УДК 004(519:628)

Информатика

Сережа САНДРЯН
доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ, к. ф.м.н.
E-mail: sandrun@yandex.ru,сот:097745598

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ս.Սանդրյան

ՈՐՈՇԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Մաթեմատիկայի կիրառություններում օգտագործողները հաճախ բախվում են անորոշ ինտեգրալների հաշվարկման, այսինքն՝ տված ֆունկցիայի նախնականը գտնելու խնդրի հետ:

Ինտեգրման գործողությունը ըստ էությամբ շատ ավելի բարդ է, քան դիֆերենցման գործողությունը: Միշտ չէ, որ ինտեգրման ընտրված ճանապարհը ճիշտ է և այն բերում է խնդրի լուծմանը:

Գործնականում անորոշ ինտեգրալների հաշվարկման ժամանակ օգտագործվում են տարբեր տեղեկատու գրքեր, մասնավորապես անորոշ ինտեգրալների աղյուսակներ: Ինտեգրման վերլուծական մեթոդները շատ դեպքերում հնարավորություն են տալիս գտնել ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի նախնականը:

Մաթեմատիկական վերլուծության դասընթացքից հայտնի է, որ անընդհատ ֆունկցիայի համար միշտ գոյություն ունի նախնականը: Այն դեպքում, երբ որոշ տարրական անընդհատ ֆունկցիայի $f(x)$ նախնականը նույնպես տարրական ֆունկցիա է, ապա ասում են, որ $\int f(x)\,dx$ ինտեգրալը «բերվող է», այսինքն. ինտեգրալը հնարավոր է հաշվել: Եթե ինտեգրալն հնարավոր չէ արտահայտել տարրական ֆունկցիաներով, ապա ասում են, որ այդ ինտեգրալը «չբերվող է», այսինքն. այն հնարավոր չէ հաշվել:

Մաթեմատիկական վերլուծության դասընթացից [1] հայտնի է նաև, որ որոշակի ինտեգրալի հաշվարկումը համաձայն Նյուտոն-Լեյբնիցի բանաձևի հանգեցնվում է $f(x)$ փունկցիայի նախնականը *F(x)* գտնելու խնդրին ($F(x)' = f(x)$).

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

Սակայն, անընդհատ ֆունկցիայի նախնականը գտնելու խնդիրը երբեմն շատ դժվար է, և որոշ անընդհատ ֆունկցիաների համար նախնականը չի կարող արտահայտվել տարրական ֆունկցիաներով: Կարելի է նշել նման մի քանի ֆունկցիաներ,ընդորում հենց այդ ֆունկցիաների որոշակի ինտեգրալներն են, որոնք հաճախ օգտագործվում են գիտության և պրակտիկայի տարբեր ոլորտներում: Նման դեպքերում կիրառվում են որոշակի ինտեգրալի հաշվարկման թվային մոտավոր մեթոդներ:

Աշխատանքում դիտարկվում է մեկ տիպային որոշակի ինտեգրալի մոտավոր հաշվարկման մոդելավորման մեթոդը (Մոնտե Կառլոյի մեթոդ) [2] : Այս մեթոդը կիրառվում է հաշվողական մաթեմատիկայի տարբեր ոլորտներում:

Աշխատանքում առաջարկվող տիպային ինտեգրալի օգնությամբ, համապատասխան կերպով ընտրելով $f(x)$ ֆունկցիան, կարելի է ստանալ տարբեր «չբերվող» ինտեգրալներ:

Այս տիպային ինտեգրալը կարելի է կիրառել կիրառական մաթեմատիկայի տարբեր ոլորտներում, մասնավորապես՝ զանգվածային սպասարկման և գործողությունների հետազոտության տեսություններում: Հենց դրանով է պայմանավորված աշխատանքի արդիականությունը:

Բանալի բառեր՝ որոշակի ինտեգրալ, նախնական ֆունկցիա, անընդհատ ֆունկցիա, մոդելավորում, մոտավոր *հաշվում,պատահական մեծություն,մաթեմատիկական սպասում, դիսպերսիա, միջին թվաբանական, մոտավոր հաշվարկ, հավանականություն:*

В приложениях математики пользователи часто сталкиваются с вычислением неопределенных интегралов, то есть с задачей нахождения первообразной.

Операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является правильным, не сложным.

На практике при вычислении неопределенных интегралов используют различные справочники в частности таблицы неопределенных интегралов. Аналитические методы интегрирования позволяют во многих случаях найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Из курса математического анализа известно, что для непрерывной функции существует

первообразная. В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ *является также элементарной функцией, то говорят, что интеграл* $\int f(x)\,dx$ *«берется» т.е. интеграл вычисляется. Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «не берется» т.е. его найти нельзя.*

Из курса математического анализа[1] также известно, что вычисление определенного интеграла согласно формуле Ньютона-Лейбница сводиться к задаче нахождения первообразной $F(x)$ *функции* $f(x)$ ($F(x)' = f(x)$),

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

однако задача нахождения первообразной от непрерывных функций иногда весьма сложна, а для некоторых непрерывных функций ее первообразная не выражается через элементарные функции. Можно указать несколько таких функций, притом именно эти определенные интегралы часто применяются в разных областях науки и практики. В таких случаях разрабатываются приближенные методы вычисления определенного интеграла.

В работе рассматривается метод имитационного моделирования (метод Монте-Карло) [2] для приближенного вычисления определенного интеграла. Этот метод применяется в самых разных областях вычислителной математики.

С помощью предлагаемого в роботе типа интеграла

выбирая функцию $f(x)$ подходящим образом можно получить различные «не берущиеся» интегралы. Данный тип интеграла имеет большое приложение в разных областях прикладной математики, в частности теории массового обслуживания и исследования операции. В этом и заключается актуальность работы.

Ключевые слова: *определенный интеграл, первообразная функция, непрерывная функция, моделирование, приближенное вычисление, случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, среднее арифметическое, приближенный расчет, вероятность.*

S.Sandryan

APPROXIMATE CALCULATION OF A DEFINITE INTEGRAL BY SIMULATION MODELING

In applications of mathematics, users are often faced with the calculation of indefinite integrals, that is, with the problem of finding the antiderivative.

The operation of integrating functions is much more complicated than the operation of differentiating functions. Not always the chosen way of integration is correct, not difficult.

In practice, when calculating indefinite integrals, various reference books are used, in particular tables of indefinite integrals. Analytic methods of integration make it possible in many cases to find the antiderivative function for the integrand.

From the course of mathematical analysis it is known that for a continuous function there is

primitive. In the case when the antiderivative of some elementary function $f(x)$ is also an elementary function, then we say that the integral $\int f(x)\,dx$ is "taken", i.e. the integral is calculated. If the integral is not expressed in terms of elementary functions, then they say that the integral is "not taken" i.e. it cannot be found.

It is also known from the course of mathematical analysis [1] that the calculation of a definite integral according to the Newton-Leibniz formula is reduced to the problem of finding the antiderivative $F(x)$ of the function f(x) $f(x)$ ($F(x)' = f(x)$),

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

however, the problem of finding the antiderivative of continuous functions is sometimes very difficult, and for some continuous functions its antiderivative cannot be expressed in terms of elementary functions. Several such functions can be indicated, and

it is precisely these definite integrals that are often used in various fields of science and practice. In such cases, approximate methods for calculating the definite integral are developed.

The paper considers the simulation method (Monte Carlo method) [2] for the approximate calculation of a certain integral. This method is used in various areas of computational mathematics.

With the help of the type of integral proposed in the robot, by choosing the function f(x) in an appropriate way, one can obtain various "not taken" integrals. This type of integral has a great application in various areas of applied mathematics, in particular, queuing theory and operation research. This is the relevance of the work.

Key words: *definite integral, antiderivative function, continuous function, simulation, approximate calculation, random variable, mathematical expectation, variance, arithmetic mean, approximate calculation, probability.*

Из курса математического анализа[1] известно, что вычисление определенного интеграла согласно формуле Ньютона-Лейбница сводиться к задаче нахождения первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ ($F(x)' = f(x)$),

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

однако задача нахождения первообразной от непрерывных функций иногда весьма сложна, а для некоторых непрерывных функций ее первообразная не выражается через элементарные функции. Можно указать несколько таких функций, притом именно эти определенные интегралы часто применяются в разных областях науки и практики. В таких случаях разрабатываются приближенные методы вычисления определенного интеграла.

В работе рассматривается метод имитационного моделирования (метод Монте-Карло) для приближенного вычисления определенного интеграла.

Общее описание метода Монте-Карло [3].Рассмотрим произвольную величину α. Чтобы определить величину α моделируется такую случайную величину ξ, у которой существует математическое ожидание $M[\xi]$ и

$$M[\xi] = \alpha. \qquad (1)$$

Для оценки неизвестной величины α, согласно методу Монте-Карло проводиться N реализаций $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ случайной величины ξ и вычисляется их среднее арифметическое

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i .$$

В теории вероятности установлена закономерность:Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ одинаково распределенных случайных величин у которых существуют математические ожидания конечная дисперсия, то среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к математическому ожиданию [2]:

$$\text{при } N \to \infty,\ \bar{\xi}_N \xrightarrow{P} M[\xi_i].$$

Согласно вышеуказанному закону больших чисел, как оценка для неизвестной величины α при больших N выбираются среднее арифметическое реализованных значений случайных величин ξ_i

$$a \approx \bar{\xi}_N \qquad (2)$$

Из курса теории вероятностей известно так же, что когда случайная величина ξ имеет конечную дисперсию $D[\xi]$, то вероятность погрешности в (2) с доверительной вероятностью β приблизительно равна [1]

$$\left|\bar{\xi}_N - a\right| < x_\beta\sqrt{D[\xi]/\mathrm{N}} \qquad (3)$$

Коэффициент доверия β в (3) устанавливает исследователь и по специальной таблице находят x_β.Часто используют значения коэффициента доверия $\beta = 0.997$, которому соответствует $x_\beta = 3$. Как правило при применении метода Монте-Карло для определения окончательной оценки погрешности в (3), значение дисперсии $D[\xi]$ неизвестно.

Разработка хорошей теоретической оценки для $D[\xi]$ это отдельная, самостоятельная задача. В работе как оценка для дисперсии случайной величины ξ применяется формула [2]

$$D[\xi] \approx \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 - \frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)^2 \qquad (4)$$

Постановка задачи. Вычислить тип интеграла

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x)e^{-\lambda x}dx$$

где $f(x)$ заданная непрерывная функция и $\lambda > 0$.

Для приближенного вычисления определенного интеграла методом Монет-Карло будем моделировать специальную случайную величину ξ с плотностью вероятностей

$$P_\xi(x) = \begin{cases} c\, e^{-\lambda x}, x \in [a,b] \\ 0, \quad x \overline{\in} [a,b] \end{cases}$$

где $c = \left(\frac{\lambda}{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}\right)$

Тогда

$$M[f(\xi)] = cI_{[a,b]} \qquad (5)$$

Теперь разыгрывается значение сложной случайной величины $\eta_i = f(\xi_i)$, где ξ_i является случайной величиной с плотностью $P_\xi(x)$.

Далее согласно методу Монте-Карло построим оценку для данного интеграла

$$\bar{\eta}_N \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_i \text{ и } I_{a,b} = \frac{1}{c}\bar{\eta}_N$$

Количество реализаций случайной величины η_i зависит от заданной точности приближенного вычисления определенного интеграла, который в работе устанавливается в процессе моделирования на основе формулы (4).

Теперь составим алгоритм для приближенного вычисления определенного интеграла с заданной точностью(ε).

Алгоритм вычисления интеграла

Шаг 1. Вводить функцию $f(x)$, параметр λ, точность – ε и интервалы интегрирования a и b.

Шаг 2.Моделировать случайную величину ξ_i по формуле:

$$\xi_i = a - \frac{1}{\lambda}ln(\gamma)$$

здесь γ равномерная распределенная случайная величина на интервале $[0,\beta]$ (где $\beta = 1 - \lambda e^{-\lambda a}$).

Шаг 3. Вычислить среднее арифметическое

$$\bar{\eta}_N \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

Шаг 4. Проверить точность приближения ξ по формуле (3). Если не выполняется, то вернуться к шагу 2.

Шаг 5. Вывести значение интеграла по формуле:

$$I_{[a,b]} = \frac{1}{c}\bar{\eta}_N$$

Литература

1 Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. 1, М.: Интеграл-Пресс, 2001.

2 Гнеденко Б.В., Курс теории вероятности, М.: Наука, 1975.

3 Соболь И.М., Численные методы Монте-Карло. Издательство «Наука», главная редакция физико-математической литературы, М.: 1973.

Նյութը ներկայացվել է 13.04.2023,
գրախոսման է ուղարկվել 25.05.2023,
տպագրության ընդունվել 22.06.2023:
Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը: