

*Георгий СААКЯН**к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АргУ**E-mail: ter_saak_george@mail.ru*

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ СУММ

Գ. Մահակյան

ՈՐՈՇ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Մաթեմատիկայի դպրոցական և ուսանողական օլիմպիադաներում հաճախ հանդիպում են որոշ վերջավոր և անվերջ գումարների արժեքների որոշման հետ կապված խնդիրներ: Այս խնդիրներից մի քանիսի լուծումը պահանջում է ուսանողներից առաջին հերթին իմանալ որոշ, այսպես կոչված, աղյուսակային գումարները ([1]), ինչպիսիք են, օրինակ, թվաբանական կամ երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, առաջին n կենտ թվերի քառակուսիների գումարը և այլն: Նման աղյուսակային գումարների արժեքները կարելի է գտնել բազմաթիվ աղբյուրներում (տե՛ս, օրինակ, [1]-[3]): Այս հոդվածի նպատակն է դիտարկել աղյուսակային գումարների օգտագործման որոշ օրինակներ վերջավոր գումարների արժեքների որոշման հետ կապված խնդիրների լուծման համար: Նման խնդիրներում հիմնական մեթոդը որոշ հանրահաշվական ձևափոխությունների միջոցով դիտարկվող գումարների բերումն է աղյուսակայինի: Որոշ դեպքերում հնարավոր է հասնել նպատակին՝ ներմուծելով համապատասխան փոփոխականներ: Հոդվածում բերված օրինակները թույլ կտան ուսանողներին ծանոթանալ ինչպես աղյուսակային գումարների արժեքներին, այնպես էլ տրված գումարների որոշ օգտակար ձևափոխությունների:

Բանալի բառեր՝ վերջավոր գումարներ, աղյուսակային գումարներ

В школьных и студенческих олимпиадах по математике часто встречаются задачи, связанные с определением значений некоторых конечных и бесконечных сумм. Решение некоторых таких задач требует от учащихся (студентов), в первую очередь, знания определенных, так называемых табличных сумм ([1]), таких, как, например, сумма членов арифметической или геометрической прогрессий, сумма квадратов первых n нечетных чисел и т.д.. Значения таких табличных сумм можно найти во многих источниках (см., например, [1]-[3]). Цель настоящей статьи рассмотреть на некоторых примерах применения табличных сумм для решения задач, связанных с определением значений конечных сумм. В таких задачах основным методом является приведение рассматриваемых сумм к табличным путем определенных алгебраических преобразований. В некоторых случаях, удастся достичь цели и путем введения соответствующих переменных. Приводимые в статье примеры позволят учащимся ознакомиться как с значениями некоторых табличных сумм, так и с некоторыми полезными преобразованиями заданных сумм.

Ключевые слова: конечные суммы, табличные суммы

G. Sahakyan

ABOUT SOME TASKS FOR CALCULATING FINITE SUMS

In school and student Olympiads in mathematics, there are often problems related to determining the values of some finite and infinite sums. The solution of some of these problems requires students (students), first of all, to know certain, so-called tabular sums ([1]), such as, for example, the sum of members of an arithmetic or geometric progression, the sum of the squares of the first n odd numbers, etc.. The values of such tabular sums can be found in many sources (see, for example, [1]-[3]). The purpose of this article is to consider some examples of the use of tabular sums for solving problems related to determining the values of finite sums. In such problems, the main method is to reduce the sums under consideration to tabular ones by certain algebraic transformations. In some cases, it is possible to achieve the goal by introducing appropriate variables. The examples given in the article will allow students to get acquainted both with the values of some tabular sums, and with some useful transformations of given sums.

Key words: finit sums, tabular sums

Рассмотрим на примерах решения некоторых задач, связанных с определением конечных сумм.

1. Найти значение сумм вида

$$S_m(a, b, n) = \sum_{k=1}^n \frac{ak + b}{k(k+1)\dots(k+m)}, m \geq 0, m \neq 1.$$

Решение. Известно (см., например, [1]-[3]), что

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\dots(k+m)} = \frac{1}{m} \frac{1}{(m-1)!} - \frac{n!}{(n+m)!} \frac{1}{(m-1)!}.$$

Представим требуемую сумму в виде

$$\begin{aligned} S_m(a, b, n) &= \sum_{k=1}^n \frac{ak + b}{k(k+1)\dots(k+m)} = a \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+m)} + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\dots(k+m)} = \\ &= aS_0(n) + bS_m(n), \end{aligned}$$

где $S_0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\dots(k+m)}$. Далее, преобразуем S_0 следующим образом:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\dots(k+m)} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)\dots(i+m-1)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)\dots(i+m-1)} - \frac{1}{(n+m-1)!} = \\ &= S_{m-1}(n) - \frac{1}{(n+m-1)!} = \frac{1}{m-1} \frac{1}{(m-2)!} - \frac{n!}{(n+m-1)!} \frac{1}{(m-2)!} - \frac{1}{(n+m-1)!} = \\ &= \frac{1}{(m-1)(m-2)!} - \frac{n!}{(m-1)(n+m-1)!} - \frac{1}{(n+m-1)!} = \frac{1}{(m-1)(m-2)!} - \frac{n!+m-1}{(m-1)(n+m-1)!} = \\ &= \frac{1}{m-1} \frac{1}{(m-2)!} - \frac{n!+m-1}{(n+m-1)!} \frac{1}{(m-2)!} \end{aligned}$$

Следовательно, требуемая сумма будет равна

$$S_m(a, b, n) = \frac{a}{m-1} \frac{1}{(m-2)!} - \frac{n!+m-1}{(n+m-1)!} \frac{1}{(m-2)!} + \frac{b}{m} \frac{1}{(m-1)!} - \frac{n!}{(n+m)!} \frac{1}{(m-1)!}$$

Заметим, что так как

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{(n+m)!} = 0$$

то

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} S_m(a, b, n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n \frac{ak+b}{k(k+1)\dots(k+m)} = \frac{a}{(m-1)!(m-1)!} + \frac{b}{m \cdot m!}.$$

2. Найти $\lim_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=2a, 3a, \dots, na} \frac{1}{k^2 - a^2}, a \neq 0$.

Решение. Воспользуемся следующим табличным значением

$$\prod_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)},$$

и выполним замену переменной $k = \frac{k_1}{a}$. Очевидно, что начальным значением переменной k_1 в новой сумме будет $2a$, конечным — na , причем шаг изменения k_1 будет равен a . Тогда получим

$$\prod_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \prod_{k_1=2a}^{na} \frac{1}{(k_1/a)^2 - 1} = a^2 \prod_{k=2a, 3a, \dots, na} \frac{1}{(k_1)^2 - a^2} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)},$$

откуда и будет следовать требуемое выражение:

$$\prod_{k=2a, 3a, \dots, na} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)} \right)$$

Поскольку

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n+1}{2n(n+1)} = 0,$$

то получим

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=2a, 3a, \dots, na} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{3}{4a^2}.$$

3. Требуется найти сумму квадратов n первых целых чисел, делящихся на число p с остатком q .

Решение. Нам понадобятся значения следующих известных сумм:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Поскольку целое число, делящихся на число p с остатком q , можно представить в виде $pk + q$ ($k \in \mathbb{Z}$), то нам понадобится найти значение следующей суммы - $\sum_{k=1}^n (pk + q)^2$. Воспользовавшись вышеприведенными формулами, будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (pk + q)^2 &= p^2 \sum_{k=1}^n k^2 + 2pq \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n q^2 = p^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2pq \frac{n(n+1)}{2} + nq^2 = \\ &= \frac{n}{6} [p^2(n+1)(2n+1) + 6pq(n+1) + 6q^2]. \end{aligned}$$

4. Найти значение суммы $S(n) = \sum_{i=0}^n (i+2)(i+3)^2$.

Решение. Обозначим $k = i + 2$. Тогда искомую сумму можно записать в виде - $\sum_{i=2}^{n+2} k(k+1)^2$.

Для вычисления этой суммы воспользуемся следующей табличной суммой:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

Тогда, очевидно, что

$$\sum_{k=2}^{n+2} k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n+2} k(k+1)^2 - 4 = \frac{1}{12} (n+2)(n+3)(n+4)(3n+11) - 4.$$

5. Вычислить $S = \sum_{i=0}^n \kappa! (\kappa + (\kappa+1)^2 + (\kappa+1)(\kappa+2)^2)$.

Решение. Преобразуем заданную сумму следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^n \kappa! (\kappa + (\kappa+1)^2 + (\kappa+1)(\kappa+2)^2) = \sum_{i=1}^n \kappa! \kappa + \sum_{i=1}^n \kappa! (\kappa+1) + \sum_{i=1}^n \kappa! (\kappa+2)(\kappa+2).$$

Далее, воспользуемся следующей табличной суммой

$$\sum_{i=1}^n \kappa! k = (n+1)! - 1.$$

Используя эту формулу, найдем

$$\sum_{i=1}^n (\kappa+1)!(k+1) = \sum_{i=2}^{n+1} \kappa! k - 1 = (n+2)! - 2,$$

$$\sum_{i=1}^n (\kappa+2)!(k+2) = \sum_{i=3}^{n+2} \kappa! k - \sum_{i=1}^2 \kappa! k 1 = (n+3)! - 6.$$

Следовательно,

$$S = (n+1)! - 1 + (n+2)! - 2 + (n+3)! - 6 = (n+1)!(1 + n + 2 + n + 3) - 8 = 2(n+1)!(n+3) - 9.$$

Լիտերատուրա

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. СПб, БХВ-Петербург, 2011, -1232 с.
2. Zwillinger D., CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 31st ed., 2002.
3. Abramowitz M. and Stegun I. A., eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 1964.

Նյութը ներկայացվել է 5.05.2023,
գրախոսման է ուղարկվել 25.05.2023,
տպագրության ընդունվել 22.06.2023:
Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրՊՀ
մաթեմատիկայի ամբիոնը: