

Для каждой пар треугольников (Δ^n, Δ_0^n) применим лемму А.Д.Александрова. Получим, что угол $\angle ARQ^n = \alpha^n(z)$ не превосходит угла $\angle A_0R_0Q_0^n = \Pi_0^n(z)$. То есть $\alpha^n(z) \leq \Pi_0^n(z)$, для любого $n = 1, 2, \dots$

Как известно (см [3]), если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(z) = \alpha(z) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n(z) = \Pi_{\tau_0}(z), \quad (3)$$

то

$$\alpha(z) \leq \Pi_{\tau_0}(z).$$

Покажем, что эти пределы существуют. Для этого достаточно доказать, что последовательность отрезков $RQ^n(R_0Q_0^n)$ стремится к параллельному $l_1^+(l_{10}^+)$ лучу $\gamma_1^+(\gamma_{10}^+)$, где l_{10}^+ и γ_{10}^+ - лучи в плоскости Лобачевского кривизны τ_0 , „соответствующие“ лучам l_1^+ и γ_1^+ . Известно, что точка и луч в данной метрике определяют орицикл (см[4]) притом единственный. Обозначим орицикл, определяемый точкой R и лучом l_1^+ , через Ω_R^* . Пусть $\{R^n\}$ - последовательность точек, принадлежащих орициклу Ω_R^* (см [4]), граница которого Ω_R^* , и такой, что сходится в точке $R \in l_2^+$. Такой выбор гарантирует полнота рассматриваемой метрики. Очевидно, через каждую точку последовательности $\{R^n\}$ проходит некоторая геодезическая окружность, центр которой $Q^n \in l_1^+$. Построенная таким образом последовательность $Q^n \rightarrow \infty$, когда $R^n \rightarrow R$. Буземан доказал (см [1]), что радиусы геодезических окружностей сходятся к параллельному лучу, который ортогонален орициклу, и не зависит от выбора последовательности $\{R^n\}$ и $\{Q^n\}$.

Применяя неравенство треугольника для метрического пространства, находим связь между радиусами геодезических окружностей сходящиеся к параллельному l_1^+ лучу γ_1^+ и отрезками RQ^n . Именно

$$RQ^n \leq R^nQ^n + RR^n.$$

Отсюда следует, что RQ^n сходится к γ_1^+ . То есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(z) = \alpha(z)$. Что касается другого предела, то все рассуждения, приведенные выше, верны и для него, так как плоскость Лобачевского, как двумерное многообразие отрицательной кривизны, удовлетворяет всем требованиям рассматриваемого в работе [1]. Следовательно, аналогичным образом, заключаем, что отрезки $R_0Q_0^n$ сходятся к параллельному l_{10}^+ лучу γ_{10}^+ . То есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_0^n(z) = \Pi_{\tau_0}(z)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Функция $\alpha(z)$, определенная в теореме 1 монотонно убывает.

Доказательство. Пусть $z_1 > z$ (см. рисунок 2). Это значит, что длина дуги AR_1 больше длины дуги AR , где R и $R_1 \in l_2^+$. Рассмотрим треугольники $AR_1Q^n = T_1^n$ и $ARQ^n = T^n$, для которых основание AQ^n одно и тоже. Очевидно для каждой таких пар треугольников справедливо соотношение углов

$$\alpha^n(z_1) < \alpha^n(z), \quad (4)$$

где $\alpha^n(z_1) = \angle AR_1Q^n$, а $\alpha^n(z) = \angle ARQ^n$.

Действительно, так как $\angle AQ^nR < \angle AQ^nR_1$ (см [1]) и

$$\angle AR_1Q^n + \angle AQ^nR_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\angle ARQ^n + \angle AQ^nR < \frac{\pi}{2},$$

то из этих неравенств следует (4).

Известно (см [3]), что если существуют пределы последовательности, которые удовлетворяют неравенству (4), то, вообще говоря, они должны удовлетворять неравенству

$$\alpha(z_1) \leq \alpha(z), \quad (5)$$

где $\alpha(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(z_1)$, $\alpha(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(z)$.

Как показано в теореме 1, последние пределы существуют и аналогично отрезки R_1Q^n сходятся к параллельному l_{11}^+ лучу γ_{11}^+ . Так как параллельность для многообразия отрицательной кривизны удовлетворяет условию транзитивности (т.е. из $\tilde{p} \parallel \tilde{q}, \tilde{q} \parallel \tilde{\lambda}$ следует $\tilde{p} \parallel \tilde{\lambda}$. см [1]), то луч γ_{11}^+ параллелен лучу γ_1^+ .

Выражение (5) не может обращаться в равенство. Это означало бы, что на многообразиях отрицательной кривизны две параллельные прямые, пересеченные третьей прямой, образуют с ней равные внутренние односторонние углы, что невозможно. Следовательно $\alpha(z)$ - строго монотонно убывающая функция. Теорема доказана.

Пусть h_1 и h_2 - произвольные геодезические в метрике (1). Так как кривизна метрики отрицательна, то эти геодезические по крайней мере, в одну сторону расходятся. Ориентируем прямые так, как это было сделано в начале этого пункта. Теперь докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Для произвольных геодезических h_1 и h_2 существует такая точка $O_1 \in h_1$, что луч h_{12}^+ , проходящий через эту точку параллельно h_2^+ , составляет с лучом h_1^+ неострый угол. То есть $\angle h_1^+ O_1 h_{12}^+ \geq \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Возможны следующие случаи расположения прямых h_1 и h_2 :

- 1) h_1 и h_2 не пересекаются,
- 2) лучи h_1^+ и h_2^+ составляют острый угол.

Рассмотрим первый случай.

Пусть $h_{D_1}^+$ -луч, проходящий через точку $D_1 \in h_1^+$ параллельно лучу h_2^+ , где $D_1 = h_{D_1}^+ \cap h_1^+$. Предположим, что угол $\angle h_1^+ D_1 h_{D_1}^+$ - острый, ибо если не острый, то точка D_1 была бы искомой точкой. По теореме 2 этому углу, как углу параллельности, отвечает некоторый отрезок $D_1 D_2$, где $D_2 \in h_1^+$. Очевидно, любая точка $D_3 \in h_1^+$, для которой длина дуги $D_1 D_2$ меньше или равна длине дуги $D_1 D_3$, удовлетворяет теореме. Случай 2), очевидно, следует из уже приведенных рассуждений.

Если же, пересекаясь, лучи h_1^+ и h_2^+ составляют тупой угол, то, например, общая точка лучей h_1^+ и h_2^+ будет требуемой теоремой точкой.

Теорема 4. Пусть h_1 и h_2 - произвольные геодезические в метрике (1), $O_1 \in h_1^+$ - отвечающая теореме 3 точка, Ω_1^* - орицикл с центральным лучом h_1^+ , проходящим через точку O_1 . Пусть точка O_2 принадлежит “верхней”¹⁾ части орицикла Ω_1^* (см. рисунок 3). Тогда, если из точек O_1 и O_2 проведены лучи h_{12}^+ , h_{21}^+ и h_{22}^+ параллельны соответственно h_2^+ , h_1^+ и h_2^+ , то $\angle h_1^+ O_1 h_{12}^+ < \angle h_{21}^+ O_2 h_{22}^+$.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} \angle h_1^+ O_1 h_{12}^+ &= \theta_1, & \angle h_{21}^+ O_2 h_{22}^+ &= \theta_2, \\ \angle H_2 O_2 H_1 &= \theta_3, & \angle H_1 O_2 h_{21}^+ &= \beta_1, \\ \angle H_2 O_2 h_{22}^+ &= \beta_2, \end{aligned}$$

где H_1, H_2 - основания опущенных из точки O_2 перпендикуляров соответственно на h_1^+ и h_2^+ .

Из криволинейного четырехугольника $O_1 H_1 O_2 H_2$ с учетом отрицательности кривизны получим

$$\theta_1 + \theta_3 < \pi. \quad (6)$$

Далее, очевидно:

$$\theta_2 + \theta_3 + \beta_1 + \beta_2 = 2\pi \quad (7)$$

Учитывая (6) и (7) получим

$$\theta_2 - \theta_1 > \pi - (\beta_1 + \beta_2). \quad (8)$$

По теореме 1 имеем:

$$\beta_1 \leq \Pi_{\tau_1}(z_1) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \beta_2 \leq \Pi_{\tau_2}(z_2) \leq \frac{\pi}{2},$$

где $z_1 = H_1 O_2$, $z_2 = H_2 O_2$.

Согласно лемме, знак равенства в последних неравенствах означал бы изометрию “в целом” в некоторой области между метриками (1) и плоскостью Лобачевского Λ_{τ_1} и Λ_{τ_2} . Однако, как известно, это невозможно. Следовательно, $\pi - (\beta_1 + \beta_2) > 0$. То есть $\theta_2 > \theta_1$. Теорема доказан.

Замечание. Если точка $O \in (O_1, O_2) \subset \Omega_1^*$ и θ - угол аналогично углам θ_1 и θ_2 , то $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Следствие. Пусть Ω^* - орицикл с центральным лучом l^+ и $l^+ \cap \Omega^* = P$ (см. рисунок 4). Пусть точки $P_1, P_2 \in \Omega^*$ находятся в одной полуплоскости определенными l , длина дуги PP_1 орицикла Ω^* меньше длины дуги PP_2 , q_1^+, q_2^+ - центральные лучи орицикла, проходящие через P_1 и P_2 соответсвенно. Тогда $\angle C_2 P_2 q_2^+ < \angle C_1 P_1 q_1^+$, где $P_i C_i, i = 1, 2$, – отрезки геодезических проходящих через точки $P_i, i = 1, 2$ и ортогональны l^+ .

Доказательство. Очевидно $P_1 C_1 < P_2 C_2$. Пусть точка $D \in C_2 P_2$ такая, что длина дуги $P_1 C_1$ равна длине дуги $D C_2$. Пусть d^+ - центральный луч орицикла Ω^* , проходящий через точку D . Правее точки $C_2 \in l^+$ возьмем произвольную точку $P^n \in l^+$. Рассмотрим треугольники $C_1 P_1 P^n$ и $C_2 D P^n$, обозначив при этом $\angle C_2 D P^n = \Psi_2^n$, $\angle C_1 P_1 P^n = \Psi_1^n$. Нетрудно убедиться в том, что для этих углов при любом положении точки P^n справедливо соотношение $\Psi_2^n < \Psi_1^n$. Согласно рассуждениям, приведенным в ходе доказательства теоремы 1, получим

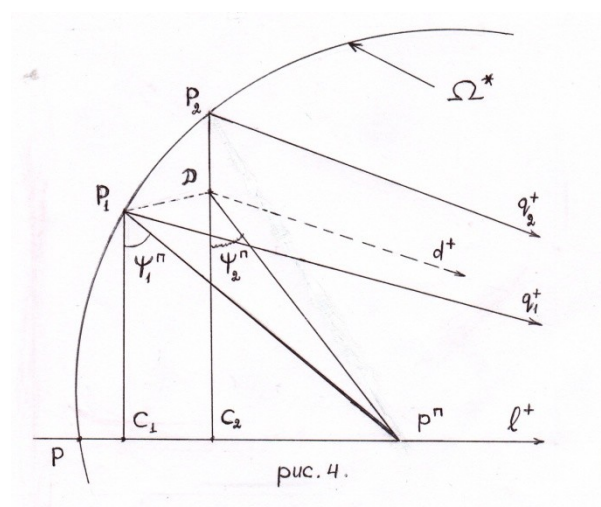
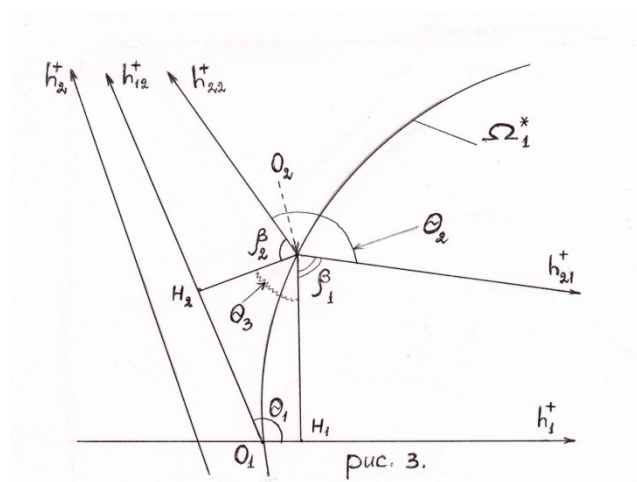
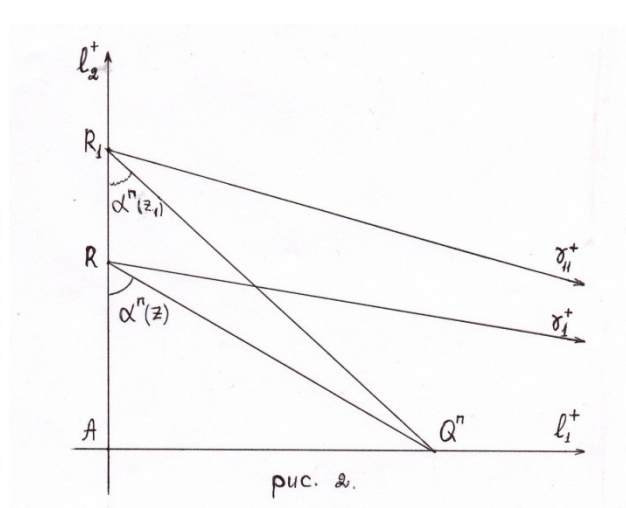
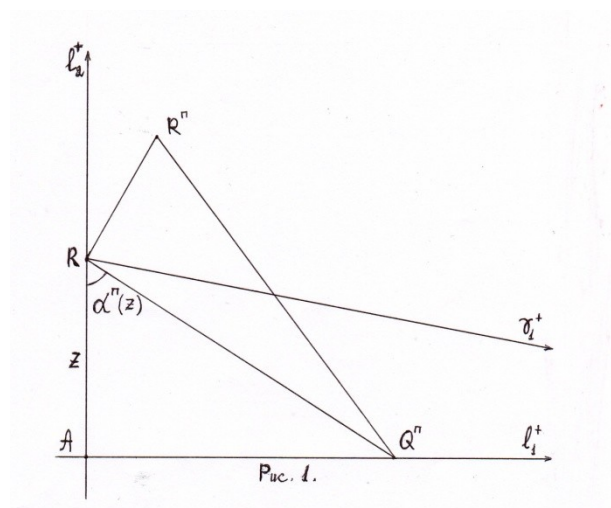
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_2^n = \Psi_2 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_1^n = \Psi_1,$$

причем

$$\Psi_2 = \angle C_2 D d^+, \quad \Psi_1 = \angle C_1 P_1 q_1^+.$$

Из этих рассуждений, вообще говоря, следует, что $\Psi_2 \leq \Psi_1$. Применяя теорему 2, получим, что $\Psi_2 \geq \angle C_2 P_2 q_2^+$. Следовательно, $\angle C_2 P_2 q_2^+ < \angle C_1 P_1 q_1^+$. Теорема доказана.

¹. Часть орицикла Ω_1^* , которая расположена в одну сторону от h_1 , что и h_2^+ , назовем “верхней” частью.



Литература

1. Буземан Г. Геометрия геодезических. –М. 1962.
2. Александров А.Д. Изопериметрические неравенства на кривых поверхностях //ДАН СССР. – 1945. –N4. –Ц 239-242.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. –М: Наука Т. I, 1982.
4. Шикин Е.В. Изометрические погружения в E^3 некомпактных областей неположительной кривизны: Дисс...д-ра физ-мат. наук. –М., 1976.

Сведения об авторе:

Роберт Мусаелян - к.ф.м.н., доцент кафедры математики и информатики
Горисского государственного университета
E-mail: rubmus49@gmail.com

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатрян.