*УДК:517.9* *Математика*

# О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОГО КЛАССА ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Георгий САAКЯН***

***Ключевые слова:*** *Система дифференциальных уравнений, неосцилляция, вырожденные матрицы.*
***Բանալի բառեր՝*** *Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր, ոչօսցիլյացիա, վերասերված մատրից:*
***Keywords:*** *Ordinary differential equations, non-oscillation, uninversible matrix.*

***Գ. Սահակյան***
***Մի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համասեռ համակարգերի դասի ոչօսցիլյացիայի մասին***

*Գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար ընդհանուր դեպքում գոյություն չունի այնպիսի հայտանիշ, որով որոշվում է այդ համակարգի այնպիսի բնութագրիչ, ինչպիսինն է օսցիլյացիան (ոչօսցիլյացիան): Այդ իմաստով կարևոր է ինչպես օսցիլյացիայի, այնպես նաև ոչօսցիլյացիայի հայտանիշների որոշումը որոշ դասերի համար(տես, օրինակ,[1]-[3]): Աշխատանքում ապացուցվում է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի մի դասի ոչօսցիլյացիան ամբողջ թվային առանցքի վրա: Լեմմա 2-ի և թեորեմ 1-ի պնդումները ընդհանրացնում են [4] աշխատանքում ստացված որոշ արդյունքները:*

***G.Sahakyan***
***About Non-Oscillation for One Class Homogeneous System of Ordinary Differential Equations***

*In general, for systems of ordinary differential equations there is no criterion that would determine such characteristic as the oscillation (non-oscillation) of the system: In this sense, the definition of the criteria of the oscillation and non-oscillation has a value for certain classes of systems (see, for example, [1]-[3]). For one class of system of linear differential equations the non-oscillation on all number line is proving in the work. The approvals of Lemma 2 and Theorem 1 generalize some results that are set out in the work [4].*

*Для систем дифференциальных уравнений в общем случае нет критерия, который определял бы такую характеристику, как осцилляция (неосцилляция) системы. В этом смысле имеет значение определение критериев, как осцилляции, так и неосцилляции для некоторых отдельных классов систем (см., например, [1]-[3]). В работе для одного класса систем дифференциальных уравнений доказывается их неосцилляция на всей числовой прямой. Утверждения леммы 2 и теоремы 1 обобщают некоторые результаты, полученные в работе [4].*

Рассматривается следующая однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n$ (см., например, [5])

$$\vec{y}' = 4\vec{y}, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

$a_{ij}\ (i, j = \ ,2,\ldots,n)$ -постоянные действительные числа. Обозначим через $A_i\ (A'_i),\ i = \ ,2,\ldots,n$ $i$ -ый столбец ($i$ -ую строку) матрицы. Тогда матрицу $A$ можно записать и в виде

$$A = \ A_1, A_2, \ldots, A_n]$$

или

$$A = \ A'_1\ A'_2; \ldots, A'_n].$$

**Определение 1.** Квадратная матрица $A$ называется вырожденной (см., например, [5]), если ее определитель равен нулю ($\det A = \ )$) .

**Определение 2.** Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим (см., например, [2]), если каждая из его компонент имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности, в противном случае называется неосциллирующим.

**Определение 3.** Система (1) называется осциллирующей, если ее каждое решение является осциллирующим, в противном случае называется неосциллирующей.

**Лемма 1.** *Квадратная матрица $A$ n-ого порядка $(n \geq 3)$, в которой для какой-то тройки чисел* $i \neq j \neq k$, $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$, *выполняется условие*

$$A_i - A_j = A_j - A_k \quad (A'_i - A'_j = A'_j - A'_k),$$

*является вырожденной.*

**Доказательство.** Предположим, что имеет место условие $A_i - A_j = A_j - A_k$ (аналогично проводится доказательство и во втором случае). Заменим в матрице $A$ $i$-ый столбец на $A_i - A_j$, а $k$-ый столбец на $A_j - A_k$. При этом, как нам известно, определитель матрицы $A$ не изменится. Однако, в полученной матрице, окажутся равными $i$-ый и $k$-ый столбцы. И, следовательно, определитель этой матрицы, а значит, и матрицы $A$, будет равен нулю.

**Следствие 1.** *Квадратная матрица n-ого порядка $(n \geq 3)$, в которой элементы хотя бы каких-то трех строк (столбцов) являются последовательными членами арифметической прогрессии, является вырожденной.*

**Лемма 2.** *Если элементы каждой отдельно взятой строки матрицы $A$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, то множество собственных значений матрицы $A$ содержит нуль кратности не меньше $n-2$.*

**Доказательство.** Предположим, что элементы каждой отдельно взятой строки матрицы $A$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии с начальными членами, равными $a_k$ и с разностью $d_k$ $(k = 1, 2, ..., n.)$. Проверим правильность утверждения леммы прежде всего при $n = 3$. Непосредственным вычислением найдем, что характеристическое уравнение матрицы $A$ при этом значении будет иметь вид

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_1 + d_1 & a_1 + 2d_1 \\ a_2 & a_2 + d_2 - \lambda & a_2 + 2d \\ a_3 & a_3 + d_3 & a_3 + 2d_3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_1 + (a_2 + d_2) + (a_3 + 2d_3))\lambda^2 -$$

$$-\left( \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \right)\lambda,$$

и, поскольку $\varphi(0) = 0$, то кратность собственного значения $\lambda = 0$ матрицы $A$ больше или равна единице.

В общем случае характеристическое уравнение матрицы $A$ будет иметь вид

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_1 + d_1 & a_1 + 2d_1 & ... & a_1 + (n-1)d_1 \\ a_2 & a_2 + d_2 - \lambda & a_2 + 2d_2 & ... & a_2 + (n-1)d_2 \\ a_3 & a_3 + d_3 & a_3 + 2d_3 - \lambda & ... & a_3 + (n-1)d_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n & a_n + d_n & a_n + 2d_n & ... & a_n + (n-1)d_n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Заметим прежде всего, что $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения матрицы $A$, поскольку, согласно следствию из леммы 1, $\varphi(0) = \det A = 0$. Далее, очевидно, что после вычисления последнего определителя, в полученном характеристическом уравнении матрицы $A$, коэффициентом при $\lambda$ окажется число $(-)^n$, а при $\lambda^{-}$ коэффициент будет равен

$$(-)^{n-}\left[ a_1 + a_2 + d_2) + \ldots + a_n + n- )d_n \right] = (-)^{n-} \sum_{k=}^{n} \left[ a_k + k- )d_k \right].$$

Покажем теперь, что $\lambda = 0$ является нулем характеристического уравнения матрицы $A$ кратности не меньше $n-1$. Для этого сначала преобразуем определитель $\varphi(\lambda)$, вычитая из каждого столбца матрицы, начиная со второго, предыдущий, и, записывая его на месте вычитаемого. Согласно известным свойствам определителя, при этом его значение не изменится. В результате получим

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & d_1+\lambda & d_1 & \ldots & d_1 \\ a_2 & d_2-\lambda & d_2+\lambda & \ldots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \ldots & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & d_n & d_n & \ldots & d_n-\lambda \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись формулой для определения производной определителя (см, например, [6]), будем иметь

$$\varphi'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & d_2-\lambda & d_2+\lambda & \ldots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \ldots & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & d_n & d_n & \ldots & d_n-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1-\lambda & d_1+\lambda & d_1 & \ldots & d_1 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \ldots & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & d_n & d_n & \ldots & d_n-\lambda \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1-\lambda & d_1+\lambda & d_1 & \ldots & d_1 \\ a_2 & d_2-\lambda & d_2+\lambda & \ldots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \ldots & d_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & - \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

При $n = 4$ эта формула (3) будет иметь вид

$$\varphi'(0) = \begin{vmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3 \\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & d_1 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ a_3 & d_3 & d_3 & d_4 \\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_2 & d_2 & d_2 \\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{vmatrix}.$$

Справа, в этом соотношении, во втором определителе просуммируем 2-ой и 3-ий столбцы, записав результат на месте 2-ого столбца, и затем вынесем 2 за определитель. В третьем определителе проделаем указанные действия с 3-им и 4-ыми столбцами, записав результат на месте третьего столбца. Учитывая свойства определителей, получим

$$\varphi'(0) = \begin{vmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3 \\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & d_3 & d_3 & d_4 \\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_2 & d_2 & d_2 \\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{vmatrix}.$$

В полученном соотношении справа все определители окажутся равными нулю, так как в каждом из них имеется по два одинаковых столбца.

В общем случае, при $n > 1$, в результате подстановки в соотношения (2) $\lambda = 0$, мы будем иметь

$$\varphi(0)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & \dots & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & \dots & d_1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & d_3 & d_3 & \dots & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & \dots & d_1 \\ a_2 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & \dots & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Из этого соотношения будет следовать, что $\varphi(0) = 0$, так как во всех определителях справа окажется как минимум по два одинаковых столбца, и следовательно, все они будут равны нулю.

Далее, заметим также, что в соотношении (2) каждый из определителей справа содержит по одной строке с постоянными числами. Отсюда, и из правилы дифференцирования определителя, будет следовать, что $\varphi'(\lambda)$ будет содержать определители, в которых одна из строк нулевая (и, следовательно, они равны нулю), или две какие-то строки состоят из постоянных чисел, причем в последнем случае хотя бы в одной строке рядом окажутся числа 1 и -1. При подстановке $\lambda = 0$, справа окажутся определители одного из трех типов, а именно:

1. определители, в которых совпадают как минимум два столбца,
2. определители, в которых суммированием элементов двух соседних столбцов, в каждом из которых по соседству находятся числа 1 и -1, и вынесением 2-и, получим определители с двумя совпадающими столбцами.
3. определители, в которых суммированием элементов трех соседних столбцов, в двух из которых по соседству находятся числа 1 и -1, и, вынесением 3-и, получим в определителях вновь два совпадающих столбца.

В каждом из этих случаев полученные определители будут равны нулю. Отсюда будет следовать, что при $n > 1$ $\varphi'(0) = 0$. Продолжив рассуждения вышеизложенным способом, мы придем к заключению, что $\varphi^{(n-2)}(0)$ будет содержать определители одного из трех вышеуказанных типов, и, следовательно, все они будут равны нулю. Таким образом, мы показали, что кратность собственного значения $\lambda = 0$ матрицы $A$ больше или равна $n-1$, что и требовалось доказать.

Заметим, что несложными вычислениями можно определить в характеристическом уравнении матрицы $A$ и коэффициент при $\lambda^{n-1}$ или, что то же самое значение $\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)$, и, следовательно, согласно лемме 2, и вид характеристического уравнения матрицы $A$. Вышепроведенные рассуждения показывают, что при вычислении $\varphi^{(n-1)}(0)$, мы столкнемся с определителями вида

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & \dots & d_1 & d_1 & \dots & d_1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\kappa & d_\kappa & \dots & d_k & d_\kappa & \dots & d_\kappa \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix},$$

в которых $n-2$ строчки содержат числа 0 и по соседству - 1 и -1, а две строки имеют вид $A_\kappa = (a_\kappa\ d_k\ d_k\ \dots\ d_k\ d_k)$. Нетрудно показать, что значение каждого из этих определителей можно представить в виде $(-1)^n k \cdot \begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+1} & d_{i+1} \end{vmatrix}$, $k = 1,2,\dots,n-1$; $i = 1,2,\dots,n-2$.

И, следовательно, для $\varphi^{(n-1)}(0)$ будем иметь

$$\varphi^{(n-2)}(0) = (-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k\cdot\begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+k} & d_{i+k}\end{vmatrix}.$$

Обобщив проведенные рассуждения, получим, что характеристическое уравнении для матрицы $A$ в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n\lambda^{n-2}(\lambda^2 - b\lambda + c),$$

где

$$b = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k + (k-1)d_k\right),\quad c = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k\cdot\begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+k} & d_{i+k}\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

**Следствие 2.** *Если элементы матрицы $A$, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам), являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, то множество собственных значений матрицы $A$ содержит нуль (кратности $n-2$) и два действительных числа противоположных знаков.*

Действительно, предположим, что элементы матрицы $A$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии с начальным членом равным $a$ и с разностью $d$. Для определения характеристического уравнения, заметим, что в данном случае $a_k = a + (k-1)nd,\ d_k = d$, и, следовательно, согласно формулам (3), будем иметь

$$b = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k + (k-1)d_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a + (k-1)nd + (k-1)d\right) = na + \frac{(n-1)n(n+1)}{2}d,$$

$$c = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k\cdot\begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+k} & d_{i+k}\end{vmatrix} = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k\cdot\begin{vmatrix} a+(i-1)nd & d \\ a+(i+k-1)nd & d\end{vmatrix} = -\frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}k^2nd^2 =$$

$$= -\frac{n}{(n-2)!}d^2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2.$$

Следовательно, характеристическое уравнение для матрицы $A$ в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n\lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - (na+m)\lambda + c\right),$$

где $m = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{2}d,\ c = -\dfrac{nd^2}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2$, откуда и будет следовать утверждение следствия.

**Теорема 1.** *Если элементы каждой строки матрицы $A$ являются последовательными членами некоторых арифметических прогрессий, то система* (1) *является неосциллирующей.*

**Доказательство.** Известно (см., например, [5]), что общее решение системы (1) можно представить в виде

$$\vec{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{m}\vec{g}_k(t)e^{\lambda_k t}, \qquad (4)$$

где $\lambda_k\ (k=1,2,...,m)$-отличные друг от друга собственные значения матрицы $A$, а координаты вектор-функции $\vec{g}_k(t)$ являются многочленами степени не выше $r_k-1$, где $r_k$–кратность собственного значения $\lambda_k$. Согласно утверждению леммы 2, собственными значениями матрицы $A$ будут 0 и некоторые числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Тогда общее решение системы (1), согласно (4), можно записать в виде

$$\vec{\varphi}(t) = c_1\vec{p}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{p}_2e^{\lambda_2 t} + \vec{g}(t),$$

где $\vec{g}(t)$– вектор-функция, компоненты которой являются многочленами степени не выше $n-3$, $c_1, c_2$–произвольные постоянные, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ –собственные векторы матрицы $A$, соответствующие собственным значениям $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Очевидно, что при $t\to\infty$ компоненты $\vec{\varphi}(t)$ по модулю будут стремиться к бесконечности, и, следовательно, система не может быть осциллирующей.

Ниже приводится построенная в среде MathCad графическая интерпретация утверждения теоремы 1 для решения системы

$$\begin{cases} y_0' = y_0 + 7y_1 + 13y_2, \\ y_1' = 3y_0 + 10y_1 + 17y_2, \\ y_2' = 5y_0 + 6y_1 + 7y_2 \end{cases}$$

при условии $y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) =$ .

$$\frac{d}{dt}y0(t) = y0(t) + \ 7\cdot y1(t) + \ 13\cdot y2(t) \qquad y0(0) = 1$$

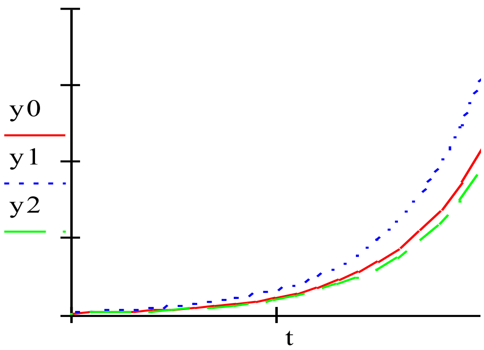
$$\frac{d}{dt}y1(t) = 3\cdot y0(t) + \ 10\cdot y1(t) + \ 17\cdot y2(t) \qquad y1(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y2(t) = 5\cdot y0(t) + \ 6\cdot y1(t) + \ 7\cdot y2(t) \qquad y2(0) = 1$$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_0 + 7\cdot Y_1 + 13\cdot Y_2 \\ 3\cdot Y_0 + 10 Y_1 + 17\cdot Y_2 \\ 5 Y_0 + 6\cdot Y_1 + 7\cdot Y_2 \end{pmatrix} \qquad t0 := 0 \qquad t1 := 10 \qquad Y0 := \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \qquad N := 1000$$

$$S := \mathrm{Rkadapt}(Y0, t0, t1, N, D)$$

$$t := S^{\langle\ \rangle} \qquad y0 := S^{\langle\ \rangle} \qquad y1 := S^{\langle\ \rangle} \qquad y2 := S^{\langle\ \rangle}$$




**Литература**


1. Butler G. J. Oscillation theorems for a non-linear analogue of Hill's equation, Quart. J. Math., 1976, 27, N106, 159-171.
2. Kinguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations. Archivum Mathematicum, vol. 14 (1978), № 1, 21-44.
3. Chantladze T., Kandelaki N. and Lomtatidze A. Oscillation and nonoscillation criteria for a second order linear equation. Georgian Math. J. 6 (1999), № 5, 401-404.
4. Саакян Г.Г. О некоторых классах неосциллирующих однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ученые записки АрГУ, 1/2014, стр.3-10.
5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2007.
6. Ղազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: Զանգակ-97, Երևան-2002:
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Мир, 1970.


**Сведения об авторе:**


**Георгий Саакян** - кандидат физ-мат. наук, проректор по учебной части АрГУ.
**E-mail:** ter_saak_george@mail.ru


Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.