ՀՏԴ 539.3

Механика

Александр ХАЧАТРЯН
вед.науч. сотрудник Института Механики НАН РА, профессор, д.ф.м.н.

Гаянэ ПЕТРОСЯН
доцент кафедры математики АрГУ, к.ф.м.н.
E-mail: gayan-petrosian@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НЕПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Խաչատրյան Ա.Մ., Պետրոսյան Գ.Ա.
ԵՐԿՇԵՐՏ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԻ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՈՉ ԼՐԻՎ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ մեթոդով առաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից դուրս են բերված լարումների և չափում չունեցող տեղափոխությունների նկատմամբ մասնական ածանցյալներով եռաչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի ներքին լարված-դեֆորմացիոն վիճակի հաշվարկման համար, շերտերի միջև ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում: Գլանային թաղանթի արտաքին մակերևույթի վրա տրված են նորմալ լարման և տանգենցիալ տեղափոխությունների, իսկ ներքին մակերևույթի վրա՝ նորմալ տեղափոխության և տանգենցիալ լարումների արժեքները: Գլանի նյութը օժտված է ընդհանուր անիզոտրոպիայով, իսկ անիզոտրոպիայի առանցքը համընկնում է գլանի առանցքի հետ:

Գտնված են ուսումնասիրվող եզրային խնդրի բոլոր անհայտ մեծությունները, որոնք բավարարում են գլանային թաղանթի մակերևույթների վրա դրված և շերտերի ոչ լրիվ

կոնտակտի պայմաններին: Ասիմպտոտիկ մեթոդով ստացված է իտեռացիոն պրոցես, որը թույլ է տալիս որոշել երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի ներքին լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը նախապես տրված ճշտությամբ: Որոշված է երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը շերտերի միջև ոչ կոշտ կոնտակի դեպքում: Ոչ կոշտ կոնտակտի դեպքում ընդունվում է, որ իրար հպվող շերտերի միջև գոյություն ունի փոքր կոշտություն ունեցող բարակ շերտ:
Ստացված արդյունքների ճշմարտացիության ու կիրառելիության ցուցադրման համար դիտարկված է կոնկրետ օրինակ:

Բանալի բառեր՝ *ասիմպտոտիկ մեթոդ, երկշերտ անիզոտրոպ գլանային թաղանթ, խառը եզրային պայմաններ, ներքին խնդիր, ոչ լրիվ կոնտակտ:*

В работе обсуждается вопрос определения напряженно-деформированного состояния в трехмерной задаче для анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки, изготовленной из материалов, обладающих свойством общей анизотропии. Предполагается, что на внешней поверхности оболочки заданы значения нормального напряжения и тангенциальных перемещений, на внутренней поверхности – значения нормального перемещения и тангенциальных напряжений, на поверхности контакта – условия неполного контакта. Материалы оболочки обладают цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра.
Из уравнений теории упругости асимптотическим методом выведены трехмерные уравнения в частных производных по отношению к напряжениям и безразмерным перемещениям, для определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки.
Асимптотическим методом построен итерационный процесс, позволяющий определить внутреннее напряженно-деформированное состояние двухслойной анизотропной цилиндрической оболочки с заранее заданной асимптотической точностью. Определено напряженно-деформированное состояние анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки, при нежестким контактом между слоями. При нежестким контакте принимается, что между контактирующими средами существует слой с малой толщиной с исчезающе малой сдвиговой жесткостью.

В качестве иллюстрации рассмотрен частный пример.
Ключевые слова: *асимптотический метод, анизотропная двухслойная цилиндрическая оболочка, смешанные условия, внутренняя задача, неполной контакт.*

Khachatryan A.M., Petrosyan G.A.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF ONE MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM TWO-LAYER ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

The question of determining the stress-strain state in a three-dimensional problem for an anisotropic two-layer cylindrical shell, on the outer surface of which the values of normal stress and tangential displacements are specified, and on the inner surface – values of normal displacement and tangential stresses is discussed. Using the asymptotic method, the solution of the internal problem is constructed.

Three-dimensional equations in partial derivatives with respect to stresses and dimensionless displacements are derived from the equations of elasticity theory by an asymptotic method to determine the stress-strain state of a cylindrical shell.

An iterative process is constructed using the asymptotic method, which makes it possible to determine the internal stress-strain state of a two-layer anisotropic cylindrical shell with a predetermined asymptotic accuracy. The stress-strain state of an anisotropic two-layer cylindrical shell is determined, with non-rigid contact between the layers. In case of non-rigid contact, it is assumed that between the contacting layers there is a layer with a small thickness with vanishingly low shear rigidity.

Consider concrete example.

Key words: *asymptotic method, two-layer anisotropic cylindrical shell, mixed conditions, interior problem, incomplete contact.*

1. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе гипотезы Кирхгоффа-Лява для пакета в целом, а так же уточненные теории анизотропных слоистых пластин и оболочек построены и развиты в известных монографиях С.А. Амбарцумяна [1,2]. Асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния произвольной изотропной оболочки разработан А.Л. Гольденвейзером [3,4]. Л. А. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки, выявив характерные особенности, связанные с анизотропией. На основе уравнений теории упругости, асимптотическим методом, классические и некоторые классы неклассических краевых задач для тонких тел рассмотрены в монографиях [5,6]. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с общей анизотропией рассмотрен в работе [7]. На основе асимптотического метода построены итерационные процессы, описывающие возможные напряженные состояния в первой краевой задаче для цилиндрической оболочки. Вопрос определения напряженно-деформированного состояния в смешанной краевой задаче для анизотропной однослойной и двухслойной цилиндрической оболочки при полном контакте слоёв, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы смешанные условия теории упругости, обсуждены в работах [8,9]. Та же задача для анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы смешанные краевые условия теории упругости, обсуждено в работе [10]. В этих работах с применением асимптотического метода построены решения внутренней задачи.

Рассматривается трехмерная задача теории упругости для анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки радиуса длиной L, толщиной $2h$ и радиусом соприкосновения слоев R. Воспользуемся цилиндрической системой координат r,θ,x, при этом $x\in[0;L], r\in[R-h_2;R+h_1], \theta\in[0;\Theta], 0<\Theta\le 2\pi$. Материалы оболочки обладают цилиндрической анизотропией общего вида, а ось анизотропии совпадает с осью цилиндра. Величины, относящиеся к верхнему слою, отметим индексом (1), а к нижнему слою – индексом (2). Предполагается, что толщины и коэффициенты упругости слоев разные и равны, соответственно h_k и $a_{ij}^{(k)}$, k – номер слоя. Здесь, и последующем, $k=1,2$. На внешней и внутренней поверхностях оболочки заданы следующие условия теории упругости:

$$u_x^{(1)}=u_x^+(x,\theta),\ u_\theta^{(1)}=u_\theta^+(x,\theta),\ \sigma_r^{(1)}=\varepsilon^{-1}\sigma_r^+(x,\theta),\ \text{когда } r=R+h_1,$$
$$\sigma_{xr}^{(2)}=\varepsilon^{-1}\sigma_{xr}^-(x,\theta),\ \sigma_{r\theta}^{(2)}=\varepsilon^{-1}\sigma_{r\theta}^-(x,\theta),\ u_r^{(2)}=u_r^-(x,\theta),\ \text{когда } r=R-h_2, \qquad (1.1)$$

а на торцах $x=0,L$ и краях $\theta=0,\Theta$ могут быть заданы произвольные краевые условия. При $\Theta=2\pi$ имеем замкнутую цилиндрическую оболочку и вместо краевых условий при $\theta=0,\Theta$ необходимо задать условие периодичности напряжений и перемещений, то есть $Q^{(k)}(r,\theta+2\pi)=Q^{(k)}(r,\theta)$, где $Q^{(k)}$ любое из напряжений и перемещений.

Между слоями выполняется условие неполного контакта:

$$\sigma_{xr}^{(1)}=\sigma_{xr}^{(2)},\ \sigma_{\theta r}^{(1)}=\sigma_{\theta r}^{(2)},\ \sigma_r^{(1)}=\sigma_r^{(2)},\ u_r^{(1)}=u_r^{(2)},$$
$$u_x^{(2)}-u_x^{(1)}=f_1(x,\theta),\ u_\theta^{(2)}-u_\theta^{(1)}=f_2(x,\theta). \qquad (1.2)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки будем исходить из трехмерных уравнений теории упругости в цилиндрических координатах, в которые вводятся безразмерные координаты по формулам [7]

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{Rh}}, \zeta = \frac{r-R}{h}, \varphi = \theta\sqrt{\frac{R}{h}} \qquad (1.3)$$

и безразмерные перемещения $U_r^{(k)} = u_r^{(k)}/R, U_\theta^{(k)} = u_\theta^{(k)}/R, U_x^{(k)} = u_x^{(k)}/R$, в результате чего уравнения теории упругости будут содержать малый геометрический параметр $\varepsilon = \sqrt{h/R}$, где $2h = h_1 + h_2$.

Решение данной задачи складывается из решения внутренней задачи и решения типа пограничного слоя. Для решения внутренней задачи используется асимптотический метод интегрирования и все напряжения и перемещения представляются в виде суммы по степеням малого параметра [3-8]:

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{-q_k} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(k,s)}, \qquad (1.4)$$

где S число приближений, а целые числа q_k подбирается так, чтобы после подстановки (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости получить рекуррентную систему относительно искомых величин. В рассматриваемой задаче эта цель достигается при [5,6]

$q_k = 1$ для $\sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \sigma_{\theta x}^{(k)}, \sigma_{rx}^{(k)}, \sigma_{r\theta}^{(k)}$ и $q_k = 0$ для $U_r^{(k)}, U_\theta^{(k)}, U_x^{(k)}$.
(1.5)

Подставляя (1.4) в преобразованные уравнения теории упругости, с учетом (1.5), получим следующую систему (здесь и в последующем, для удобства записи, запятыми выделены частные производные):

$$\sigma_{r,\zeta}^{(k,s)} + \zeta\sigma_{r,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{r\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta\sigma_{rx,x}^{(k,s-3)} + \sigma_{rx,x}^{(k,s-1)} + \sigma_r^{(k,s-2)} - \sigma_\theta^{(k,s-2)} = 0,$$

$$\sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s)} + \zeta\sigma_{r\theta,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{\theta,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta\sigma_{\theta x,x}^{(k,s-3)} + \sigma_{\theta x,x}^{(k,s-1)} + 2\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} = 0,$$

$$\sigma_{rx,\zeta}^{(k,s)} + \zeta\sigma_{rx,\zeta}^{(k,s-2)} + \sigma_{\theta x,\varphi}^{(k,s-1)} + \zeta\sigma_{x,x}^{(k,s-3)} + \sigma_{x,x}^{(k,s-1)} + \sigma_{rx}^{(k,s-2)} = 0,$$

$$U_{x,x}^{(k,s)} = a_{11}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{12}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)} + a_{13}^{(k)}\sigma_r^{(k,s)} + a_{14}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{15}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{16}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s)}, \qquad (1.6)$$

$$U_{\theta,\varphi}^{(k,s)} + U_r^{(k,s-1)} = a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s)} + a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s)} + a_{23}^{(k)}\sigma_r^{(k,s)} + a_{24}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s)} + a_{25}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s)} +$$
$$+\zeta\left(a_{12}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-2)} + a_{22}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-2)} + a_{23}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-2)} + a_{24}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-2)} + a_{25}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-2)} + a_{26}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-2)}\right),$$

$$U_{r,\zeta}^{(k,s)} = a_{13}^{(k)}\sigma_x^{(k,s-1)} + a_{23}^{(k)}\sigma_\theta^{(k,s-1)} + a_{33}^{(k)}\sigma_r^{(k,s-1)} + a_{34}^{(k)}\sigma_{r\theta}^{(k,s-1)} + a_{35}^{(k)}\sigma_{rx}^{(k,s-1)} + a_{36}^{(k)}\sigma_{x\theta}^{(k,s-1)},$$

$$U_{q,z}^{(k,s)}+U_{r,j}^{(k,s-1)}+zU_{q,z}^{(k,s-2)}-U_{q}^{(k,s-2)}=$$

$$=a_{14}^{(k)}s_{x}^{(k,s)}+a_{24}^{(k)}s_{q}^{(k,s)}+a_{34}^{(k)}s_{r}^{(k,s)}+a_{44}^{(k)}s_{rq}^{(k,s)}+a_{45}^{(k)}s_{rx}^{(k,s)}+a_{46}^{(k)}s_{xq}^{(k,s)}+$$

$$+z\left(a_{14}^{(k)}s_{x}^{(k,s-3)}+a_{24}^{(k)}s_{q}^{(k,s-3)}+a_{34}^{(k)}s_{r}^{(k,s-3)}+a_{44}^{(k)}s_{rq}^{(k,s-3)}+a_{45}^{(k)}s_{rx}^{(k,s-3)}+a_{46}^{(k)}s_{xq}^{(k,s-3)}\right),$$

$$U_{x,z}^{(k,s)}+U_{r,x}^{(k,s-1)}=a_{15}^{(k)}s_{x}^{(k,s-1)}+a_{25}^{(k)}s_{q}^{(k,s-1)}+a_{35}^{(k)}s_{r}^{(k,s-1)}+a_{45}^{(k)}s_{rq}^{(k,s-1)}+a_{55}^{(k)}s_{rx}^{(k,s-1)}+a_{56}^{(k)}s_{xq}^{(k,s-1)},$$

$$U_{q,x}^{(k,s)}+U_{x,j}^{(k,s)}+zU_{q,x}^{(k,s-2)}=a_{16}^{(k)}s_{x}^{(k,s)}+a_{26}^{(k)}s_{q}^{(k,s)}+a_{36}^{(k)}s_{r}^{(k,s)}+a_{46}^{(k)}s_{rq}^{(k,s)}+a_{56}^{(k)}s_{rx}^{(k,s)}+a_{66}^{(k)}s_{xq}^{(k,s)}+$$

$$+z\left(a_{16}^{(k)}s_{x}^{(k,s-2)}+a_{26}^{(k)}s_{q}^{(k,s-2)}+a_{36}^{(k)}s_{r}^{(k,s-2)}+a_{46}^{(k)}s_{rq}^{(k,s-2)}+a_{56}^{(k)}s_{rx}^{(k,s-2)}+a_{66}^{(k)}s_{xq}^{(k,s-2)}\right).$$

Интегрируя систему (1.6) по z получим:

$$s_{rx}^{(k,s)}=s_{rx0}^{(k,s)}+s_{rx}^{*(k,s)},\ (x,q),\ s_{r}^{(k,s)}=s_{r0}^{(k,s)}+s_{r}^{*(k,s)},$$

$$U_{x}^{(k,s)}=U_{x0}^{(k,s)}+U_{x}^{*(k,s)},\ (x,q,r), \tag{1.7}$$

$$s_{xq}^{(k,s)}=c_{3}^{(k)}s_{r0}^{(k,s)}+c_{4}^{(k)}s_{rq0}^{(k,s)}+c_{5}^{(k)}s_{rx0}^{(k,s)}+t_{xq0}^{(k,s)}+s_{xq1}^{*(k,s)},$$

$$s_{x}^{(k,s)}=a_{3}^{(k)}s_{r0}^{(k,s)}+a_{4}^{(k)}s_{rq0}^{(k,s)}+a_{5}^{(k)}s_{rx0}^{(k,s)}+t_{x0}^{(k,s)}+s_{x1}^{*(k,s)},\ (x,q;a,b;4,5),$$

где

$$t_{x0}^{(k,s)}=B_{11}^{(k)}e_{1}^{(k,s)}+B_{12}^{(k)}e_{2}^{(k,s)}+B_{16}^{(k)}w^{(k,s)},\ \ (x,q;1,2),$$

$$t_{qx0}^{(k,s)}=B_{16}^{(k)}e_{1}^{(k,s)}+B_{26}^{(k)}e_{2}^{(k,s)}+B_{66}^{(k)}w^{(k,s)},$$

$$e_{1}^{(k,s)}=U_{x0,x}^{(k,s)},\ e_{2}^{(k,s)}=U_{q0,j}^{(k,s)},\ w^{(k,s)}=U_{q0,x}^{(k,s)}+U_{x0,j}^{(k,s)}, \tag{1.8}$$

$$a_{i}^{(k)}=\left(a_{i1}^{(k)}B_{11}^{(k)}+a_{i2}^{(k)}B_{12}^{(k)}+a_{i6}^{(k)}B_{16}^{(k)}\right),\ b_{i}^{(k)}=\left(a_{i1}^{(k)}B_{12}^{(k)}+a_{i2}^{(k)}B_{22}^{(k)}+a_{i6}^{(k)}B_{26}^{(k)}\right),$$

$$c_{i}^{(k)}=\left(a_{i1}^{(k)}B_{16}^{(k)}+a_{i2}^{(k)}B_{22}^{(k)}+a_{i6}^{(k)}B_{66}^{(k)}\right),\ (i=3,4,5).$$

Коэффициенты $B_{ij}^{(k)},\ a_{i}^{(k)},b_{i}^{(k)},\ c_{i}^{(k)}$ определяются по известным формулам [1,2,7], а величины со звездочками, входящие в формулы (1.7), как обычно, известны для каждого приближения s и определяются по формулам:

$$s_{x1}^{*(k,s)}=a_{3}^{(k)}s_{r}^{*(k,s)}+a_{4}^{(k)}s_{rq}^{*(k,s)}+a_{5}^{(k)}s_{rx}^{*(k,s)}+t_{x}^{*(k,s)}+B_{12}^{(k)}U_{r}^{(k,s-1)}+zB_{16}^{(k)}U_{q,x}^{(k,s-2)}+$$

$$+z\left(a_{1}'^{(k)}s_{x}^{(k,s-2)}+a_{2}'^{(k)}s_{q}^{(k,s-2)}+a_{3}'^{(k)}s_{r}^{(k,s-2)}+a_{4}'^{(k)}s_{rq}^{(k,s-2)}+a_{5}'^{(k)}s_{xr}^{(k,s-2)}+a_{6}'^{(k)}s_{xq}^{(k,s-2)}\right),$$

$$s_{q1}^{*(k,s)}=b_{3}^{(k)}s_{r}^{*(k,s)}+b_{4}^{(k)}s_{rq}^{*(k,s)}+b_{5}^{(k)}s_{rx}^{*(k,s)}+t_{q}^{*(k,s)}+B_{22}^{(k)}U_{r}^{(k,s-1)}+zB_{26}^{(k)}U_{q,x}^{(k,s-2)}+$$

$$+z\left(b_{2}'^{(k)}s_{x}^{(k,s-2)}+b_{2}'^{(k)}s_{q}^{(k,s-2)}+b_{3}'^{(k)}s_{r}^{(k,s-2)}+b_{4}'^{(k)}s_{rq}^{(k,s-2)}+b_{5}'^{(k)}s_{xr}^{(k,s-2)}+b_{6}'^{(k)}s_{xq}^{(k,s-2)}\right),$$

$$\sigma_{\xi\theta 1}^{*(k,s)}=c_3^{(k)}\sigma_{\rho}^{*(k,s)}+c_4^{(k)}\sigma_{\rho\theta}^{*(k,s)}+c_5^{(k)}\sigma_{\rho\xi}^{*(k,s)}+\tau_{\xi\theta}^{*(k,s)}+B_{26}^{(k)}U_{\rho}^{(k,s-1)}+\zeta B_{66}^{(k)}U_{\theta,\xi}^{(k,s-2)}+$$
$$+\zeta\left(c_2'^{(k)}\sigma_{\xi}^{(k,s-2)}+c_2'^{(k)}\sigma_{\theta}^{(k,s-2)}+c_3'^{(k)}\sigma_{\rho}^{(k,s-2)}+c_4'^{(k)}\sigma_{\rho\theta}^{(k,s-2)}+c_5'^{(k)}\sigma_{\xi\rho}^{(k,s-2)}+c_6'^{(k)}\sigma_{\xi\theta}^{(k,s-2)}\right),$$

$$\sigma_{\rho}^{*(k,s)}=-\int_0^{\zeta}\left[\sigma_{\rho\theta,\varphi}^{(k,s-1)}+\sigma_{\rho\xi,\xi}^{(k,s-1)}+\sigma_{\rho}^{(k,s-2)}-\sigma_{\theta}^{(k,s-2)}+\zeta\left(\sigma_{\rho,\zeta}^{(k,s-2)}+\sigma_{\xi\rho,\xi}^{(k,s-3)}\right)\right]d\zeta,$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{*(k,s)}=-\int_0^{\zeta}\left[\sigma_{\theta,\varphi}^{(k,s-1)}+\sigma_{\xi\theta,\xi}^{(k,s-1)}+2\sigma_{\rho\theta}^{(k,s-2)}+\zeta\left(\sigma_{\rho\theta,\zeta}^{(k,s-2)}+\sigma_{\xi\theta,\xi}^{(k,s-3)}\right)\right]d\zeta, \tag{1.9}$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{*(k,s)}=-\int_0^{\zeta}\left[\sigma_{\xi\theta,\varphi}^{(k,s-1)}+\sigma_{\xi,\xi}^{(k,s-1)}+\sigma_{\xi\rho}^{(k,s-2)}+\zeta\left(\sigma_{\rho\xi,\zeta}^{(k,s-2)}+\sigma_{\xi,\xi}^{(k,s-3)}\right)\right]d\zeta,$$

$$U_{\rho}^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\left[a_{13}^{(k)}\sigma_{\xi}^{(k,s-1)}+a_{23}^{(k)}\sigma_{\theta}^{(k,s-1)}+a_{33}^{(k)}\sigma_{\rho}^{(k,s-1)}+a_{34}^{(k)}\sigma_{\rho\theta}^{(k,s-1)}+a_{35}^{(k)}\sigma_{\xi\rho}^{(k,s-1)}+a_{36}^{(k)}\sigma_{\xi\theta}^{(k,s-1)}\right]d\zeta,$$

$$U_{\theta}^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\left[a_{14}^{(k)}\sigma_{\xi}^{(k,s-1)}+a_{24}^{(k)}\sigma_{\theta}^{(k,s-1)}+a_{34}^{(k)}\sigma_{\rho}^{(k,s-1)}+a_{44}^{(k)}\sigma_{\rho\theta}^{(k,s-1)}+a_{45}^{(k)}\sigma_{\xi\rho}^{(k,s-1)}+\right.$$
$$+a_{46}^{(k)}\sigma_{\xi\theta}^{(k,s-1)}+U_{\theta}^{(k,s-2)}+\zeta\left(a_{14}^{(k)}\sigma_{\xi}^{(k,s-3)}+a_{24}^{(k)}\sigma_{\theta}^{(k,s-3)}+a_{34}^{(k)}\sigma_{\rho}^{(k,s-3)}+\right.$$
$$\left.\left.+a_{44}^{(k)}\sigma_{\rho\theta}^{(k,s-3)}+a_{45}^{(k)}\sigma_{\xi\rho}^{(k,s-3)}+a_{46}^{(k)}\sigma_{\xi\theta}^{(k,s-3)}+U_{\theta,\zeta}^{(k,s-2)}\right)-U_{\rho,\varphi}^{(k,s-1)}\right]d\zeta,$$

$$U_{\xi}^{*(k,s)}=\int_0^{\zeta}\left[a_{15}^{(k)}\sigma_{\xi}^{(k,s-1)}+a_{25}^{(k)}\sigma_{\theta}^{(k,s-1)}+a_{35}^{(k)}\sigma_{\rho}^{(k,s-1)}+a_{45}^{(k)}\sigma_{\rho\theta}^{(k,s-1)}+a_{55}^{(k)}\sigma_{\xi\rho}^{(k,s-1)}+a_{56}^{(k)}\sigma_{\xi\theta}^{(k,s-1)}-U_{\rho,\xi}^{(k,s-1)}\right]d\zeta,$$

$$\tau_{\xi}^{*(k,s)}=B_{11}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{12}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{16}^{(k)}\omega^{*(k,s)},(\xi,\theta;1,2),$$
$$\tau_{\xi\theta}^{*(k,s)}=B_{16}^{(k)}\varepsilon_1^{*(k,s)}+B_{26}^{(k)}\varepsilon_2^{*(k,s)}+B_{66}^{(k)}\omega^{*(k,s)},$$
$$\varepsilon_1^{*(k,s)}=U_{\xi,\xi}^{*(k,s)},\ \varepsilon_2^{*(k,s)}=U_{\theta,\varphi}^{*(k,s)},\ \omega^{*(k,s)}=U_{\theta,\xi}^{*(k,s)}+U_{\xi,\varphi}^{*(k,s)},\ \varepsilon_0^{(k,s)}=U_{\theta,\xi}^{(k,s)},$$
$$a_i'^{(k)}=-\left(a_{2i}^{(k)}B_{12}^{(k)}+a_{4i}^{(k)}B_{16}^{(k)}\right),\ b_i'^{(k)}=-\left(a_{2i}^{(k)}B_{22}^{(k)}+a_{4i}^{(k)}B_{26}^{(k)}\right),$$
$$c_i'^{(k)}=-\left(a_{2i}^{(k)}B_{26}^{(k)}+a_{4i}^{(k)}B_{66}^{(k)}\right),\ (i=1,2,\ldots,6).$$

Предполагается, что $\Theta^{(s-m)}\equiv 0$, если $s<m$.

Неизвестные функции интегрирования $\tau_{\rho\xi 0}^{(k,s)},\tau_{\rho\theta 0}^{(k,s)},\tau_{\rho 0}^{(k,s)},U_{\xi 0}^{(k,s)},U_{\theta 0}^{(k,s)},U_{\rho 0}^{(k,s)}$ определяются из условий (1.1) и (1.2).

Решением (1.7) удовлетворив условиям неполного контакта слоев (1.2), получим:

$$\sigma_{\xi\rho 0}^{(1,s)}=\sigma_{\xi\rho 0}^{(2,s)},\ \sigma_{\theta\rho 0}^{(1,s)}=\sigma_{\theta\rho 0}^{(2,s)},\ \sigma_{\rho 0}^{(1,s)}=\sigma_{\rho 0}^{(2,s)},\ U_{\rho 0}^{(1,s)}=U_{\rho 0}^{(2,s)},$$
$$U_{\xi 0}^{(2,s)}=U_{\xi 0}^{(1,s)}+f_1^{(s)}(\xi,\varphi),\ U_{\theta 0}^{(2,s)}=U_{\theta 0}^{(1,s)}+f_2^{(s)}(\xi,\varphi), \tag{1.10}$$

где

$$f_k^{(0)}(x,j)=f_k\left(x\sqrt{Rh},j\sqrt{\frac{h}{R}}\right),\ \ k=1,2\ ,$$

$f_k^{(s)}(x,j)=0$, когда $s>0$, $k=1,2$.

Удовлетворив поверхностным условиям (1.1), определим неизвестные функции интегрирования:

$$s_{rx0}^{(2,s)}=s_{rx}^{-(s)}(x,j)-s_{xr}^{*(2,s)}(x,j,z_2),\ (x,q),\qquad s_{r0}^{(1,s)}=s_r^{+(s)}(x,j)-s_r^{*(1,s)}(x,j,z_1),$$
$$U_{x0}^{(1,s)}=u_x^{+(s)}(x,j)-U_x^{*(1,s)}(x,j,z_1),\ (x,q),\qquad U_{r0}^{(2,s)}=u_r^{-(s)}(x,j)-U_r^{*(2,s)}(x,j,z_2),$$
$$U_{x0}^{(2,s)}=u_x^{+(s)}(x,j)-U_x^{*(1,s)}(x,j,z_1)+f_1^{(s)}(x,j),\ \left(x,q;f_1^{(s)},f_2^{(s)}\right).$$
(1.11)

Из (1.7), с учетом (1.11), получим окончательное решение поставленной задачи:

$$s_r^{(k,s)}=s_r^{+(s)}+s_r^{*(k,s)}(x,j,z)-s_r^{*(1,s)}(x,j,z_1),$$
$$s_{rx}^{(k,s)}=s_{rx}^{-(s)}+s_{rx}^{*(k,s)}(x,j,z)-s_{rx}^{*(2,s)}(x,j,z_2),\ (x,q),$$
$$U_x^{(1,s)}=u_x^{+(s)}+U_x^{*(1,s)}(x,j,z)-U_x^{*(1,s)}(x,j,z_1),\ (x,q),$$
$$U_x^{(2,s)}=u_x^{+(s)}+U_x^{*(2,s)}(x,j,z)-U_x^{*(1,s)}(x,j,z_1)+f_1^{(s)}(x,j),\ (x,q),$$
$$U_r^{(k,s)}=u_r^{-(s)}+U_r^{*(k,s)}(x,j,z)-U_r^{*(2,s)}(x,j,z_2),\tag{1.12}$$
$$s_x^{(1,s)}=a_3^{(1)}s_r^{+(s)}+a_4^{(1)}s_{rq}^{-(s)}+a_5^{(1)}s_{rx}^{-(s)}+B_{11}^{(1)}u_{x,x}^{+(s)}+B_{12}^{(1)}u_{q,j}^{+(s)}+B_{16}^{(1)}\left(u_{q,x}^{+(s)}+u_{x,j}^{+(s)}\right)+s_x^{*(1,s)}(x,j,z),$$
$$s_x^{(2,s)}=a_3^{(2)}s_r^{+(s)}+a_4^{(2)}s_{rq}^{-(s)}+a_5^{(2)}s_{rx}^{-(s)}+B_{11}^{(2)}u_{x,x}^{+(s)}+B_{12}^{(2)}u_{q,j}^{+(s)}+B_{16}^{(2)}\left(u_{q,x}^{+(s)}+u_{x,j}^{+(s)}\right)+$$
$$+B_{11}^{(2)}f_{1,x}^{(s)}+B_{12}^{(2)}f_{2,j}^{(s)}+B_{16}^{(2)}\left(f_{2,x}^{(s)}+f_{1,j}^{(s)}\right)+s_x^{*(2,s)}(x,j,z),\ \ (x,q;x,j;a,b;1,2),$$
$$s_{xq}^{(1,s)}=c_3^{(1)}s_r^{+(s)}+c_4^{(4)}s_{rq}^{-(s)}+c_5^{(1)}s_{rx}^{-(s)}+B_{16}^{(1)}u_{x,x}^{+(s)}+B_{26}^{(1)}u_{q,j}^{+(s)}+B_{66}^{(1)}\left(u_{q,x}^{+(s)}+u_{x,j}^{+(s)}\right)+s_{xq}^{*(1,s)}(x,j,z),$$
$$s_{xq}^{(2,s)}=c_3^{(2)}s_r^{+(s)}+c_4^{(2)}s_{rq}^{-(s)}+c_5^{(2)}s_{rx}^{-(s)}+B_{16}^{(2)}u_{x,x}^{+(s)}+B_{26}^{(2)}u_{q,j}^{+(s)}+B_{66}^{(2)}\left(u_{q,x}^{+(s)}+u_{x,j}^{+(s)}\right)+$$
$$+B_{16}^{(2)}f_{1,x}^{(s)}+B_{26}^{(2)}f_{2,j}^{(s)}+B_{66}^{(2)}\left(f_{2,x}^{(s)}+f_{1,j}^{(s)}\right)+s_{xq}^{*(2,s)}(x,j,z).$$

где

$$s_x^{*(k,s)}(x,j,z)=s_{x1}^{*(k,s)}(x,j,z)-a_3^{(k)}s_r^{*(1,s)}(x,j,z_1)-a_4^{(k)}s_{rq}^{*(2,s)}(x,j,z_2)-a_5^{(k)}s_{rx}^{*(2,s)}(x,j,z_2)-$$
$$-B_{11}^{(k)}U_{x,x}^{*(1,s)}(x,j,z_1)-B_{12}^{(k)}U_{q,j}^{*(1,s)}(x,j,z_1)-B_{16}^{(k)}\left(U_{q,x}^{*(1,s)}(x,j,z_1)+U_{x,j}^{*(1,s)}(x,j,z_1)\right),$$
$$(x,q;x,j;a,b;1,2),$$
(1.13)
$$s_{xq}^{*(k,s)}(x,j,z)=s_{xq1}^{*(k,s)}(x,j,z)-c_3^{(k)}s_r^{*(1,s)}(x,j,z_1)-c_4^{(k)}s_{rq}^{*(2,s)}(x,j,z_2)-c_5^{(5)}s_{rx}^{*(2,s)}(x,j,z_2)-$$
$$-B_{16}^{(k)}U_{x,x}^{*(1,s)}(x,j,z_1)-B_{26}^{(k)}U_{q,j}^{*(1,s)}(x,j,z_1)-B_{66}^{(k)}\left(U_{q,x}^{*(1,s)}(x,j,z_1)+U_{x,j}^{*(1,s)}(x,j,z_1)\right).$$

В формулах (1.11), (1.13) необходимо учитывать, что

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r^{+(0)} = \sigma_r^{+}(x,\varphi),\ \sigma_{rx}^{-(0)} = \sigma_{rx}^{-}(x,\varphi),\ \sigma_{r\theta}^{-(0)} = \sigma_{r\theta}^{-}(x,\varphi),\\
&u_x^{+(0)} = u_x^{+}(x,\varphi),\ \ u_\theta^{+(0)} = u_\theta^{+}(x,\varphi),\ u_r^{-(0)} = u_r^{-}(x,\varphi),\\
&\sigma_r^{+(s)} = \sigma_{rx}^{-(s)} = \sigma_{r\theta}^{-(s)} = u_x^{+(s)} = u_\theta^{+(s)} = u_r^{-(s)} = 0 \ \text{ при } \ s > 0.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Выведенные выше формулы (1.7) – (1.14) носят итерационный характер и позволяют найти значения всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения с заранее заданной точностью. Таким образом, условия (1.1) – (1.2) оказались достаточными для определения всех искомых величин во внутренней задаче. Это решение, как правило, не будет удовлетворять торцевым условиям и условиям на краях цилиндрической оболочки. Для удовлетворения условиям на торцах $x = 0, L$ и на краях $\theta = 0, \Theta$ необходимо построить решения типа пограничного слоя вблизи этих торцов и краёв [3-6].

2. **Нежесткий контакт.** Остановимся более подробно на модели нежесткого контакта. Суть этой модели состоит в следующем: принимается, что существует тонкий слой толщиной h_0 с исчезающе малой сдвиговой жесткостью G_0 между контактирующими средами [11]. Отношение $c = \lim\limits_{\substack{h_0 \to 0\\ G_0 \to 0}} \dfrac{h_0}{G_0}$ может принимать любое значение от 0 до ∞. Предельному случаю $c = 0$ соответствует жесткий контакт, другому предельному случаю $c \to \infty$ – скользящий контакт. Для промежуточного состояния принимаются:

$$
\begin{aligned}
u_x^{(2)} - u_x^{(1)} &= f_1(x,\theta) = c_1 \frac{l}{h} \sigma_{xr}(x,\theta,R),\\
u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)} &= f_2(x,\theta) = c_2 \frac{l}{h} \sigma_{\theta r}(x,\theta,R).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Постоянные c_1, c_2 имеют размерность m^3 / H и для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Для трансверсально-изотропных и изотопных материалов $c_1 = c_2$.

Остальные условия контакта (1.2) остаются неизменными. Тогда из (1.2) и (2.1) следует:

$$
\begin{aligned}
&f_1^{(s)}(x,\varphi) = c_1 \sigma_{xr}^{(k,s)}(x,\varphi),\ \ f_2^{(s)}(x,\varphi) = c_2 \sigma_{\theta r}^{(k,s)}(x,\varphi),\\
&U_{x0}^{(2,s)} = U_{x0}^{(1,s)} + c_1 \sigma_{xr0}^{(k,s)},\quad U_{\theta 0}^{(2,s)} = U_{\theta 0}^{(1,s)} + c_2 \sigma_{\theta r0}^{(k,s)}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(x,\varphi)$ и $f_2^{(s)}(x,\varphi)$ из (2.2) в (1.12) с учетом формул для $\sigma_{xr0}^{(k,s)}$ и $\sigma_{\theta r0}^{(k,s)}$ получим:

$$
U_x^{(2,s)} = u_x^{+(s)}(x,\varphi) + c_1 \sigma_{xr}^{-(s)}(x,\varphi) + \overline{U}_x^{*(k,s)}(x,\varphi,z),
$$

$$U_{\theta}^{(2,s)}=u_{\theta}^{+(s)}(\xi,\varphi)+\chi_2\sigma_{r\theta}^{-(s)}(\xi,\varphi)+\overline{U}_{\theta}^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x}^{(2,s)}&=a_3^{(2)}\sigma_r^{+(s)}+a_4^{(2)}\sigma_{r\theta}^{-(s)}+a_5^{(2)}\sigma_{rx}^{-(s)}+B_{11}^{(2)}u_{x,\xi}^{+(s)}+B_{12}^{(2)}u_{\theta,\varphi}^{+(s)}+B_{16}^{(2)}\left(u_{\theta,\xi}^{+(s)}+u_{x,\varphi}^{+(s)}\right)+\\&+B_{11}^{(2)}\chi_1\sigma_{rx,\xi}^{-(s)}(\xi,\varphi)+B_{12}^{(2)}\chi_2\sigma_{r\theta,\varphi}^{-(s)}(\xi,\varphi)+\\&+B_{16}^{(2)}\left(\chi_1\sigma_{rx,\varphi}^{-(s)}(\xi,\varphi)+\chi_2\sigma_{r\theta,\xi}^{-(s)}(\xi,\varphi)\right)+\overline{\sigma}_x^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta),\ (x,\theta;\xi,\varphi;\alpha,\beta;1,2),\\\sigma_{x\theta}^{(2,s)}&=c_3^{(2)}\sigma_r^{+(s)}+c_4^{(2)}\sigma_{r\theta}^{-(s)}+c_5^{(2)}\sigma_{rx}^{-(s)}+B_{16}^{(2)}u_{x,\xi}^{+(s)}+B_{26}^{(2)}u_{\theta,\varphi}^{+(s)}+B_{66}^{(2)}\left(u_{\theta,\xi}^{+(s)}+u_{x,\varphi}^{+(s)}\right)+\\&+B_{16}^{(2)}\chi_1\sigma_{rx,\xi}^{-(s)}(\xi,\varphi)+B_{26}^{(2)}\chi_2\sigma_{r\theta,\varphi}^{-(s)}(\xi,\varphi)+\\&+B_{66}^{(2)}\left(\chi_1\sigma_{rx,\varphi}^{-(s)}(\xi,\varphi)+\chi_2\sigma_{r\theta,\xi}^{-(s)}(\xi,\varphi)\right)+\overline{\sigma}_{x\theta}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta).\end{aligned}\tag{2.3}$$

В формулах (2.3) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\overline{U}_x^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)=U_x^{*(k,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-\left(U_{\theta}^{*(1,s)}(\xi,\varphi,\zeta_1)+\chi_2\sigma_{r\theta}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)\right),\\&\overline{\sigma}_x^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta)=\sigma_x^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-\left[B_{11}^{(2)}\chi_1\sigma_{rx,\xi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)+B_{12}^{(2)}\chi_2\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)+\right.\\&\qquad\left.+B_{16}^{(2)}\left(\chi_1\sigma_{rx,\varphi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)+\chi_2\sigma_{r\theta,\xi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)\right)\right],\ (x,\theta;\xi,\varphi;\alpha,\beta;1,2),\\&\overline{\sigma}_{x\theta}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta)=\sigma_x^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta)-\left[B_{16}^{(2)}\chi_1\sigma_{rx,\xi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)+B_{26}^{(2)}\chi_2\sigma_{r\theta,\varphi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)+\right.\\&\qquad\left.+B_{66}^{(2)}\left(\chi_1\sigma_{rx,\varphi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)+\chi_2\sigma_{r\theta,\xi}^{*(2,s)}(\xi,\varphi,\zeta_2)\right)\right].\end{aligned}\tag{2.4}$$

Остальные формулы (1.11) остаются неизменными.

3. Примеры. В качестве иллюстрации рассмотрим частный пример.

Пусть имеем анизотропную цилиндрическую оболочку, на внешней и внутренней поверхностях которой заданы следующие условия для напряжений и перемещений

$$\sigma_r^{+}=-q,u_x^{+}=0,\ u_{\theta}^{+}=0,\ \sigma_{rx}^{-}=0,\ \sigma_{r\theta}^{-}=0,\ \ u_r^{-}=0.\tag{3.1}$$

Учитывая, что $Q_r^{*(k,0)}=0$, с помощью рекуррентных формул (1.7) – (2.4), в нулевом приближении получим следующее решение внутренней задачи:

$$\begin{aligned}&\sigma_r^{(k,0)}=-\sqrt{\frac{R}{h}}q,\sigma_x^{(k,0)}=-\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(1)}q,\sigma_{\theta}^{(k,0)}=-\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(1)}q,\sigma_{x\theta}^{(k,0)}=-\sqrt{\frac{R}{h}}c_3^{(1)}q,\\&u_x^{(k,0)}=u_{\theta}^{(k,0)}=u_r^{(k,0)}=0,\ \sigma_{rx}^{(k,0)}=\sigma_{r\theta}^{(k,0)}=0,\ \ k=1,2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Вычисляя все приближения до $s=2$ включительно, получим решение внутренней задачи с точностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\sigma_r^{(1)}=-\sqrt{\frac{R}{h}}q-\sqrt{\frac{1}{Rh}}\left(b_3^{(1)}-1\right)(r-R-h_1)q,$$

$$\sigma_{rx}^{(1)}=\sigma_{r\theta}^{(1)}=0,\tag{2.3}$$

$$s_x^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(1)}q - q\left[a_3^{(1)}\left(b_3^{(1)}-1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + B_{12}^{(1)}\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$\left. + B_{12}^{(1)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{h_2}{\sqrt{Rh}} + \left(a_1^{\prime(2)}a_3^{(2)} + a_2^{\prime(2)}b_3^{(2)} + a_6^{\prime(2)}c_3^{(2)} + a_3^{\prime(2)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\right]$$

$$s_q^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(1)}q - q\left[b_3^{(1)}\left(b_3^{(1)}-1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + B_{22}^{(1)}\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$\left. + B_{22}^{(1)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{h_2}{\sqrt{Rh}} + \left(b_1^{\prime(2)}a_3^{(2)} + b_2^{\prime(2)}b_3^{(2)} + b_6^{\prime(2)}c_3^{(2)} + b_3^{\prime(2)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\right]$$

$$s_{xq}^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}c_3^{(1)}q - q\left[c_3^{(1)}\left(b_3^{(1)}-1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + B_{26}^{(1)}\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$\left. + B_{26}^{(1)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{h_2}{\sqrt{Rh}} + \left(c_1^{\prime(2)}a_3^{(2)} + c_2^{\prime(2)}b_3^{(2)} + c_6^{\prime(2)}c_3^{(2)} + c_3^{\prime(2)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\right]$$

$$u_r^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}\left[\left(a_{13}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{23}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{36}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{33}^{(1)}\right)(r-R) + \left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)h_2\right]q,$$

$$u_x^{(1)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}\left(a_{15}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{25}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{56}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{35}^{(1)}\right)(r-R-h_1)q\,, \quad (x,q;4,5).$$

Для второго слоя

$$s_r^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}q - \sqrt{\frac{1}{Rh}}\left[\left(b_3^{(2)}-1\right)(r-R) - \left(b_3^{(1)}-1\right)h_1\right]q,$$

$$s_{rx}^{(2)} = s_{rq}^{(2)} = 0\,,$$

$$s_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}a_3^{(2)}q - \left[B_{12}^{(2)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$\left. + a_3^{(2)}\left(b_3^{(2)}-1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \left(a_1^{\prime(2)}a_3^{(2)} + a_2^{\prime(2)}b_3^{(2)} + a_6^{\prime(2)}c_3^{(2)} + a_3^{\prime(2)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\right]q,$$

$$s_q^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}b_3^{(2)}q - \left[B_{22}^{(2)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$\left. + b_3^{(2)}\left(b_3^{(2)}-1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \left(b_1^{\prime(2)}a_3^{(2)} + b_2^{\prime(2)}b_3^{(2)} + b_6^{\prime(2)}c_3^{(2)} + b_3^{\prime(2)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\right]q,$$

$$s_{xq}^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}c_3^{(2)}q - \left[B_{26}^{(2)}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)\frac{r-R+h_2}{\sqrt{Rh}} + \right.$$

$$\left. + c_3^{(2)}\left(b_3^{(2)}-1\right)\frac{r-R-h_1}{\sqrt{Rh}} + \left(c_1^{\prime(2)}a_3^{(2)} + c_2^{\prime(2)}b_3^{(2)} + c_6^{\prime(2)}c_3^{(2)} + c_3^{\prime(2)}\right)\frac{r-R}{\sqrt{Rh}}\right]q,$$

$$u_r^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}\left(a_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{23}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{36}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{33}^{(2)}\right)(r - R + h_2)q\,,$$

$$u_x^{(2)} = -\sqrt{\frac{R}{h}}\left[\left(a_{15}^{(2)}a_3^{(2)} + a_{25}^{(2)}b_3^{(2)} + a_{56}^{(2)}c_3^{(2)} + a_{35}^{(2)}\right)(r - R) - \left(a_{15}^{(1)}a_3^{(1)} + a_{25}^{(1)}b_3^{(1)} + a_{56}^{(1)}c_3^{(1)} + a_{35}^{(1)}\right)h_1\right]q\,.$$

$$(x, q; 4, 5)\,.$$

Если материалы слоев ортотропные, то полученные формулы намного упрощаются. В частности $u_x^{(k)} = u_q^{(k)} = 0$.

В заключение отметим, что решение типа пограничного слоя можно построить с помощью функций типа пограничного слоя [5-7,9].

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
3. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.//ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. С.593-608.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.:Наука,1997. 415с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2005. 468с.
7. Хачатрян Ш.М. О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1979. Т. 32. №3. С. 26-41.
8. Хачатрян А.М., Петросян Г.А. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной цилиндрической оболочки. Труды VI Межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 01-06 октября, 2019. Дилижан, Армения. С.340-344.
9. Хачатрян А.М., Петросян Г.А. Асимптотическое

решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной цилиндрической оболочки. Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т.73. № 2. С.58-68.
10. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009.Т.62. №4. С.65-72.
11. Анисимов А.А., Ермаков С.Ю., Фролова Е.Н., Яновская Т.Б. Исследование отражения-преломления упругих волн на границе нежесткого контакта и контакта с трением// Росс. АН. Физика земли. 1993. №11. С.37-44.

Նյութը ներկայացվել է 8.06.2023,
գրախոսման է ուղարկվել 25.05.2023,
տպագրության ընդունվել 22.06.2023։
Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական խորհրդի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ.Սահակյանը։