

ՀՏԴ 513.813

Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

ԱրՊՀ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ամբիոնի դոցենտ, Ֆ.մ.գ.թ.

E-mail Gurgen250612@mail.ru

ԷՎԿԼԻԴՅԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԻՆՎԵՐՍԻԱՅԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքի նպատակն է տալ էվկլիդյան հարթության վրա ինվերսիայի գաղափարը, հատկությունները և կիրառությունները: Նախ տրվում է հարթության վրա ինվերսիան շրջանագծի նկատմամբ: Էվկլիդյան հարթության վրա $w(O, R)$ շրջանագծի նկատմամբ ինվերսիան O կետից տարբեր յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերում է OM ճառագայթի վրա գտնվող $M\Phi$ կետի այնպես, որ տեղի ունենա $OM \times OM\Phi = R^2$ հավասարությունը: Ընդհանուր դեպքում Էվկլիդյան հարթության վրա ինվերսիան հարթության կամայական A կետ արտապատկերում է այնպիսի $A\Phi$ կետի, որ տեղի ունենա $QA \times QA\Phi = k$ հավասարությունը: Ապացուցված են ինվերսիայի որոշ հատկություններ Էվկլիդյան հարթության վրա. ինվերսիան չի հանդիսանում աֆինային ձևափոխություն, ինվերսիայի կենտրոնով անցնող ուղիղը ձևափոխվում է ինքն իրեն, ինվերսիայի կենտրոնը որպես կենտրոն ունեցող $g(O, OM)$ շրջանագիծը ինվերսիայի դեպքում ձևափոխվում է $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծին համակենտրոն $g(O, OM\Phi)$ շրջանագծի, ինվերսիայի կենտրոնով անցնող $g(S, OS)$ շրջանագիծը $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ ձևափոխվում է ուղղի, որն ուղղահայաց է O, S կետերով անցնող ուղղին, ինվերսիայի

կենտրոնով չանցնող $g(S, SA)$ շրջանագիծը $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ ձևափոխվում է ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող $g(S \Phi S \Phi \Phi)$ շրջանագծի, և $O, S, S \Phi$ կետերը համագիծ են, ինվերսիայի ժամանակ ինքն իրեն է ձևափոխվում $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծին ուղղահայաց $g(S, ST)$ շրջանագիծը, եթե ինվերսիայի ժամանակ $g(S, ST)$ շրջանագիծը ձևափոխվում է ինքն իրեն, ապա այն ուղղահայաց է $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծին, Էվկլիդյան հարթության վրա երկու կորերի կազմած անկյունը ինվարիանտ է $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ, Էվկլիդյան հարթության վրա $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ երկու կետերի հեռավորությունը հաստատուն չէ, ինվերսիայի Q կենտրոնով չանցնող ուղիղը արտապատկերվում է ինվերսիայի կենտրոնով անցնող շրջանագծի, ինվերսիայի Q կենտրոնով չանցնող շրջանագիծը արտապատկերվում է ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող շրջանագծի: Ուսումնասիրված են ինվերսիայի կիրառությունները տարածության արտապատկերման ժամանակ:

Բանալի բառեր՝ ինվերսիա, ինվերսիայի կենտրոն, ինվերսիայի շրջանագիծ, ինվերսիայի շառավիղ, ինվերսիայի աստիճան, արտապատկերում, գնդային մակերևույթ:

Г.Налбандян

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНВЕРСИИ НА ПЛОСКОСТИ ЭВКЛИДА

Цель работы - дать представление об инверсии на евклидовой плоскости, ее свойствах и применениях. Во-первых, задана инверсия на плоскости по отношению к окружности. На евклидовой плоскости $w(O, R)$ инверсия каждая точка M , отличная от точки инверсии O по отношению к окружности. отображается на луче OM в точку $M \Phi$ так, чтобы выполнялось $OM \times OM \Phi = R^2$ равенства. В общем случае инверсия на евклидовой плоскости отображает произвольную A точку плоскости в

такую $A\Phi$ точку, в которой выполняется $QA \cdot QA\Phi = k$ равенства. Доказаны некоторые свойства инверсии на евклидовой плоскости: инверсия не является аффинным преобразованием, прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется сама себе, центр инверсии как центр $g(O, OM)$ окружности в инверсии изменяет форму $w(O, R)$ концентрически с окружности инверсии $g(O, OM)$ окружности, проходящей через центр инверсии $g(S, OS)$ окружность $w(O, R)$ трансформируется в вертикальную линию при инверсии O, S , в направлении, проходящем через точки, не проходящие через центр инверсии $g(S, SA)$ окружность $w(O, R)$ при инверсии переходит в не проходящий через центр инверсии $g(S\Phi S\Phi A\Phi)$ окружности, и $O, S, S\Phi$ точки коллинеарны, трансформируется при инверсии $w(O, R)$ перпендикулярно инверсионной окружности $g(S, ST)$ обведете, если время инверсии $g(S, ST)$ окружность трансформируется, тогда он вертикальный $w(O, R)$ к инверсионной окружности, угол образованный двумя кривыми на евклидовой плоскости, инвариантен при $w(O, R)$ инверсии, на евклидовой плоскости при $w(O, R)$ инверсии расстояние между двумя точками непостоянно, инверсия Q линия, не проходящая через центр, отражается окружностью, проходящей через центр инверсии, инверсия Q окружность не проходящая через центр отображается в окружность, не проходящую через центр инверсии. Изучаются применения инверсии в пространственной визуализации. Исследуются применения инверсии в отображении пространства. **Ключевые слова:** инверсия, центр инверсии, окружность инверсии, радиус инверсии, степень инверсии, проекция, сферическая поверхность.

G. Nalbandyan

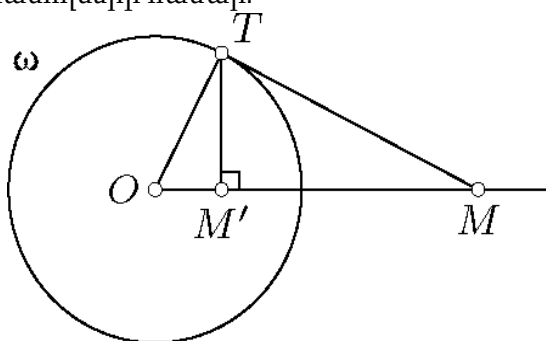
SOME PROPERTIES OF INVERSION ON EUCLIDEAN PLANE

Purpose of the work -of the topic is to give the idea of inversion on the Euclidean plane, its properties and its applications. First is given the inversion on the plane with

respect to the circle, i.e. on the Euclidean plane $w(O, R)$ inversion with respect to the circle from the O point each different M point reflects on the ray OM to the M' point in order to take place $OM \times OM' = R^2$ equality. In general on the Euclidean plane the inversion of any A point reflects to A' point in order to take place $OA \times OA' = k$ equality. Some properties of the inversion on the Euclidean plane are proved: the inversion is not an affine transformation, the straight line passing through the center of the inversion transforms itself, the center of the inversion as the center $g(O, OM)$ circle in inversion changes shape $w(O, R)$ concentric with circle of inversion $g(O, OM)$ circle passing through the center of inversion $g(S, OS)$ circle $w(O, R)$ transforms into a vertical line when inverted in a direction O, S , passing through points, not passing through the center of inversion $g(S, SA)$ circle, $w(O, R)$ when inverted, it passes into the one that does not pass through the center of inversion $g(S, SA')$ circle, and O, S, S' points are collinear, transforms upon inversion $w(O, R)$ perpendicular to inversion circle $g(S, ST)$ circle if inversion time $g(S, ST)$ the circle is transformed, then it is vertical $w(O, R)$ to the inversion circle, the angle formed by two curves on the Euclidean plane is invariant $w(O, R)$ under inversion on the Euclidean plane $w(O, R)$ in inversion, the distance between two points is not constant, inversion Q line not passing through the center is reflected by a circle passing through the center of inversion, inversion Q circle not passing through the center is mapped to a circle not passing through the inversion center. Applications of inversion in spatial visualization are being studied. It has been already studied the properties of the inversion during distance reflection.

Key words: inversion, center of inversion, inversion of the circle, radius of inversion, degree of inversion, reflection, spherical surface.

Հոդվածում ընդգրկված է ոչ բուհական ծրագրով ուսումնասիրվող թեմա, որը հրատապ է այն իմաստով, որ հետաքրքրություն է առաջացնում ուսումնասիրելով նախ ինվերսիան մասնավոր դեպքում, այնուհետև ընդհանուր դեպքում: Տարբեր ([1], [2], [3], [4], [5]) դասագրքերում շարադրված են տարբեր հերթականությամբ, բայց գտնում եմ, որ նպատակահարմար է նախապատվությունը տալ ինդուցիայի մեթոդին, որը իմ կարծիքով ավելի մատչելի կլինի ուսանողների համար:



գծ. 1

Էվկլիդեսի հարթության վրա $w(O, R)$ շրջանագծի նկատմամբ ինվերսիան O կետից տարբեր յուրաքանչյուր M կետ արտապատկերում է OM ճառագայթի վրա գտնվող $M\Phi$ կետի, այնպես որ տեղի ունենա

$$OM \times OM\Phi = R^2$$

(1)

հավասարությունը, որտեղ O կետը անվանում են *ինվերսիայի կենտրոն*, իսկ R -ը՝ *ինվերսիայի շառավիղ* [1], [3]:

Նշենք, որ ինվերսիայի ժամանակ միայն ինվերսիայի շրջանագծի կետերն են մնում անշարժ (գծ.1): Քանի որ $O(0,0)$, $M(x,y)$, $M\Phi(x\Phi, y\Phi)$ կետերը համագիծ են, ապա $\overline{OM\Phi} = l \times \overline{OM}$, ուրեմն հաշվի առնելով (1) պայմանը, կստանանք $l \times \overline{OM}^2 = R^2$, որտեղից $l = \frac{R^2}{\overline{OM}^2}$: Այսպիսով

$$\overline{OM\Phi} = \frac{R^2}{\overline{OM}^2} \times \overline{OM}$$

որը կոորդինատներով կլինի՝

$$x\Phi = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y\Phi = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}:$$

(2)

Թեորեմ 1. Ինվերսիան չի հանդիսանում աֆինային ձևափոխություն:

Ապացույց: Հաշվի առնելով, որ (2) ձևափոխության բանաձևերը ոչ գծային են, ուրեմն ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող կամայական ուղիղ չի ձևափոխվում ուղիղ: Ուրեմն խախտվում է գծայնությունը, հետևաբար ինվերսիան աֆինային ձևափոխություն լինել չի կարող:

Թեորեմ 2. Ինվերսիայի կենտրոնով անցնող ուղիղը ձևափոխվում է ինքն իրեն:

Թեորեմ 3. Ինվերսիայի կենտրոնը որպես կենտրոն ունեցող $g(O, OM)$ շրջանագիծը

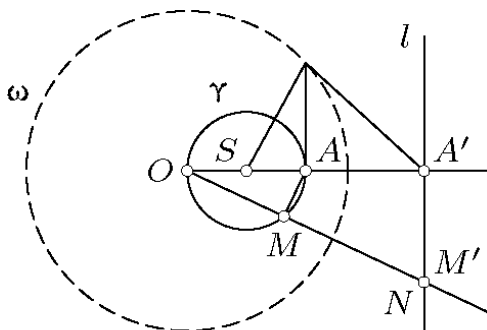
ինվերսիայի դեպքում ձևափոխվում է $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծին համակենտրոն

$g(O, OM \Phi)$ շրջանագծի:

Թեորեմ 4. Ինվերսիայի կենտրոնով անցնող $g(S, OS)$ շրջանագիծը $w(O, R)$

ինվերսիայի

ժամանակ ձևափոխվում է ուղիղի, որն ուղղահայաց է O, S կետերով անցնող ուղիղին:



գծ. 2

Ապացույց: Դիցուք $g(S, OS)$ շրջանագիծը OS ճառագայթը հատում է A կետում և այդ կետը արտապատկերվում է $A\Phi$ կետի (գծ.2): Տանենք $OA\Phi$ ուղղին ուղղահայաց $/$ ուղիղը: Դիցուք N կետը հանդիսանում է OM և $/$ ուղղիների հատման կետը:

OMA և $OA\Phi N$ ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունից կունենանք $OA : OM = ON : OA\Phi$ որտեղից

$$OM \times ON = OA \times OA\Phi = R^2 :$$

Հետևաբար, N կետը հանդիսանում է M կետի պատկերը, ուրեմն $g(S, OS)$ շրջանագծի և $/$ ուղիղի կետերի միջև ստեղծված է փոխմիարժեք համապատասխանություն $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծի նկատմամբ [1], [3], [4]:

Թեորեմ 5. Ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող $g(S, SA)$ շրջանագիծը $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ ձևափոխվում է ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող $g(S \notin S \notin A \notin C)$ շրջանագծի, և $O, S, S \notin C$ կետերը համագիծ են:

Ապացույց: Դիցուք $g(S, SA)$ շրջանագիծը չի անցնում ինվերսիայի կենտրոնով: Վերցնենք AB տրամագիծը, որը գտնվում է $w(O, R)$ և $g(S, SA)$ շրջանագծերի կենտրոններով

անցնող ուղղի վրա, իսկ $A \notin B \notin M \notin C$ կետերը հանդիսանում են համապատասխանաբար A, B, M կետերի պատկերները այդ ինվերսիայի ժամանակ, այսինքն՝

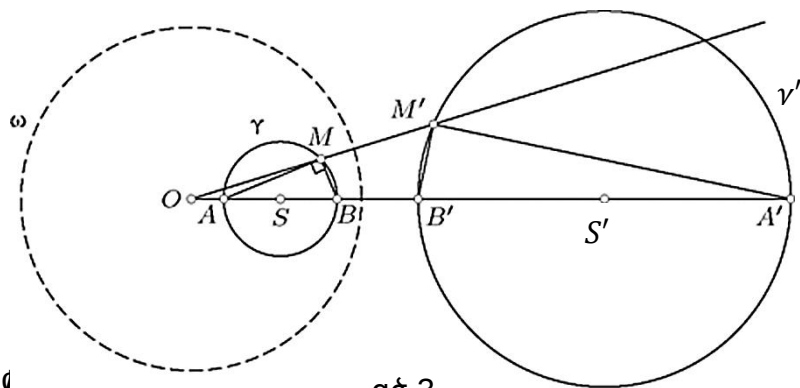
$$OM \times OM \notin = OA \times OA \notin = OB \times OB \notin = R^2 :$$

Ուրեմն՝

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OA \notin}{OM \notin} \quad \text{և} \quad \frac{OM}{OB} = \frac{OB \notin}{OM \notin}$$

(3)

Հաշվի առնելով (3)-ը, կատանանք, որ OMA և $OM \notin A \notin C$, OMB և $OM \notin B \notin C$ եռանկյունները նման են: Ուրեմն $\angle OMA = \angle OA \notin M \notin C$ և $\angle OMB = \angle OB \notin M \notin C$, հետևաբար



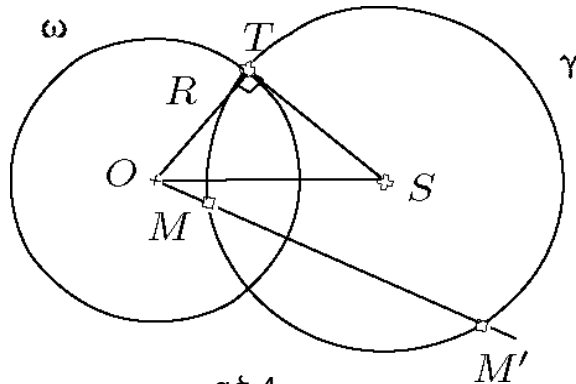
$$\angle BMM \notin = \angle DM \notin$$

գծ.3

Քանի որ M գազաթի երեք անկյունների գումարը հավասար է $A \notin M \notin B \notin C$ եռանկյան անկյունների գումարին, և $\angle AMB = 90^\circ$, որպես տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյուն, ապա $\angle A \notin M \notin B \notin C$ ևս կլինի ուղիղ անկյուն (գծ.3): Այստեղից հետևում է, որ եթե M կետը շարժվում է $g(S, SA)$ շրջանագծով, ապա նրա $M \notin C$ պատկերը կշարժվի $g(S \notin S \notin A \notin C)$ շրջանագծով, որը կառուցված է $A \notin B \notin C$ տրամագծի վրա: Ինչպես հայտնի է, երկու շրջանագծեր

անվանում են *ուղղահայաց*, եթե նրանց հատման կետում տարված շոշափողները ուղղահայաց են:

Թեորեմ 6. Ինվերսիայի ժամանակ ինքն իրեն է ձևափոխվում $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծին ուղղահայաց $g(S, ST)$ շրջանագիծը:



գծ.4

Ապացույց: Դիցուք M կետը $g(S, ST)$ շրջանագծի կամայական կետ է և OM ուղիղը երկրորդ անգամ հատում է $g(S, ST)$ շրջանագիծը $M\Phi$ կետում (գծ. 4):

Համաձայն շոշափողի և հատողի հատկության՝ կարող ենք գրել՝

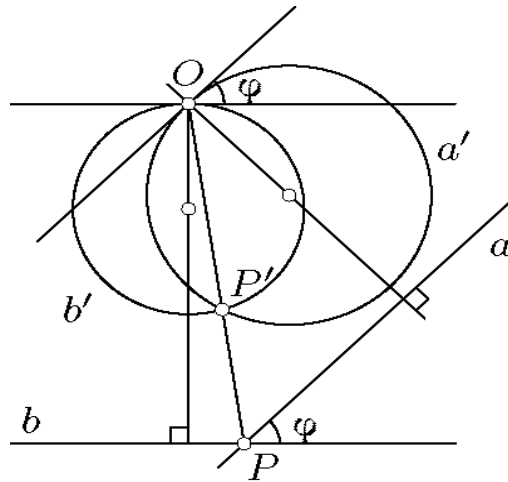
$$OM \times OM\Phi = OT^2 = R^2:$$

(4)

Ուրեմն, ինվերսիայի սահմանման համաձայն՝ M և $M\Phi$ կետերը կլինեն ինվերսիոն:

Թեորեմ 7. Եթե ինվերսիայի ժամանակ $g(S, ST)$ շրջանագիծը ձևափոխվում է ինքն իրեն, ապա այն ուղղահայաց է $w(O, R)$ ինվերսիայի շրջանագծին:

Ապացույց: Դիցուք $g(S, ST)$ շրջանագծի M և $M\Phi$ կետերը ինվերսիոն են և գտնվում են O կետի հետ մի ճառագայթի վրա (գծ. 4): Պարզ է, որ $w(O, R)$ շրջանագծի նկատմամբ դրանցից մեկը ներքին կետ է, իսկ մյուսը՝ արտաքին, ուրեմն g և w շրջանագծերը հատվում են երկու կետերում:



գծ. 5

Դիցուք T -ն հատման կետերից մեկն է, ցույց տանք, որ OT -ն հանդիսանում է

շոշափող g շրջանագծին: Եթե OT -ն g շրջանագիծը հատեր մեկ ուրիշ T_1 կետում: Համաձայն շոշափողի և հատողի հատկության $OT \times OT_1 = R^2$, բայց $OT = R$, հետևաբար՝ $OT_1 = R$: Ուրեմն T և T_1 կետերը համընկնում են և OT -ն կլինի շոշափող g շրջանագծին T կետում: Հետևաբար g և w շրջանագծերը ուղղահայաց են:

Թեորեմ 8. Էվկլիդեսյան հարթության վրա երկու կորերի կազմած անկյունը ինվարիանտ է $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ:

Ապացույց: Դիցուք a և b ուղիղները կազմում են $j = \mathfrak{D}(a, b)$ անկյունը և չեն անցնում ինվերսիայի O կենտրոնով: Այդ դեպքում ինվերսիայի ժամանակ դրանց պատկերները կլինեն ինվերսիայի կենտրոնով անցնող $a\Phi$ և $b\Phi$ շրջանագծերը և դրանց կազմած անկյունները O և $P\Phi$ հատման կետերում կլինի նույնը (գծ. 5): Ուրեմն՝ O կետում շրջանագծերին տարված շոշափողները կլինեն զուգահեռ այդ ուղիղներին: Հետևաբար նրանց կազմած անկյունը կլինի հավասար այդ ուղիղների կազմած անկյանը, այսինքն՝

$$\mathfrak{D}(a\Phi b\Phi) = \mathfrak{D}(a, b) = j :$$

Թեորեմ 9. Էվկլիդեսյան հարթության վրա $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ երկու կետերի հեռավորությունը հաստատուն չէ:

Ապացույց: Դիցուք $w(O, R)$ ինվերսիայի ժամանակ A, B կետերը արտապատկերվում են $A\Phi B\Phi$ կետերի: Ինվերսիայի սահմանման

համաձայն՝ $OA \times OA\Phi = OB \times OB\Phi = R^2$, որտեղից $\frac{OA}{OB} = \frac{OB\Phi}{OA\Phi}$: Իսկ OAB , $OA\Phi B\Phi$ եռանկյունների նմանությունից կունենանք $\frac{AB\Phi}{AB} = \frac{OA\Phi}{OB} = \frac{OB\Phi}{OA}$,
 կամ $AB\Phi = AB \times \frac{OA\Phi}{OB}$: Բայց $OA\Phi = \frac{R^2}{OA}$, հետևաբար՝

$$AB\Phi = AB \times \frac{R^2}{OA \times OB}:$$

(5)

Ընդհանուր դեպքում ինվերսիան, որն ունի Q կենտրոն և $k > 0$ աստիճան էվկլիդեսյան երկրաչափությունում անվանում են արտապատկերում, որը հարթության կամայական A կետի համապատասխանության մեջ է դնում այնպիսի $A\Phi$ կետ, որ տեղի ունենա

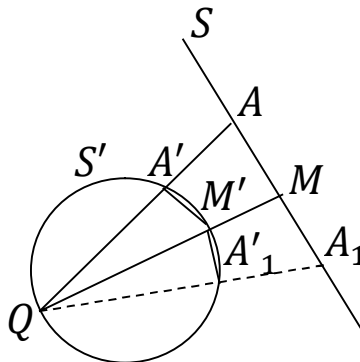
$$QA \times QA\Phi = k$$

հավասարությունը: Հաշվի առնելով (2) պայմանը՝ կարող ենք ընդհանուր դեպքում ինվերսիայի ձևափոխության բանաձևերը գրել

$$x\Phi = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad y\Phi = \frac{ky}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

տեսքով: Ուրեմն, թվային գործակիցը չի կարող ազդել ինվերսիայի համար վերևում նշված հատկությունների վրա [3], [4]:

Թեորեմ 10. Ինվերսիայի Q կենտրոնով չանցնող ուղիղը արտապատկերվում է ինվերսիայի կենտրոնով անցնող շրջանագծի:



գծ. 6

Ապացույց: Դիցուք S ուղիղը չի անցնում ինվերսիայի Q կենտրոնով: Այդ ուղղի վրա վերցնենք կամայական A, M կետեր, որոնք ինվերսիայի ժամանակ արտապատկերվում են $A\Phi, M\Phi$ կետերի (գծ.6): Միացնենք $Q, M, M\Phi$ և $Q, A, A\Phi$ կետերը, և դիտարկենք

$QA\Phi$ և QMA եռանկյունները: Հաշվի առնելով $QA \times QA\Phi = QM \times QM\Phi = k$

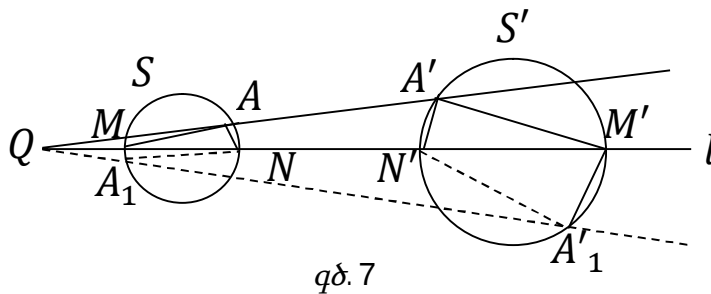
հավասարությունը՝ կունենանք՝ $\frac{QA}{QM} = \frac{QM\Phi}{QA\Phi}$: Ուրեմն, $QA\Phi$ և QMA

եռանկյունները նման են, հետևաբար՝

$$\angle QAMQ = \angle QMAQ : \quad (7)$$

Եթե A կետը շարժվում է S ուղղով, ապա նրա պատկերը՝ $A\Phi$ կետը, կորոշվի (7) պայմանով: Այդ դեպքում $S\Phi$ բազմությունը կորոշվի $QA\Phi$ անկյան հաստատունությամբ, որից երևում է $QM\Phi$ հատվածը: Հետևաբար, $S\Phi$ բազմությունը կհանդիսանա շրջանագիծ, որն անցնում է Q և $M\Phi$ կետերով: Հակառակը, եթե $A\Phi$ կետը շարժվի $S\Phi$ շրջանագծով, որն անցնում է Q կենտրոնով, ապա նրա A պատկերը կորոշվի (7) պայմանով, այսինքն՝

$$\angle AMQ = \angle QAM\Phi = \text{const} :$$



Հետևաբար, S կետերի բազմությունը հանդիսանում է ուղիղ, որը QM ուղղի հետ առաջացնում է $\angle AMQ$ անկյունը: Այդ անկյունը հավասար է $S\Phi$ շրջանագծին ներգծած անկյանը, որը հենված է $QM\Phi$ լարին [1], [4]:

Թեորեմ 11. Ինվերսիայի Q կենտրոնով չանցնող շրջանագիծը արտապատկերվում է ինվերսիայի կենտրոնով չանցնող շրջանագծի:

Ապացույց: Թող S շրջանագիծը չի անցնում ինվերսիայի Q կենտրոնով: Ինվերսիայի կենտրոնով տանենք կամայական l ուղիղ, որի M, N հատման կետերն են շրջանագծի հետ: Ինվերսիայի ժամանակ այդ կետերը արտապատկերվում են $M\Phi$ և $N\Phi$ կետերի (զծ. 7):

Հաշվի առնելով $QA \times QA\Phi = QM \times QM\Phi = k$ և $QA \times QA\Phi = QN \times QN\Phi = k$ հավասարությունները՝ կարող ենք գրել, որ QAM և $QM\Phi$, QAN և $QN\Phi$ եռանկյունների համապատասխան կողմերը համեմատական են՝ $\frac{QA}{QM} = \frac{QM\Phi}{QA\Phi}$ և $\frac{QA}{QN} = \frac{QN\Phi}{QA\Phi}$: Հետևաբար, տեղի ունի նաև այդ եռանկյունների

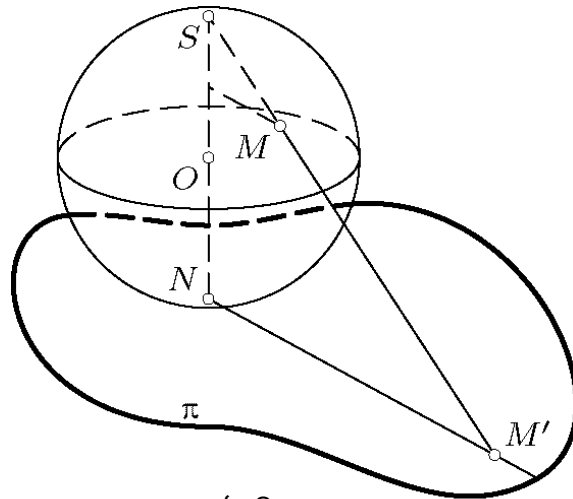
համապատասխան անկյունների հավասարությունը, այսինքն՝

$$\angle QAM\Phi = \angle AMQ; \quad \angle QAN\Phi = \angle ANQ,$$

$$\mathfrak{D}N\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}QA\mathfrak{M}\mathfrak{C} - \mathfrak{D}QA\mathfrak{W}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}AMQ - \mathfrak{D}ANQ = \mathfrak{D}MAN :$$

Այսպիսով, եթե A կետը շարժվում է S շրջանագծով, որը բնութագրվում է MN լարի վրա հենված $\mathfrak{D}MAN$ անկյան հաստատունությամբ, ապա $S\mathfrak{C}$ բազմության $A\mathfrak{C}$ տեսքի կետերը պահպանում են $M\mathfrak{W}\mathfrak{C}$ լարի վրա հենված $\mathfrak{D}N\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ անկյան հաստատունությունը, այսինքն հանդիսանում է շրջանագիծ:

Ինչպես հայտնի է, որ ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիան հանդիսանում է (O, R) գնդային մակերևույթի կենտրոնային պրոյեկցիան նրա S կետից ρ հարթության վրա, որը շոշափում է S գնդային մակերևույթին տրամագծորեն հակադիր N կետում:



աժ. 8

Պարզ է, որ ρ հարթության կամայական $M\mathfrak{C}$ կետին տարաչափական պրոյեկցիան համապատասխանության մեջ է դնում S գնդային մակերևույթի միակ M կետը: Եթե շարժվենք ρ հարթության ցանկացած G գծով՝ դեպի անվերջություն, ապա G գծի $M\mathfrak{C}$ կետի M պատկերը կձգտի պրոյեկցիայի S կենտրոնին (գժ. 8): Ուրեմն, ստերեոգրաֆիկ պրոյեկցիան հարթության շրջանագծերը ձևափոխում է գնդային մակերևույթի շրջանագծերի, որոնք չեն անցնում S կենտրոնով, իսկ ուղիղները դառնում են շրջանագծեր, որոնք անցնում են S կենտրոնով: Ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը՝ այսինքն՝ S կենտրոնով չանցնող գնդային մակերևույթի շրջանագծերը պրոյեկտվում են ρ հարթության վրա շրջանագծերի, իսկ S կենտրոնով անցնող գնդային մակերևույթի շրջանագծերը պրոյեկտվում են ρ հարթության վրա ուղիղների [2], [4]:

Հետևաբար, (O, R) գնդային մակերևույթի ստերեոգրաֆիկ պրոյեկտումը հանդիսանում է $(S, 2R)$ գնդային մակերևույթի նկատմամբ տարածական

ինվերսիայի մասնավոր դեպքը: Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատական համակարգը տեղադրենք այնպես, որ Oxy հարթությունը համընկնի պրոյեկտվող ρ հարթության հետ, իսկ Oz առանցքն անցնի S կենտրոնով: Այդ համակարգում գնդային մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 :$$

Դիցուք $M(x, y, z)$ գնդային մակերևույթի կետը պրոյեկտվում է ρ հարթության վրա կետին: Քանի որ $\overline{SM}$ և $\overline{SM\Phi}$ վեկտորները զուգահեռ են, ապա $\overline{SM\Phi} = k \times \overline{SM}$: Հաշվի առնելով, որ $S(0, 0, 2R)$ ինվերսիայի կենտրոնն է, ապա

$$x\Phi = kx, \quad y\Phi = ky, \quad 2R = k(2R - z),$$

(8)

որտեղից

$$x\Phi = \frac{2Rx}{2R - z}, \quad y\Phi = \frac{2Ry}{2R - z}, \quad z\Phi = 0:$$

(9)

Ուիլիամս, (9)-ը հանդիսանում է ստերեոգրաֆիկ պրոյեկտման ուղիղ ձևափոխության բանաձևը: Նպատակահարմար է արտածել նաև հակադարձ ձևափոխության բանաձևը:

Այսպես, (8) բանաձևից կարող ենք գրել

$$x = \frac{x\Phi}{k}, \quad y = \frac{y\Phi}{k}, \quad z = 2R \frac{x\Phi}{x\Phi + y\Phi + 4R^2} - \frac{1}{k} \frac{z\Phi}{z\Phi}.$$

(10)

Քանի որ $M(x, y, z)$ կետը պատկանում է գնդային մակերևույթին, ապա

$$\frac{x\Phi^2}{k^2} + \frac{y\Phi^2}{k^2} + \frac{z\Phi^2}{4R^2} - \frac{1}{k} \frac{z\Phi^2}{z\Phi} = R^2,$$

որտեղից

$$k = \frac{1}{4R^2} (x\Phi + y\Phi + 4R^2):$$

(11)

(11)-ը տեղադրելով (10) բանաձևի մեջ կստանանք

$$x = \frac{4R^2 x\Phi}{x\Phi + y\Phi + 4R^2}, \quad y = \frac{4R^2 y\Phi}{x\Phi + y\Phi + 4R^2}, \quad z = \frac{2R(x\Phi + y\Phi)}{x\Phi + y\Phi + 4R^2},$$

որը հանդիսանում է ստերեոգրաֆիկ պրոյեկտման հակադարձ ձևափոխության բանաձևը:

