УДК 539.3 Механика

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ

Евгения БАЛАСАНЯН

Բանալի բառեր *– ասիմպտոտիկ մեթոդ, փոքր պարամետր, լարում, տեղափոխություն, անիզոտրոպություն, երկշերտ, լրիվ կոնտակտ, ոչ լրիվ կոնտակտ:*
Ключевые слова *– асимптотический метод, малый параметр, напряжение, перемещение, анизотропия, двухслойная полоса, полный контакт, неполный контакт.*
Keywords *– asymptotic method, small parameter, stress, displacement, anisotropy, a two-layer stripe, full contact, incomplete contact.*

Եվ. Բալասանյան
Անիզոտրոպ երկշերտի երկու խառը եզրային խնդրների ասիմպտոտիկ լուծումը

Քննարկվում է անիզոտրոպ երկշերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը՝ շերտերի միջև լրիվ կամ ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում, որի երկայնական կողմերի վրա տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ կառուցված են կոնկրետ օրինակներ:

Ye. Balasanyan
The Asymptotic Solution of Two Mixed Boundary Problems of an Anisotropic Two-Layer Stripe

The article considers the problem of determination of stress-strain state in a two-dimensional problem for an asymptotic two-layer stripe with full or incomplete contact between the layers. Mixed boundary conditions of theory of elasticity are given in the longitudinal sides of the stripe. Solutions of the internal problems are constructed with the application of the asymptotic method. Some concrete examples are considered.

Обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в двухмерной задаче для анизотропной двухслойной полосы, при полном или неполном контакте между слоями, на продольных сторонах которой заданы смешанные краевые условия теории упругости. Асимптотическим методом построены решения внутренних задач. Рассмотрены конкретные примеры.

1. *Постановка задачи и основные соотношения.* В работе [1] асимптотическим методом построена приближенная теория изгиба пластин из изотропных материалов. Классические статические краевые задачи анизотропных полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в [3]. В [4] тем же методом определено напряженно-деформированное состояние слоистой полосы, слои которой обладают анизотропией общего вида. Было проведено сопоставление выведенных основных уравнений с соответствующими уравнениями классической теории слоистых полос. Смешанные краевые задачи для анизотропной пластинки решены в [6,7].

Рассматривается задача теории упругости для двухслойной анизотропной полосы: $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le l, -h_2 \le y \le h_1, h_1 + h_2 << l\}$. Величины, относящиеся к верхнему слою, отметим индексом (1), а к нижнему слою - индексом (2). Толщины слоев равны h_k а коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)} (k = 1,2)$, k - номер слоя. Выберем координатную систему таким образом, чтобы ось Ox располагалась между слоями.

На продольных сторонах полосы заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \varepsilon \sigma_{xy}^{+}(x), \quad u^{(1)} = \varepsilon u^{+}(x) \quad \text{при} \quad y = h_1,$$

$$\sigma_{yy}^{(2)} = \sigma_{yy}^{-}(x), \quad v^{(2)} = \varepsilon v^{-}(x) \quad \text{при} \quad y = -h_2. \qquad (1.1)$$

На полосу действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x^{(k)}(x,y)$ и $F_y^{(k)}(x,y)$. Краевые условия на торцах $x = 0, l$ пока произвольные.

На линии раздела слоев $y = 0$ должно выполняться одно из следующих двух условий:

Задача 1.(полный контакт)

$$u^{(1)} = u^{(2)},\ v^{(1)} = v^{(2)},\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)},\ \sigma_{y}^{(1)} = \sigma_{y}^{(2)}. \tag{1.2}$$

Задача 2.(неполный контакт)

$$v^{(1)} = v^{(2)},\ u^{(1)} - u^{(2)} = f(x),\ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)},\ \sigma_{y}^{(1)} = \sigma_{y}^{(2)}, \tag{1.3}$$

где $f(x)$ заданная функция.

Для решения поставленных задач будем исходить из двухмерных уравнений теории упругости [5]. Вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l,\ \zeta = y/h$ и безразмерные перемещения $U = u/l,\ V = v/l$, получим систему, которая содержит малый геометрический параметр $\varepsilon = h/l$. Также используются следующие обозначения $\zeta_1 = h_1/h,\ \zeta_2 = -h_2/h$. Решение полученной системы состоит из решений внутренней задачи и пограничного слоя.

Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы [1-4]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s} Q^{(k,s)},\ (k = 1,2), \tag{1.4}$$

где Q^{k} - любое из напряжений или безразмерных перемещений.

Значения для q_k подбираются таким образом, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(k,s)}$. Для рассматриваемой задачи эта цель достигается лишь при [3]:

$$q_k = -1 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)};\quad q_k = 0 \text{ для } \sigma_{xy}^{(k)}: \tag{1.5}$$

Вклад объемных сил в общее напряженное состояние будет соизмеримым с вкладом поверхностных сил, т.е. соответствующие слагаемые будут входить в уравнения исходного приближения, если

$$F_x^{(k)} = \varepsilon^{-1}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s} F_x^{(k,s)}(x,y),\quad F_y^{(k)} = \varepsilon^{-2}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{s} F_y^{(k,s)}(x,y) \tag{1.6}$$

Подставляя (1.4), с учетом (1.5) и (1.6) в преобразованные уравнения теории упругости и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x^{(k,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_x^{(k,s)} = 0\\
&\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{y}^{(k,s)}}{\partial \zeta} + F_y^{(k,s)} = 0\\
&\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)}\sigma_y^{(k,s)} + a_{16}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}\\
&\frac{\partial V^{(k,s)}}{\partial \zeta} = a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}\\
&\frac{\partial U^{(k,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi} = a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-2)}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Интегрируя полученную систему по ζ, получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(k,s)} = \sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta)\\
&V^{(k,s)} = v_0^{(k,s)} + v^{*(k,s)}(\xi,\zeta)\\
&U^{(k,s)} = u_0^{(k,s)} + u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d u_0^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_{y0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy0}^{(k,s)} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d^2 u_0^{(k,s)}}{d\xi^2}\zeta + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\frac{d\sigma_{y0}^{(k,s)}}{d\xi}\zeta + \sigma_{xy}^{*(k,s)},$$

где величины со звездочками, входящие в выражения (1.8), известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$\sigma_y^{(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k,s-1)}}{\partial \xi} + F_y^{(k,s)}\right)d\zeta \qquad \sigma_{xy}^{(k,s)} = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial \sigma_{x}^{(k,s)}}{\partial \xi} + F_x^{(k,s)}\right)d\zeta$$

$$v^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{22}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}\right)d\zeta$$

$$u^{*(k,s)} = \int_0^{\zeta}\left(a_{16}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{26}^{(k)}\sigma_y^{(k,s-1)} + a_{66}^{(k)}\sigma_{xy}^{(k,s-1)} - \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial \xi}\right)d\zeta \tag{1.9}$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{\partial u^{*(k,s)}}{\partial \xi} - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_y^{(k,s)} - \frac{a_{16}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_{xy}^{(k,s-1)}$$

Предполагается, что $Q^{(k,s-i)} \equiv 0$, если $s < i$.

$\sigma_{xy0}^{(k,s)}, \sigma_{y0}^{(k,s)}, u_0^{(k,s)}, v_0^{(k,s)}$ неизвестные функции интегрирования и будут определены ниже, с помощью условий (1.1) и (1.2) (задача 1) или (1.1) и (1.3) (задача 2).

2. *Решение внутренних задач.*

Задача 1.

Решением (1.8) удовлетворив условиям полного контакта слоев (1.2) получим:

$$u_0^{(1,s)} = u_0^{(2,s)},\; v_0^{(1,s)} = v_0^{(2,s)},\; \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)},\; \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)}. \tag{2.1}$$

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим все неизвестные функции интегрирования:

$$\sigma_{y0}^{(s)}(\xi) = \sigma_y^{+} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)$$

$$u_0^{(s)}(\xi) = u^{+} - u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)$$

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \sigma_{xy}^{-} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\frac{d^2u^{+}}{d\xi}\zeta_2 - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_y^{+}}{d\xi}\zeta_2 - \tag{2.2}$$

$$- \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\zeta_2 + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}\zeta_2 - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)$$

$$v_0^{(s)}(\xi) = v^{-} - v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2)$$

Здесь $\sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^{+}, \sigma_{xy}^{-(0)} = \sigma_{xy}^{-}, u^{+(0)} = u^{+}, v^{-(0)} = v^{-}, \sigma_y^{+(s)} = \sigma_{xy}^{-(s)} = 0, u^{+(s)} = v^{-(s)} = 0$ при $s > 0$.

Окончательное решение внутренней задачи представится в виде:

$$\sigma_y^{(k,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_y^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$V^{(k,s)} = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) + v^{*(k,s)}(\xi,\zeta) \tag{2.3}$$

$$U^{(k,s)} = u^{+(s)} - u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + u^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_x^{(k,s)} = \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{du^{+(s)}}{d\xi}\zeta_2 - \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_y^{+(s)} -$$

$$- \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{du^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi} + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1) + \sigma_x^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

$$\sigma_{xy}^{(k,s)} = \sigma_{xy}^{-(s)} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d^2u^{+(s)}}{d\xi^2}(\zeta-\zeta_2) + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi}(\zeta-\zeta_2) + \frac{1}{a_{11}^{(k)}}\frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi^2}(\zeta-\zeta_2) -$$

$$- \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}}\frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_1)}{d\xi}(\zeta-\zeta_2) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi,\zeta_2) - \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi,\zeta)$$

Задача 2.

Удовлетворив условиям неполного контакта (1.3) получим:

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \tau_{xy0}^{(2,s)},\ \sigma_{y0}^{(1,s)} = \tau_{y0}^{(2,s)},\ v_0^{(1,s)} = v_0^{(2,s)},$$
$$u^{(1,s)} = u^{(2,s)} + f^{(s)}(\xi), \quad f(\xi) = \varepsilon^{-1}\sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s} f^{(s)}(\xi) \tag{2.4}$$

Удовлетворив условиям (1.1), получим:

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \tau_{y0}^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-)$$
$$u_0^{(2,s)} = u^{+(s)} - u^{*(2,s)}(\xi,\zeta_-),\ u_0^{(1,s)} = u^{+(s)} - u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-) + f^{(s)}(\xi)$$
$$v_0^{(1,s)} = v_0^{(2,s)} = v^{-(s)}(\xi,\zeta_-) - v^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-)$$
$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \tau_{xy}^{-(s)} - \tau_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\left(\frac{d\sigma_y^{+}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-)}{d\xi}\right) +$$
$$+\frac{1}{a_{11}^{(1)}}\left[\frac{d^2u_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-)}{d\xi}\right]\zeta_- + \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\cdot\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi}\zeta_- \tag{2.5}$$

Пусть $f(\xi) = \chi\dfrac{l}{h}\sigma_{xy}(\xi,0)$, где коэффициент χ может принимать любое значение от 0 до ∞.

Тогда

$$u^{(1,s)} = u^{(2,s)} + \chi\frac{l}{h}\sigma_{xy0}^{(1,s)} \tag{2.6}$$

Подставив (2.6) в (2.5) для определения $\sigma_{xy0}^{(1,s)}$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\chi C_2\frac{d^2\sigma_{xy0}^{(1,s)}}{d\xi} + \sigma_{xy0}^{(1,s)} = p^{(s)}, \tag{2.7}$$

где

$$C_2 = -\frac{\zeta_-}{a_{11}^{(1)}},$$

$$p^{(s)} = \tau_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\cdot\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\cdot\frac{d^2u^{+(s)}}{d\xi}\zeta_- - \tau_{xy}^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-) +$$
$$+\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\cdot\frac{d^2\sigma_y^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-)}{d\xi}\zeta_- - \frac{1}{a_{11}^{(1)}}\cdot\frac{d^2u^{*(1,s)}(\xi,\zeta_-)}{d\xi}\zeta_-$$

Окончательное решение внутренней *задачи 2* получим после интегрирования дифференциального уравнения (2.7) с помощью формул (1.8) и (2.5).

3. Частные решения внутренней задачи.

а) Пусть

$$\sigma_y^{+} = -p,\quad \sigma_{xy}^{-} \equiv 0,\quad u^{+} = v^{-} = 0,\quad F_x^{(1)} \equiv 0,\ F_y^{(1)} = \rho_1 g, \tag{3.1}$$

отметим, что

$$\sigma_y^{(0)} = \sigma_y = -p,\ \sigma_y^{(s)} \equiv 0,\ F_y^{(1,0)} = \rho_1 g,\ F_y^{(1,s)} = 0, (s = 1,2,3,\ldots).$$

В рассматриваемой задаче асимптотический процесс обрывается при $s = 2$.

Точное решение задачи имеет вид

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{l}{h}\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}p + \frac{l}{h^2}\rho_1 g\left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}y - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}h_1\right)$$
$$\sigma_y^{(1)} = -\frac{l}{h}p - \frac{l}{h^2}(\rho_1 g y - \rho_1 g h_1)$$
$$\sigma_{xy}^{(1)} = 0$$

$$v^{(0)} = -\frac{l}{h}\left(p - \rho_y g \frac{h_1}{h}\right)\left[\frac{a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)} - \left(a_{12}^{(0)}\right)^2}{a_{11}^{(0)}} h_2 + \frac{a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)} - \left(a_{12}^{(0)}\right)^2}{a_{11}^{(0)}} y\right] +$$

$$+\frac{l}{2h^2}\left[\frac{a_{12}^{(0)}a_{12}^{(0)}\rho_x g - a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)}\rho_y g}{a_{11}^{(0)}} y^2 - \frac{a_{12}^{(0)}a_{12}^{(0)}\rho_x g - a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)}\rho_y g}{a_{11}^{(0)}} h_2^2\right] \quad (3.2)$$

$$u^{(0)} = \frac{l}{h}\left(p - \rho_y g \frac{h_1}{h}\right)\left[\frac{a_{12}^{(0)}a_{16}^{(0)} - a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} y - \frac{a_{12}^{(0)}a_{16}^{(0)} - a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} h_1\right] +$$

$$+\frac{l}{2h^2}\left[\frac{a_{12}^{(0)}a_{16}^{(0)}\rho_x g - a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)}\rho_y g}{a_{11}^{(0)}} y^2 - \frac{a_{12}^{(0)}a_{16}^{(0)}\rho_x g - a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)}\rho_x g}{a_{11}^{(0)}} h_1^2\right]$$

Когда объемные силы отсутствуют, формулы (3.2) упрощаются. Имеем

$$\sigma_x^{(0)} = \frac{l}{h}\frac{a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} p,\ \sigma_y^{(0)} = -\frac{l}{h} p,\ \sigma_{xy}^{(0)} = 0$$

$$v^{(0)} = -\frac{l}{h} p\left[\frac{a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)} - \left(a_{12}^{(0)}\right)^2}{a_{11}^{(0)}} h_2 + \frac{a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)} - \left(a_{12}^{(0)}\right)^2}{a_{11}^{(0)}} y\right] \quad (3.3)$$

$$u^{(0)} = \frac{l}{h} p\left[\frac{a_{12}^{(0)}a_{16}^{(0)} - a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} y - \frac{a_{12}^{(0)}a_{16}^{(0)} - a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} h_1\right].$$

б) Рассмотрим другой пример. Допустим

$$\sigma_{xy} = \tau = const,\quad u^{+} = v^{-} = 0,\quad \sigma_y = 0,\ F_x^{(k,s)} = F_y^{(k,s)} = 0, \quad (3.4)$$

отметим, что

$$\tau^{(0)} = \tau \quad \tau^{(s)} \equiv 0,\ s \geq 1.$$

В рассматриваемой задаче асимптотический процесс обрывается при $s = 0$.

Точное решение задачи имеет вид

$$\sigma_x^{(k)} = -\frac{a_{16}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\tau,\ \sigma_y^{(k)} = 0,\ \sigma_{xy}^{(k)} = \tau$$

$$v^{(0)} = \frac{l^2}{h^2}\left[\frac{a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)} - a_{16}^{(0)}a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} y - \frac{a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)} - a_{16}^{(0)}a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} y_2\right] \quad (3.5)$$

$$u^{(0)} = \frac{l^2}{h^2}\left[\frac{a_{11}^{(0)}a_{26}^{(0)} - a_{16}^{(0)}a_{16}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} y - \frac{a_{11}^{(0)}a_{66}^{(0)} - \left(a_{16}^{(0)}\right)^2}{a_{11}^{(0)}} h_1\right]$$

В заключении отметим, что одним лишь приведенным решением внутренней задачи нельзя точно удовлетворить торцевым условиям при $x = 0, l$. Для точного удовлетворения этим условиям необходимо построить также решение типа пограничного слоя.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости//ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С. 668-686.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука.1997. 415с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер.: Изд-во “Гитутюн” НАН РА. 2005. 468с.
4. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированном состояния анизотропной слоистой балки// Изв. АН Арм ССР. Механика. 1986. Т.39. № 2. С.3-14.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 268с.

6. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. // Изв. НАН РА Механика. 2009. т. 62. № 4. С. 65-72.
7. Баласанян Е.С., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластинки. Труды Межд. школы-конф. молодых ученых «Механика 2013». .Ереван-2013. С. 88-92.

Сведения об авторе:
Евгения Баласанян – преподаватель кафедры математики АрГУ,
E-mail majvazyan@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.