрузки $q(x)$.

Введя обозначения

$$k=\sqrt{T/D}\,,\ g(x)=[p(x)-q(x)]/D\,,\ y=d^2\mathrm{v}/dx^2\,, \tag{6}$$

вместо (1) получим относительно функции $y\equiv d^2\mathrm{v}/dx^2$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=g(x)\,,\ (-a<x<a)\,, \tag{7}$$

решение которого с учетом граничных условий (3) представляется формулой [7]

$$y \equiv \frac{d^2 \mathrm{v}}{dx^2} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^{a} \left(\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks \right) g(s) ds + \\ + \frac{1}{2k} \int_{-a}^{a} \sin\left(k|x-s|\right) g(s) ds. \tag{8}$$

Отсюда

$$\mathrm{v}(x) = \int_{-a}^{a} H(x,s) g(s) ds + k_0 x + \mathrm{v}_*, \ (-a \le x \le a) \tag{9}$$

где

$$H(x,s) = \int_0^x (x-t) \left[\frac{\cos^2 ka \sin kt \sin ks - \sin^2 ka \cos kt \cos ks}{k \sin 2ka} + \frac{\sin\left(k|t-s|\right)}{2k} \right] dt, \tag{10}$$

а v_0 и k_0 – постоянные интегрирования, характеризующие, соответственно, вертикальное перемещение точки и угловой коэффициент касательной к изогнутой оси балки в точке с координатой $x = 0$.

В случае осевых растягивающих сил T в уравнении (1) следует T заменить на $-T$. При этом, во всех предыдущих формулах следует параметр k формально заменить на ik, где i – мнимая единица, и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

3. Условие контакта балки со слоем и вывод основного интегрального уравнения задачи. Теперь рассмотрим упругое равновесие шероховатой полосы (фиг.1), нижняя $y = h_1$ грань которой жестко защемлена, а на участке $-a \le x \le a$ её верхней границы $y = 0$ приложенны нормальные контактные давления $p(x)$.

Вертикальное упругое перемещение $\mathrm{v}_1(x)$, которое получает точка с координатой x участки контакта $[-a; a]$ верхней граничны $y = 0$ полосы, согласно [2], представим в виде суммы двух перемещений

$$\mathrm{v}_1(x) = \mathrm{v}_{\text{шерох}}(x) + \mathrm{v}_{\text{глоб}}(x), \ (-a \le x \le a). \tag{11}$$

Перемещение $\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x)$ обусловлено деформациями верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы, которое, согласно экспериментам [2], пропорционально некоторой степени контактного давления $p(x)$ данной точки

$$\mathrm{v}_{\text{шерох}}(x) = A \cdot [p(x)]^{\beta}, \ (-a \le x \le a), \tag{12}$$

где A и β положительные постоянные, характеризующие шероховатость поверхности слоя, притом $0{,}3 < \beta \le 1$.

Перемещение $\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x)$ возникает вследствие глобальной деформации полосы. Оно определяется решеним плоской граничной задачи линейной теории упругости для упругой однородной изотропной полосы толщины h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, когда на участке $-a \le x \le a$ её верхней границы $y = 0$ приложены нормальные контактные давления $p(x)$, а нижняя граница $y = h_1$ жестко защемлена [3]

$$\mathrm{v}_{\text{глоб}}(x) = \frac{2\left(1-\upsilon_1^2\right)}{\pi E_1} \int_{-a}^{a} U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s)ds, \ (-a \le x \le a), \tag{13}$$

где ядерная функция $U(z)$ выражается формулой

$$U(z) = \int_0^{\infty} \frac{(2\varepsilon sh2t - 4t)\cos zt}{\varepsilon\left(2\varepsilon ch2t + 1 + \varepsilon^2 + 4t^2\right)} dt, \ (\varepsilon = 3 - 4\nu_1). \tag{14}$$

Далее, запишем условие контакта балки и упругой полосы:

$$\mathrm{v}(x) = \mathrm{v}_1(x), \ (-a \le x \le a), \tag{15}$$

которое согласно (9), (11)-(13) принимает вид

$$\int_{-a}^{a} H(x,s)g(s)ds + k_0 x + \mathrm{v}_* = A \cdot [p(x)]^{\beta} + \frac{2\left(1-\nu_1^2\right)}{\pi E_1} \int_{-a}^{a} U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s)ds,$$

$$(-a \le x \le a). \tag{16}$$

Учитывая обозначение функции $g(x)$ из (6), соотношение (16) можно трактовать как относительно $p(x)$ нелинейное интегральное уравнение. Так, как в уравнение (16) входят также неизвестные постоянные v_* и k_0, то нетрудно убедится, что уравнение (16) и условия равновесия (4)-(5) образуют замкнутую системи уравнений относительно $p(x)$, v_* и k_0. Коль скоро эти величины будут определены, соотношениями (2) и (9) можем определить также $\mathrm{v}(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$.

4. Исследование интегрального уравнения задачи и его решение. Ведем безразмерные величины

$$\xi=\frac{x}{a},\ \eta=\frac{s}{a},\ h_0=\frac{h_1}{a},\ \mathrm{m}=\frac{1}{\beta},\ \mathrm{v}_0=\frac{\mathrm{v}_*}{\mathrm{a}},\ P_0=\frac{\mathrm{A}^{\mathrm{m}}}{a^{m+1}}P,\ M_0=\frac{\mathrm{A}^{\mathrm{m}}}{a^{m+2}}M, \quad (17)$$

$$p_0(\xi)=\frac{A}{a}[p(x)]^{\beta},\ \ f(\xi,P_0,M_0)=D^{-1}\int_{-1}^{1}H(a\xi,a\eta)q(a\eta)d\eta. \quad (18)$$

$$\mathrm{H}_0(\xi,\eta)=\left(\frac{a}{A}\right)^m\cdot D^{-1}\mathrm{H}(x,s),\ U_0(z)=\frac{2(1-\nu_1)^2}{\pi E_1}\left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{z}{h_0}\right), \quad (19)$$

Тогда уравнение (16) переходит относительно неизвестной функции $p_0(\xi)$ к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [4]

$$p_0(\xi)=\int_{-1}^{1}[H_0(\xi,\eta)-U_0(\xi-\eta)]\cdot[p_0(\eta)]^m d\eta+f(\xi,P_0,M_0)+k_0\xi+\mathrm{v}_0,$$

$$(-1\le\xi\le1), \quad (20)$$

а условия равновесия (4)-(5) представим в виде

$$P_0=\int_{-1}^{1}[p_0(\xi)]^m d\xi,\ M_0=\int_{-1}^{1}[p_0(\xi)]^m \xi d\xi. \quad (21)$$

Таким образом решение поставленной плоской контактной задачи сводится к определению $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 из системы уравнений (20)-(21).

Эффективное решение системы (20)-(21), когда $q(x)$ линейная функция от x, получим согласно разработанной в [5] методике, основаной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [4] и принципа сжимающих отображении [6].

Сначала, исходя из обозначений (17)-(18) заметим, что $q_0(\xi)=0.5P_0+M_0\xi$, а из структуры уравнений (20)-(21) видно, что существенно легче из (20)-(21) установить зависимости $p_0(\xi)$, P_0 и M_0 от v_0 и k_0, которые, по существу являются искомые зависимости $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 от P_0 и M_0. Учитывая это, временно считаем, что значения v_0 и k_0 заданы и фиксированы, а P_0 и M_0 неизвестные. Тогда введя вектор $\bar{x}=\{p_0(\xi),P_0,M_0\}$ и представляя систему уравнений (20)-(21) в операторном виде $\bar{x}=G(\bar{x})$, её решение сводится к определению неподвижной точки этого нелинейного оператора G [6].

Пусть во множестве X, каждый элемент которого является совокупностью непрерывной в $\xi \in [-1;1]$ функции $p_0(\xi)$ двух произвольных чисел P_0 и M_0, введена метрика формулой

$$\rho(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \max_{-1 \le \xi \le 1} \left| p_{01}(\xi) - p_{02}(\xi) \right| + \left| P_{01} - P_{02} \right| + \left| M_{01} - M_{02} \right|, \quad (22)$$

где $\overline{x}_i = \{ p_{0,i}(\xi), P_{0,i}, M_{0,i} \}$ $(i = 1,2)$ – две произвольные элементы из X. Тогда множество X становится полным метрическим пространством [6]. Пусть, далее, $S(\overline{O}, r)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром $\overline{O} = \{0,0,0\}$ и с радиусом r. Способом, предложенным в [5], можно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор $\overline{y} = G(\overline{x})$ отображает шар $S(\overline{O}, r)$ в себе и в нем является сжимающим оператором. Тогда для любого начального элемента $\overline{x}_0 \in S(\overline{O}, r)$, формулами

$$\overline{x}_{i+1} = G(\overline{x}_i), \ (i = 0,1,2,\ldots) \quad (23)$$

или

$$p_{0,i+1}(\xi) = \int_{-1}^{1} \left[H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi - \eta) \right] \cdot \left[p_{0,i}(\eta) \right]^m d\eta + f(\xi, P_{0,i}, M_{0,i}) + k_0 \xi + \mathrm{v}_0,$$

$$(-1 \le \xi \le 1), \quad (24)$$

$$P_{0,i+1} = \int_{-1}^{1} \left[p_{0,i}(\xi) \right]^m d\xi, \ M_{0,i+1} = \int_{-1}^{1} \left[p_{0,i}(\xi) \right]^m \xi d\xi. \ (i = 0,1,2,\ldots) \quad (25)$$

получается последовательность приближенных решений $\{\overline{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$, которая по метрике (22) стремится к некоторому пределу $\overline{x}^*$, являющегося неподвижной точкой оператора G, т.е. $\overline{x}^* = G(\overline{x}^*)$. Следовательно, $\overline{x}^*$ соответствует единственному решению системы уравнений (20)-(21).

Принимая $\overline{x}_0 = \overline{O}$ в качестве нулевого приближения, из формул (24)-(25) получим решение системы уравнений (20)-(21) в первом приближении

$$p_{0,1}(\xi) = k_0 \xi + \mathrm{v}_0, \ (-1 \le \xi \le 1), \ P_{0,1} = 0, \ M_{0,1} = 0. \quad (26)$$

Учитывая (24)-(26) получим решение системы (20)-(21) во втором приближении

$$p_{0,2}(\xi)=\int_{-1}^{1}\left[H_0(\xi,\eta)-U_0(\xi-\eta)\right]\cdot\left(k_0\eta+\mathrm{v}_0\right)^m d\eta+k_0\xi+\mathrm{v}_0,\ \left(-1\le\xi\le 1\right) \quad (27)$$

$$P_{0,2}=\int_{-1}^{1}\left(k_0\xi+\mathrm{v}_0\right)^m d\xi,\ M_{0,2}=\int_{-1}^{1}\left(k_0\xi+\mathrm{v}_0\right)^m \xi d\xi. \quad (28)$$

Список использованной литературы

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.
2. Горячева И. Г., Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // ПММ, 1979, Т. 43, Вып.1, С. 99 -105.
3. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А., Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., Наука, 1974, 455 с.
4. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960, 300 с.
5. Мхитарян С. М., Шекян Л. А., Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленых из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1977, Т. 30, №3, С. 15 – 32.
6. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965. 360с.
7. Кутузян Н. А., Шекян Л. А., Распределение контактного давления между упругим слоем и балок, нагруженных поперечными и продольными силами, Сборник научных статей Гаварского гос. университета, №.2, 2015, С. 37-41.
8. Кутузян Н. А., Шекян А. Л., Шекян Л. А., Изгиб балки на упругой шероховатой полосе линейно распределенной поперечной нагрузкой при наличии осевых сжимающих сил, Сборник научных статей Гаварского гос. университета, №.4, 2017, С. 29-37.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ՝ ԿՈՂԱՅԻՆ ԵՎ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺԵՐՈՎ ԾՌՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ: ՀԵԾԱՆԻ ՃԿՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՀԱՐԹ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ:

ԿՈՒՏՈՒԶՅԱՆ ՆԵԼԼԻ
Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ
Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր
էլփոստ՝ n.kutuzyan@gsu.am
ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ
ՀՀ ԾԱ թղթ. անդամ, ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր,
Գավառի պետական համալսարանի դասախոս
էլփոստ՝ lshekyan@mail.ru

Հեծանների ճկման՝ Ս. Պ. Տիմոշենկոյի մշակած ընդհանրացված մոդելի շրջանակներում, երբ, լայնական ուժերից բացի, երկայնական սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանների ճկման վրա, դիտարկվել է առաձգական անհարթ շերտի վրա հեծանի ճկման հարթ հպակային խնդիրը՝ լայնական և երկայնական ուժերի առկայությամբ:

Խնդիրը բերված է հեծանի և շերտի միջև գործող անհայտ հպակային լարումների նկատմամբ Համմերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լուծմանը՝ լրացուցիչ պայմանների առկայությամբ: Խնդրի արդյունավետ լուծումը ստացվել է՝ այդ հավասարման նկատմամբ կիրառելով Համմերշտեյնի տեսությունը և սեղմող արտապատկերումների սկզբունքը: Բերված է խնդրի վերլուծական լուծումը առաջին և երկրորդ մոտավորությամբ:

Բանալի բառեր՝ *հեծանի ճկում, համասեռ առաձգական շերտ, անհարթություն, լայնական և երկայնական ուժեր, հպակային լարումներ:*

SOME PROBLEMS ABOUT BENDING OF BEAMS ON AN ELASTIC BASIS BY TRANSVERSE AND LONGITUDINAL FORCES. THE BENDING OF A BEAM ON AN ELASTIC ROUGH STRIP.

KUTUZYAN NELLI
PhD, Associate Professor
Vice-rector of Gavar State University
e-mail: n.kutuzyan@gsu.am
SHEKYAN LAVRENTI
Corresponding member of Eng. Acad. of Armenia, Doctor of Sciences, Professor
Lecturer of Gavar State University
e-mail: lshekyan@mail.ru

The contact problem of the beam bending of finite length on elastic foundation in the form of a rough strip in the plane strain conditions is considered in the framework of the generalized model of the bend by S.P.Timoshenko, where in addition to vertical forces, axial compressive or tensile forces also affect the deflection of the beam.

The problem is reduced to the solution of a nonlinear integral equation of Hammerstein type with the additional conditions. An effective solution to the problem is obtained by the developed methodology based on the theory of Hammerstein and the principle of contracting maps. An approximate analytical solution is obtained.

Key words: *beam bending, homogeneous elastic strip, roughness, transverse and longitudinal forces, contact stresses.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 10.07.2021թ.:
Հոդվածը գրախոսվել է 03.09.2021թ.: