1.	ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ NATURAL SCIENCES ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

К ЗАДАЧАМ ИЗГИБА БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ

УДК 539.3
DOI 10.56246/18294480-2022.12-01

КУТУЗЯН НЕЛЛИ
Кандидат физико-математических наук, доцент,
Проректор Гаварского государственного университета
электронная почта: n.kutuzyan@gsu.am
ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ
Член корреспондент инженерной Академии Армении,
доктор физико-математических наук, профессор
электронная почта: lshekyan@mail.ru

Приведен краткий обзор результатов теоретических исследований некоторых контактных задач теории упругости об изгибе балок на упругом основании, когда балки находятся под действием как поперечных, так и продольных сил. Эти исследования проведены в рамках теории С. П. Тимошенко [1] об изгибе балок при одновременном действии на них поперечных (изгибающих) и продольных (сжимающих или растягивающих) осевых сил.

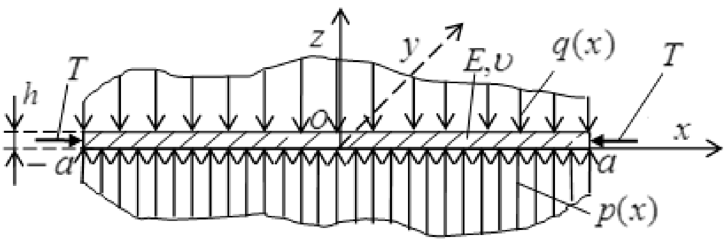
Проблемы, связанные с исследованием конструкций, лежащих на упругом основании, представляют собой одну из актуальных, сложных и наиболее интересных задач теории упругости. Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в различных физических допущениях, тесно примыкающие к классическим контактным задачам теории упругости, ввиду их актуальности и

практической значимости стали предметом исследования многих авторов, в частности [2,3].

Рассмотренные здесь задачи формулированы в виде сингулярного интегрального уравнения (СИУ) или нелинейного интегрального уравнения (НИУ) относительно нормальных контактных напряжений, действующих в контактной области между упругим основанием и балок. Эффективное решение указзанных СИУ получено путем непосредственного применения к ним численно-аналитического метода [4], основанного на формулах Гаусса для интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата многочленов Чебышева. Указанные НИУ решено на основе теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [5] и принципа сжимающих отображений [6]. Более подробно об исследованиях в данной области контактных задач теории упругости можно найти в наших работах, в частности, в сборниках научных статей Гаварского государственного университета.

Ключевые слова: *изгиб балки, упругое основание, шероховатость, поперечные и продольные силы, контактные напряжения.*

1. Изгиб балки поперечными и продольными силами. Рассмотрим дифференциальное уравнение сложного изгиба горизонтальной балки длиной $2a$ поперечными вертикальными силами $q(x)$ и $p(x)$ (фиг. 1), учитывая при этом по теории С.П. Тимошенко сжимающих горизонтальных сил T , приложенных на концах срединной линии балки [7].



Фиг. 1 Схема нагружённой одинарной балки

Дифференциальное равнение изгиба балки получается из общего дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластинки при совместном воздействии поперечных сил и сил в срединной плоскости пластинки, находящейся в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxz ([1], стр.422, формула 217, $T=-N_x$, $N_y=N_{xy}=0$). Оно имеет вид

$$D\frac{d^4w}{dx^4}+T\frac{d^2w}{dx^2}=p(x)-q(x)\,,\ (x\in[-a,a]). \tag{1}$$

Здесь $D=Eh^3/12(1-\upsilon^2)$ - изгибная жесткость пластины, гнущейся по цилиндрической поверхности, представляет собой жесткость балки-полоски прямоугольного поперечного сечения единичной ширины при плоской деформации ($\varepsilon_y=0$), E – её модуль упругости, υ – коэффициент Пуассона, h – высота, а $w(x)$ – вертикальные смещения точек $(x\in[-a,a])$ балки. В случае плоского напряженного состояния, жесткость на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения единичной ширины выражается формулой $D=Eh^3/12$.

Решение дифференциального уравнения (1) при $0<k<\pi/2a$, где $k=\sqrt{T/D}$, имеет вид

$$\frac{dw}{dx}=\frac{1}{2k^2D}\int_{-a}^{a}H(x,s)[p(s)-q(s)]ds+C\,,\ (-a\le x\le a) \tag{2}$$

где C – константа интегрирования,

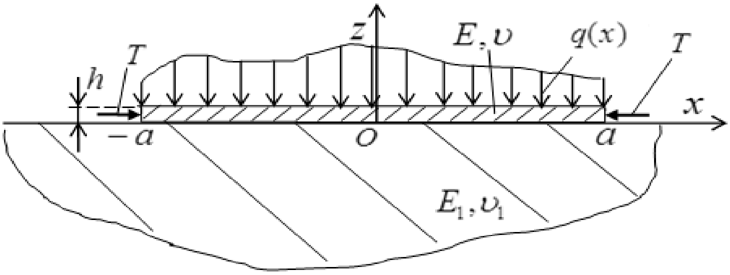
$$H(x,s)=\{1-\cos[k(x-s)]\}sign(x-s)+ctg(ka)[1-\cos(kx)]\sin(ks)-tg(ka)\sin(kx)\cos(ks). \tag{3}$$

В случае $k=\pi/2a$, получим $T=(\pi/2a)^2D$. Это первое критическое значение осевых сжимающих сил T, полученное формулой Эйлера [1] устойчивости сжатого стержня, когда изгибающие моменты в концевых точках балки $x=\pm a$ отсутствуют.

В случае $k>\pi/2a$ имеем $T>(\pi/2a)^2D$. Тогда балка потеряет устойчивость, независимо от наличия поперечных нагрузок $p(x)$ и $q(x)$.

В случае осевых растягивающих сил, следует в формуле (1) вместо коэффициента T поставить $-T$. При этом, в формуле (3), и в последующих всех формулах, вместо тригонометрических функций появятся соответствующие гиперболические функции.

2. Изгиб балки на упругой полуплоскости. Контактная задача об изгибе балки на упругой полуплоскости (фиг. 2) сводится относительно действующей между балкой и полуплоскостью контактного давления $p(x)$ к следующему СИУ:



Фиг. 2 Схема контакта балки и упругой полуплоскости

$$\frac{2(1-\upsilon_1^2)}{\pi E_1}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)ds}{s-x} = -\frac{1}{2k^2 D}\int_{-a}^{a} H(x,s)[p(s)-q(s)]ds + C, \ (-a<x<a). \quad (4)$$

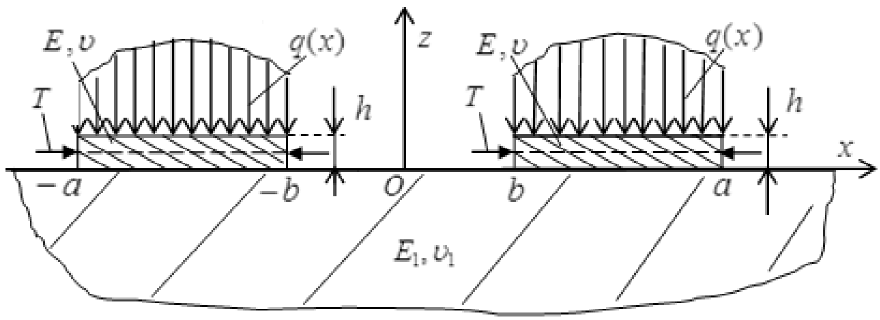
В случае абсолютно жестких балок $(E=\infty)$ СИУ (4) совпадает с интегральным уравнением плоской контактной задачи для упругой полуплоскости и штампа [7].

Решение СИУ (4) в окрестностях концевых точках балки $x=\pm a$ имеет корневую особенность вида

$$p(x)=\Phi(x)/\sqrt{a^2-x^2}, \ (-a<x<a), \quad (5)$$

где $\Phi(x)$- регулярная функция, притом $\Phi(\pm a)\neq 0$. Решение СИУ (4) построено численно-аналитическим методом [4,7].

3. Изгиб симметрично нагружённых двух одинаковых балок на упругой полуплоскости. Проводим результаты теоретического исследования плоской контактной задачи для двух одинаковых упругих балок и упругой нижней полуплоскости $z\leq 0$, контактирующихся вдоль системы участков $[-a,-b]\cup[b,a]$ граничной горизонтальной оси Ox (фиг. 3). Предполагается, что балки находятся под действием заданной, симметрично относительно оси Oz, распределённой поперечной нагрузки $q(x)$ и одинаковой по величине осевых сжимающих сил T, приложенных на концевых точках $x=\pm a$ и $x=\pm b$ срединных линий балок.



Фиг. 3. Схема контакта двух балок с упругой полуплоскостью.

Дифференциальное уравнение сложного изгиба горизонтальной правой балки поперечными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом по теории С.П. Тимошенко [1] сжимающих сил T, приложенных на концах срединной линии балки (см. фиг. 1), имеет вид (1) в отрезке $(x \in [b,a])$, а его решение, аналогично (2), имеет вид

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2k^2 D}\int_b^a \Phi_2(x,s)[p(s)-q(s)]ds + C\,,\ (b \le x \le a), \qquad (6)$$

где $\Phi_2(x,s)$ - регулярная функция. Тогда соответствующая контакта задачи сводится относительно $p(x)$ к следующему СИУ

$$-\frac{2(1-\upsilon_1^{\,2})}{\pi E_1}\int_b^a\left(\frac{1}{s-x}+\frac{1}{s+x}\right)p(s)ds = \frac{1}{2k^2 D}\int_b^a \Phi_2(x,s)[p(s)-q(s)]ds + C,$$
$$(b < x < a)\,. \qquad (7)$$

Далее введя безразмерные координаты и величины

$$\xi = \frac{2x}{a-b} - \frac{a+b}{a-b}\,,\ \varphi_2(\xi) = \frac{1}{E_1}\,p\!\left(\frac{a-b}{2}\xi + \frac{a+b}{2}\right)\ (-1 \le \xi \le 1), \qquad (8)$$

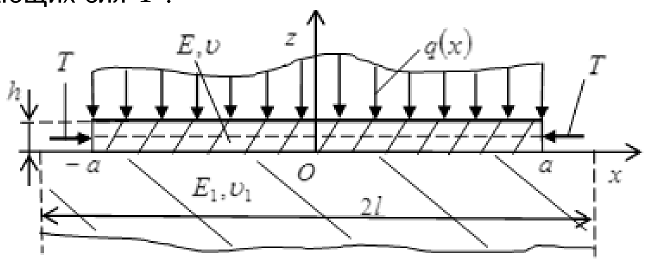
в результате, СИУ (7) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(\eta)d\eta}{\eta-\xi} + \frac{\lambda}{\pi k^2}\int_{-1}^{1}K_2(\xi,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta = \frac{\lambda}{\pi k^2}\,f_2(\xi) + \gamma\,,\ (-1 < \xi < 1) \qquad (9)$$

где $K_2(\xi,\eta)$ и $f_2(\xi)$- известные регулярные функции.

Решение СИУ (9), имеющую в окрестностях концевых точек $x = \pm a$ и $x = \pm b$ балок корневую особенность вида (5), также построено указанном выше численно-аналитическим методом [4].

4. Изгиб периодической системы балок на упругой полуплоскости. Перейдем теперь к решению поставленной плоской контактной задачи для периодической с периодом $2l$ системы балок длин $2a$ $(a<l)$, контактирующихся с упругой нижней полуплоскостью $z \le 0$ вдоль системы участков $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}[-a+2nl, a+2nl]$ горизонтальной оси Ox (фиг. 4). Предполагается, что балки изгибаются под действием заданной периодической с периодом $2l$ распределённой поперечной нагрузки $q(x)$ и одинаковой по величине осевых сжимающих сил T.



Фиг. 4. Схема контакта периодической системы балок с упругой полуплоскостью.

Аналогично (4), придём относительно $p(x)$ к следующему СИУ:

$$\frac{1-\upsilon_1^2}{E_1 l}\int_{-a}^{a} ctg\frac{\pi(s-x)}{2l}p(s)ds = \frac{1}{2k^2 D}\int_{-a}^{a} H(x,s)[p(s)-q(s)]ds + C$$

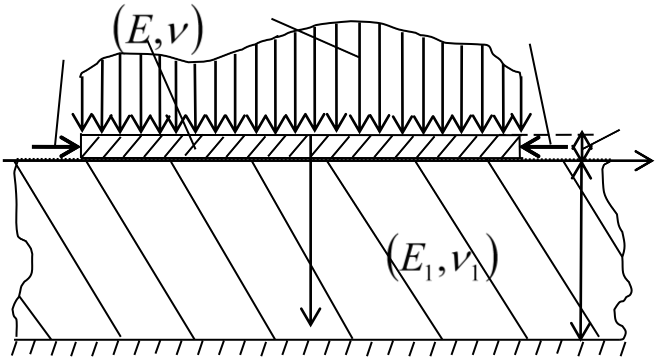
$$(-a<x<a). \qquad (10)$$

Введя новую неизвестную функцию, СИУ (10) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{u-t}+\frac{1+t\cdot tg^2(\alpha/2)}{1+t^2 tg^2(\alpha/2)}+\frac{\lambda_* tg(\alpha/2)}{1+t^2 tg^2(\alpha/2)}L(u,t)\right]\varphi_0(u)du =$$
$$= \frac{\lambda}{\pi}g_0(t)+\frac{\gamma_0 tg(\alpha/2)}{1+t^2 tg^2(\alpha/2)} \qquad (-1<t<1), \qquad (11)$$

Эффективное решение СИУ (11) получено тем численно-аналитическим методом, как в случае изгиба одного или двух балок.

5. Изгиб балки на упругой шероховатой полосе. Пусть горизонтальная балка длины $2a$ (фиг. 5), высоты h, модуля упругости E и коэффициента Пуассона υ, под действием распределенных вертикальных сил интенсивности $q(x)$ $(-a \le x \le a)$ и осевых сжимающих сил T, изгибаясь вдавливается в упругую горизонтальную бесконечную полосу толщиной h_1, с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, нижняя грань которой $y=h_1$ жестко защемлена.



Фиг. 5. Схема контактного взаимодействия тел.

Решение задачи сводится к решению следующего НИУ относительно закона распределения контактных давлений $p(x)$ $(-a \le x \le a)$, действующих между балкой и полосой

$$\int_{-a}^{a} H(x,s)g(s)ds + k_0 x + \mathrm{v}_* = A\cdot[p(x)]^{\beta} + \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1}\int_{-a}^{a} U\left(\frac{s-x}{h_1}\right)p(s)ds\,. \quad (12)$$

где $g(x) = [p(x) - q(x)]/D$, а ядерная функция $U(z)$, согласно [8], выражается формулой

$$U(z) = \int_0^{\infty} \frac{(2\varepsilon sh2t - 4t)\cos zt}{\varepsilon(2\varepsilon ch2t + 1 + \varepsilon^2 + 4t^2)}dt\,,\ (\varepsilon = 3 - 4\nu_1). \quad (13)$$

После нескольких преобразований, уравнение (12) переходит относительно безразмерного контактного давления $p_0(\xi)$ $(-1 \le \xi \le 1)$ к НИУ типа Гаммерштейна [5]

$$p_0(\xi) = \int_{-1}^{1}[H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta)]\cdot[p_0(\eta)]^m d\eta + f(\xi, P_0, M_0) + k_0\xi + \mathrm{v}_0\,. \quad (14)$$

Эффективное решение НИУ (14) получено на основании теории НИУ типа Гаммерштейна [5] и принципа сжимающих отображении [6].

Решение уравнения (14) первом приближении имеет вид

$$p_{0,1}(\xi) = k_0\xi + \mathrm{v}_0\,,\ (-1 \le \xi \le 1), \quad (15)$$

а во втором приближении - вид

$$p_{0,2}(\xi) = \int_{-1}^{1}[H_0(\xi,\eta) - U_0(\xi-\eta)]\cdot(k_0\eta + \mathrm{v}_0)^m d\eta + k_0\xi + \mathrm{v}_0\,. \quad (16)$$

6. Изгиб двух одинаковых балок на упругой шероховатой полосе. Наконец, рассматривается задача об изгибе на упругой шероховатой горизонтальной полосе двух одинаковых балок конечной длины, находящихся под действием заданной, симметрично распределённой поперечной нагрузки $q(x)$, $[q(-x)=q(x)]$, $(x\in[-a,-b]\cup[b,a],\ 0<b<a)$ и одинаковой по величине осевых сжимающих сил T, приложенных на концевых точках $x=\pm a$ и $x=\pm b$ срединных линий балок.

Задача сведена к решению НИУ типа Гаммерштейна [5]

$$\frac{1}{D}\int_b^a H(x,s)[p(s)-q(s)]ds+k_0\cdot(x-c)+\mathrm{v}_C=A\cdot[p(x)]^\beta+$$
$$+\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1}\int_b^a\left[U\left(\frac{s-x}{h_1}\right)+U\left(\frac{s+x}{h_1}\right)\right]p(s)ds,\quad (b\le x\le a). \tag{17}$$

где $c=(a+b)/2$,

$$H(x,s)=\int_c^x (x-t)\left[\frac{\cos^2 k(a-b)\sin kt\sin ks-\sin^2 k(a-b)\cos kt\cos ks}{k\sin 2k(a-b)}+\frac{\sin(k|t-s|)}{2k}\right]dt. \tag{18}$$

Далее, введя безразмерные величины и функции

$$\xi=\frac{x}{a},\ \eta=\frac{s}{a},\ h_0=\frac{h_1}{a},\ m=\frac{1}{\beta},\ \delta=\frac{b}{a}, \tag{19}$$

$$\mathrm{v}_0=\frac{\mathrm{v}_C}{\mathrm{a}},\ \mathrm{H}_0(\xi,\eta)=\left(\frac{a}{A}\right)^m\cdot\frac{\mathrm{H}(x,s)}{D},U_0(\mathrm{z})=\frac{2(1-\nu_1)^2}{\pi E_1}\left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{z}{h_0}\right), \tag{20}$$

$$p_0(\xi)=\frac{A}{a}[p(x)]^\beta,\ q_0(\xi)=D^{-1}\int_\delta^1 H(a\xi,a\eta)q(a\eta)d\eta, \tag{21}$$

$$L_0(\xi,\eta)=H_0(\xi,\eta)-U_0(\xi-\eta)-U_0(\xi+\eta), \tag{22}$$

уравнение (17) сводится относительно новой неизвестной функции $p_0(\xi)$ к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [5]

$$p_0(\xi)=\int_\delta^1 L_0(\xi,\eta)[p_0(\eta)]^m d\eta+q_0(\xi)+k_0\xi+\mathrm{v}_0,\ (\delta\le\xi\le1). \tag{23}$$

Приближенное аналитическое решение нелинейного интегрального уравнения (23) получено аналогино (15) и (16).

Список использованной литературы

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.

2. Власов В. З., Леонтьев Н.Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании, М.:, Физматгиз, 1960, 491 с.

3. Коренев Б. Г., Вопросы расчета балок и плит на упругом основании, М., Госстройиздат, 1954, 232 с.

4. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math., vol. 35, №1, 1997. P. 173-185.

5. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960, 300 с.

6. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., Наука, 1965, 360с.

7. Амирбекян А. Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шекян Л. А., О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учетом сдвигающих сил в ее срединной линии, Изв. НАН Армении, Механика. Т. 67, №1, 2014, Стр. 6-21.

8. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А., Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., Наука, 1974, 455 с.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ՝ ԿՈՂԱՅԻՆ ԵՎ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺԵՐՈՎ ՃԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԿՈՒՏՈՒԶՅԱՆ ՆԵԼԼԻ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ,
Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր
էլփոստ՝ n.kutuzyan@gsu.am
ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ
ՀՀ ԳԱ թղթակից անդամ,
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր
էլփոստ՝ lshekyan@mail.ru

Բերված է առաձգականության տեսության կոնտակտային մի շարք խնդիր-ների տեսական ուսումնասիրությունների արդյունքների համառոտ ակնարկը առաձգական հիմքի վրա հեծանների ճկման վերաբերյալ այն դեպքերի համար, երբ հեծանները գտնվում են ինչպես լայնական, այնպես էլ երկայնական ուժերի ազդեցության տակ: Այս ուսումնասիրություններն իրականացվել են ըստ Ս. Պ. Տիմոշենկոյի՝ հեծանների ճկման վերաբերյալ տեսության այն դրույթներ, երբ հեծանները գտնվում են լայնական (ծռող) և երկայնական (սեղմող կամ ձգող) առանցքային ուժերի միաժամանակյա ազդեցության տակ:

Առաձգական հիմքի վրա դրված կառույցների ուսումնասիրության հետ կապված խնդիրները առաձգականության տեսության հրատապ, բարդ և ամենահետաքրքիր իրողություններից են: Տարբեր ձևերով դեֆորմացվող հիմքերի վրա հեծանների, սալերի, թաղանթների տեսքով և տարբեր ֆիզիկական ազդեցությունների ներքո բարակ պատերով տարրերի ճկման խնդիրները, որոնք սերտորեն հարում են առաձգականության տեսության դասական կոնտակտային խնդիրներին, իրենց արդիականության և գործնական նշանակության շնորհիվ դարձել են բազմաթիվ մասնագետ-գիտնականների հետազոտության առարկա:

Հոդվածում դիտարկվող խնդիրները ձևակերպված են առաձգական հիմքի և հեծանների միջև եղած հպման տարածքում գործող նորմալ հպակային լարումների նկատմամբ սինգուլար ինտեգրալ հավասարման (ՍԻՀ) կամ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման (ՈԻՀ) տեսքով: Նշված ՍԻՀ-ների արդյունավետ լուծումը ստացվել է՝ նրանց վրա ուղղակիորեն կիրառելով թվային-վերլուծական մեթոդը, որը հիմնված է Կոշի տիպի ինտեգրալների և սովորական ինտեգրալների Գաուսի բանաձևերի վրա, և օգտագործելով Չեբիշևի բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատը: Այս ՈԻՀ-ները լուծվում են Համերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների տեսության և սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Այս ոլորտի հետազոտությունների մասին առավել մանրամասն տեղեկություն կարելի է գտնել մեր աշխատանքներում, որոնք հրատարակված են Գավառի պետական համալսարանի գիտական հոդվածների ժողովածուներում:

Բանալի բառեր՝ *հեծանների ճկում, առաձգական հիմք, անհարթություններ, լայնական և երկայնական ուժեր, հպակային լարումներ:*

ON THE PROBLEMS OF BENDING BEAMS ON AN ELASTIC BASE BY THE LATERAL AND LONGITUDINAL FORCES

KUTUZYAN NELLI
PhD, Associate Professor of Physical and Mathematical Sciences
Vice-Rector of Gavar State University
e-mail: n.kutuzyan@gsu.am
SHEKYAN LAVRENTI
Correspondent member of Engineering Academy of Armenia,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
e-mail: lshekyan@mail.ru

A brief overview of the results of the theoretical studies of some of the contact problems of the theory of elasticity is given on the bending of beams on the elastic basis, when the beams are under the influence of both transverse and longitudinal forces. These studies were carried out on the bending of beams by S.P. Tymoshenko's theory, when the beams are under the influence of both transverse (bending) and longitudinal (compression or tension) axial forces.

Problems related to the study of structures based on elasticity are one of the most urgent, complex and interesting problems in the theory of elasticity. Extensive classes of thin-walled bending elements, in the form of beams, plates, and shells, on various deformable bases, under various physical assumptions, closely related to the classical contact problems of the theory of elasticity, have been the subject of research by many authors.

The problems considered here are formulated as Singular Integral Equation (SIE) or Nonlinear Integral Equation (NIE) with respect to the normal contact stresses in the area of contact between the bases and the beams. The effective solution of these SIEs was obtained by applying the numerical-analytical method, based on the Gaussian formulas of Kosh-type integrals and ordinary integrals, using the method of Chebyshev polynomials. These NIEs are solved on the basis of Hammerstein's theory of nonlinear integral equations and the principle of compression representations. More information on research in this area can be found in our articles in Collections of Scientific Articles of Gavar State University.

Keywords: *beams bending, elastic base, roughness, transverse and longitudinal forces, contact stresses.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 10.02.2022թ.:
Հոդվածը գրախոսվել է 19.02.2022թ.: