

*Георгий СААКЯН**к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ**E-mail: ter_saak_george@mail.ru*

ПРОГРАММА MATHCAD В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

Գ. Մահակյան

MATHCAD ԾՐԱԳԻՐԸ «ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԱՆԱԼԻԶ» ԱՌԱՐԿԱՅԻ ԴԱՍԱԿԱՆ ԴՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՅՈՒՄ

Ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաները հնարավորություն են տալիս արագացնել և բարելավել ուսումնական գործընթացի արդյունավետությունը, այն սովորելի տեսողական, հարմար դարձնել քննարկող նյութը յուրացնելու համար ([1]-[3]): Մի շարք մաթեմատիկական ծրագրերի օգտագործումը, ինչպիսին է Mathcad-ը, մեր կարծիքով դասերը բավականին արդյունավետ կդարձնեն: Այս տեսանկյունից Mathcad մաթեմատիկական փայտեղծ ունի անհրաժեշտ ռեսուրս մաթեմատիկական տարրեր հասկացությունների նկարագրության, ինչպես նաև մաթեմատիկայի մեջ օգտագործվող քանակությունների և արտահայտությունների հաշվարկման համար: Մյուս կողմից, Mathcad-ն ունի բավականին հարմար ինտերֆեյս, որը թույլ է տալիս շատ կարճ ժամանակում ծանոթանալ իր միջավայրում աշխատելու սկզբունքներին: Մաթեմատիկական փայտեղծի օգտագործումը նաև կիսնայի մաթեմատիկական տարրեր արտահայտություններ (սծանցյալ, ինտեգրալ և այլն) հաշվարկելու համար պահանջվող ժամանակը և դրանով իսկ կմեծացնի արդյունքների վերլուծության ժամանակը, ինչը, ի վերջո, սովորելի կարևոր է, քան դրանց հաշվարկման գործընթացը: Սույն աշխատության նպատակն է դիտարկել Mathcad մաթեմատիկական փայտեղծի կիրառումը «Փունկցիոնալ անալիզ» առարկայի «Մետրիկական, նորմավորված և հիլբերտյան տարածություններ» թեմաների ուսումնասիրման գործընթացում:

Բանալի բառեր՝ մետրիկական, նորմավորված տարածություններ, Mathcad-ի կիրառություններ:

Современные информационные технологии позволяют ускорить и повысить эффективность процесса обучения,

сделать его более наглядным, удобным для усвоения рассматриваемого материала ([1]-[3]). Применение ряда математических программ, таких например, как Mathcad, на наш взгляд позволит занятия сделать достаточно эффективными. С этой точки зрения математический пакет Mathcad обладает необходимым ресурсом для иллюстрации различных математических понятий, а также вычисления используемых в математике величин, выражений. С другой стороны Mathcad имеет достаточно удобный интерфейс, что позволяет за очень короткое время ознакомиться с принципами работы в его среде. Использование математического пакета позволит также сэкономить время, необходимое для вычисления различных математических выражений (производная, интеграл и т.д.) и тем самым увеличить время на анализ полученных результатов, что в конечном счете важнее, чем сам процесс их вычисления. Цель настоящей работы рассмотреть применения математического пакета Mathcad в процессе изучения тем “Метрические, нормированные и гильбертовы пространства” по дисциплине “Функциональный анализ”.

Ключевые слова: метрические, нормированные, гильбертовы пространства, применения Mathcad

G. Sahakyan

MATHCAD PROGRAMM IN THE PROCESS OF TEASHING THE DISCIPLINE «FUNCTIONAL ANALYSIS»

Modern information technologies make it possible to speed up and improve the efficiency of the learning process, make it more visual, convenient for mastering the material under consideration ([1]-[3]). The use of a number of mathematical programs, such as Mathcad, in our opinion, will make classes quite effective. From this point of view, the mathematical package Mathcad has the necessary resource for illustrating various mathematical concepts, as well as calculating the quantities and expressions used in mathematics. On the other hand, Mathcad has a fairly user-friendly interface, which allows you to get acquainted with the principles of working in its environment in a very short time. Using a mathematical package will also save the time required to calculate various mathematical expressions (derivative, integral, etc.) and thereby increase the time for analyzing the results, which is ultimately more important than the process of calculating them. The purpose of this work is to consider the application of the Mathcad mathematical package in the process of studying the topics “Metric, normed and Hilbert spaces” in the discipline “Functional analysis”.

Key words: *metric, normal, hilbert spaces, Mathcad applications.*

Современные информационные технологии позволяют ускорить и повысить эффективность процесса обучения, сделать его более наглядным, удобным для усвоения рассматриваемого материала ([1]-[3]). Применение ряда математических программ, таких например, как Mathcad, на наш взгляд позволит занятия сделать достаточно эффективными. С этой точки зрения математический пакет Mathcad обладает необходимым ресурсом для иллюстрации различных математических понятий, а также вычисления используемых в математике величин, выражений. С другой стороны Mathcad имеет достаточно удобный интерфейс, что позволяет за очень короткое время ознакомиться с принципами работы в его среде. Использование математического пакета позволит также сэкономить время, необходимое для вычисления различных математических выражений (производная, интеграл и т.д.) и тем самым увеличить время на анализ полученных результатов, что в конечном счете важнее, чем сам процесс их вычисления.

Темы “Метрические, нормированные и гильбертовы пространства” являются одними из основных тем, изучаемых на занятиях по дисциплине “Функциональный анализ”. Использование программы MathCad позволит легко и быстро определить значения некоторых величин, рассматриваемых в процессе изучения указанных пространств таких, как расстояние между элементами, нормы элементов, скалярное произведение в некоторых пространствах $(R^n, C[a,b], L^p[a,b])$, определение методом последовательных приближений решения некоторых интегральных уравнений и т.д. Рассмотрим на некоторых примерах, как можно реализовать в среде Mathcad указанные вычисления.

Пример 1. Вычислить расстояние между элементами $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ в

евклидовом пространстве R^3 и нормы элементов x и y .

Решение. Воспользуемся формулами для определения расстояния и нормы в пространстве R^3 .

$$r(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2}, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 x_k^2}.$$

Процесс вычисления в программе MathCad можно реализовать, например, следующим образом.

$$x := \sum_{k=0}^5 \frac{1}{2^k} \quad y := \sum_{k=0}^5 \frac{1}{4^k}$$

$$\sum_{k=0}^5 (x_k - y_k)^2 = 8.775$$

$$\sum_{k=0}^5 x_k^2 = 5.477 \quad \sum_{k=0}^5 y_k^2 = 6.403$$

Таким образом

$$r(x, y) = 8.775, \|x\| = 5.477, \|y\| = 6.403.$$

Заметим, что в программе MathCad начальное значение индекса в суммах и произведениях по умолчанию равно нулю.

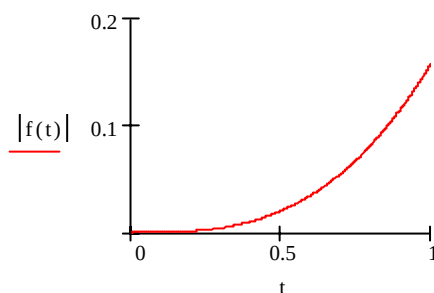
Пример 2. Определить расстояние между функциями $x(t) = t$ и $y(t) = \sin t$ в пространстве $C[0,1]$ и вычислить норму $y(t)$.

Решение. Из курса функционального анализа известно, что метрика в пространстве $C[0,1]$

определяется следующей формулой: $r(x, y) = \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$, а норма -

$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$. Для определения максимальных значений модулей в этих формулах можно воспользоваться как графическим построением, так и используя традиционный способ определения наибольших значений функции. Ниже приводится реализация этих двух способов в программе MathCad.

$$f(t) := t - \sin(t)$$



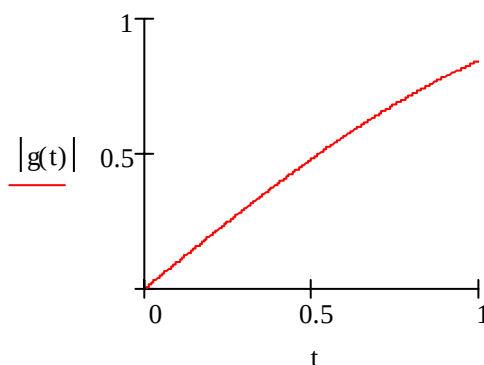
$$\frac{d}{dt}f(t) \approx 1 - \cos(t) \text{ solve } , t \approx 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0.159$$

Для вычисления нормы построим график функции $|\sin x|$ на отрезке $[0, 1]$.

$$g(t) := \sin(t)$$



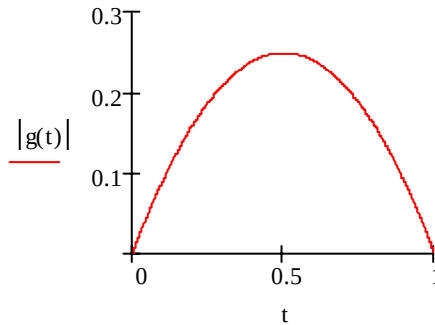
Из графика видно, что $\|y\| = \max_{t \in [0,1]} |y(t)| = \max_{t \in [0,1]} |\sin t| = \sin(1) \approx 0.841$. Следовательно,

$$r(t, \sin) = \max_{t \in [0,1]} |t - \sin t| = 0.159, \quad \|y\| = 0.841.$$

Пример 3. Определить расстояние между функциями $x(t) = t^2$ и $y(t) = t$ в пространстве $C[0,1]$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру будем иметь

$$g(t) := t^2 - t$$



$$\frac{d}{dt}g(t) \stackrel{0}{=} 2t - 1 \text{ solve, } t \stackrel{0}{=} \frac{1}{2}$$

$$|g(0)| = 0 \quad |g(1)| = 0 \quad |g(0.5)| = 0.25$$

Сравнивая полученные

значения,

получим, что $r(t^2, t) = \max_{t \in [0,1]} |t^2 - t| = 0.25$.

Пример 4. Определить расстояние между парами функций $x(t) = t$, $y(t) = \sin t$ и $x(t) = t^2$, $y(t) = t$ в пространстве $L[0,1]$.

Решение. Метрика в пространстве $L[0,1]$ определяется следующей формулой

$$r(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt,$$

вычисление по которой легко произвести в программе MathCad:

$$\int_0^1 |t - \sin(t)| dt = 0.04 \quad \int_0^1 |t^2 - t| dt = 0.167$$

Следовательно,

$$r(t, \sin t) = \int_0^1 |t - \sin(t)| dt \gg 0.04 \quad \text{и} \quad r(t^2, t) = \int_0^1 |t^2 - t| dt \gg 0.167.$$

Пример 5. Сравнить значения расстояний между функциями $x(t) = t$ и $y(t) = \sin t$ в пространствах $L^2[0,1]$ и $L^4[0,1]$.

Решение. Метрика в пространстве $L^p[0,1]$ определяется формулой

$r(x, y) = \sqrt[p]{\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt}$, воспользовавшись которой последовательно найдем

$$\sqrt[2]{\int_0^1 (|t - \sin(t)|)^2 dt} = 0.061$$

$$\sqrt[4]{\int_0^1 (|t - \sin(t)|)^4 dt} = 0.084$$

Таким образом

$$r(t, \sin t) = \sqrt[2]{\int_0^1 |t - \sin(t)|^2 dt} \gg 0.61 \text{ и}$$

$$r(t, \sin t) = \sqrt[4]{\int_0^1 |t - \sin(t)|^4 dt} \gg 0.84.$$

Из полученных значений следует, что расстояние между заданными функциями в пространстве $L^4[0,1]$ больше расстояния в пространстве $L^2[0,1]$.

Пример 6. Вычислить скалярное произведение функций $x(t) = t$ и $y(t) = \sin t$ в пространстве $L^2[0,1]$.

Решение. Воспользуемся формулой для определения скалярного произведения в пространстве $L^2[0,1]$. Имеем

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Процесс вычисления скалярного произведения в Mathcad-е приводится ниже.

$$f(t) := t \quad g(t) := \sin(t)$$

$$\text{scal}(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t) dt \quad \text{scal}(f, g) = 0.301$$

Следовательно, $(f, g) = 0.301$.

Пример 7. Применив процесс ортогонализации Шмидта к заданным векторам

$f_1 = (4; 3; -12)$, $f_2 = (1; 2; 3)$ и $f_3 = (-2; 5; 6)$, получить ортонормированный базис в пространстве R^3 .

Решение. Воспользуемся соответствующими формулами для организации процесса Шмидта (см. [5], стр. 127) Имеем

$$j_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, a_{21} = (f_2, j_1), g_2 = f_2 - a_{21}j_1, j_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, a_{31} = (f_3, j_1), a_{32} = (f_3, j_2),$$

$$g_3 = f_3 - a_{31}j_1 - a_{32}j_2, j_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}.$$

Процесс вычисления в среде MathCad представлен ниже:

$$f1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$f2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A := \text{augment}(f1, f2, f3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -12 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -156$$

$$\text{norm}(f_1) := \sqrt{\sum_{i=0}^2 (f_1)_i^2}$$

$$f_1 := \frac{f_1}{\text{norm}(f_1)}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0.308 \\ 0.231 \\ -0.923 \end{pmatrix}$$

$$a_{21} := f_2 \cdot f_1$$

$$g_2 := f_2 - a_{21} \cdot f_1$$

$$f_2 := \frac{g_2}{\text{norm}(g_2)}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0.511 \\ 0.778 \\ 0.365 \end{pmatrix}$$

$$a_{31} := f_3 \cdot f_1$$

$$a_{32} := f_3 \cdot f_2$$

$$g_3 := f_3 - a_{31} \cdot f_1 - a_{32} \cdot f_2$$

$$f_3 := \frac{g_3}{\text{norm}(g_3)}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0.803 \\ 0.584 \\ -0.122 \end{pmatrix}$$

Заметим, что для применения процесса ортогонализации Шмидта, необходимо, чтобы заданная система векторов была бы линейно независима. Для проверки - во второй строке вычислений с помощью функции **augment** из заданных векторов создается матрица $A \left(|A| \right)$, а затем вычисляется ее детерминант. И так как $|A| \neq 0$, то заданная система векторов линейно независима. В заключительной части вычислений можно убедиться в том, что построенная система векторов является ортонормированной. Имеем

$$f_1 \cdot f_1 = 1$$

$$f_2 \cdot f_2 = 1$$

$$f_3 \cdot f_3 = 1$$

$$f_1 \cdot f_2 = 0$$

$$f_1 \cdot f_3 = 0$$

$$f_2 \cdot f_3 = 0$$

Таким образом, система векторов

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0.308 \\ 0.231 \\ -0.923 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0.511 \\ 0.778 \\ 0.365 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0.803 \\ 0.584 \\ -0.122 \end{pmatrix}$$

является ортонормированным базисом в пространстве R^3 , что и требовалось получить.

Пример 7. Найти первые пять приближений для решения интегрального уравнения

$$f(t) = \int_0^1 K(x, t) f(x) dx + f(t),$$

где $K(x, t) = x + t$, $f(t) = t$.

Решение. Поскольку функции $K(x, t)$ и $f(t)$ непрерывны соответственно на $[0, 1] \times [0, 1]$ и $[0, 1]$, то в данном случае мы можем воспользоваться методом последовательных приближений для получения требуемых значений (см. [5], стр.56). Ниже приводится процесс получения соответствующих приближений:

$$K(x, t) := x + t \quad f(t) := t$$

$$f_0(t) := 1$$

$$f_1(t) := \int_0^1 K(x, t) f_0(x) dx + f(t) = \frac{1}{2} + 2x$$

$$f_2(t) := \int_0^1 K(x, t) f_1(x) dx + f(t) = \frac{1}{4} + \frac{5}{2}x + 2x^2$$

$$f_3(t) := \int_0^1 K(x, t) f_2(x) dx + f(t) = \frac{1}{8} + \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}x^2 + 2x^3$$

$$f_4(t) := \int_0^1 K(x, t) f_3(x) dx + f(t) = \frac{1}{16} + \frac{19}{8}x + \frac{17}{4}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + 2x^4$$

$$f_5(t) := \int_0^1 K(x, t) f_4(x) dx + f(t) = \frac{1}{32} + \frac{9}{4}x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^4 + 2x^5$$

Пример 8. Найти первые 10 коэффициентов Фурье для функции $f(t) = t$ в ортогональном базисе $\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \dots, \cos(2\pi n t), \sin(2\pi n t), \dots$ пространства $L_2[0, 1]$.

Решение. Известно, что в ортогональном базисе $\{j_n\}$ коэффициенты Фурье для функции $f(t)$ определяются следующими формулами (см. [5], стр. 132)

$$a_n = \frac{(f, j_n)}{\|j_n\|},$$

где (f, j_n) означает скалярное произведение в заданном пространстве. В пространстве $L_2[0,1]$

$$\|j_n\| = \sqrt{\int_0^1 j_n^2(t) dt}, \quad (f, j_n) = \int_0^1 f(t) j_n(t) dt.$$

Поскольку используемые формулы повторяются, то необходимые вычисления можно организовать воспользовавшись имеющимся в ресурсах MathCad оператором цикла **for**

$$\text{Furje1}(n) := \text{for } i \hat{=} 1, 3..n$$

$$N_i \leftarrow \int_0^1 (\cos(2\pi x t))^2 dt$$

$$C_i \leftarrow \frac{\int_0^1 t \cos(2\pi x t) dt}{N_i}$$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	$2.946 \cdot 10^{-15}$
8	0
9	0

$$\text{Furje2}(n) := \text{for } i \hat{=} 2, 4..n$$

$$N_i \leftarrow \int_0^1 (\sin(2\pi x t))^2 dt$$

$$C_i \leftarrow \frac{\int_0^1 t \sin(2\pi x t) dt}{N_i}$$

$$\text{Furje2}(8) =$$

0	0
0	÷
-0.113	÷
0	÷
-0.056	÷
0	÷
-0.038	÷
0	÷
-0.028	÷

Из полученных результатов следует, что коэффициенты при косинусах равны нулю. Что касается коэффициентов при синусах, то будем иметь

$$c_2 = -0.113, c_4 = -0.056, c_6 = -0.038, c_8 = -0.028$$

Լիտերատուրա

1. Эргашев Ж.Б., Пути оптимизации преподавания высшей математики с применением информационных технологий. //Молодой ученый.-2013, N8 (55), с. 450-452.
2. Зайцева Ж.И., Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий. Библиотека авторефератов и диссертаций по педагогике. <http://nauka-pedagogika.com/pedagogika-13-00-08/dissertaciya-metodika-prepodavaniya-vysshey-matematiki-s-primeneniem-novyh-informatsionnyh-tehnologiy#ixzz6YNeOUiyh>
6. Ушакова В. А., Использование информационных технологий на уроках математики // Молодой ученый. — 2016. — №8. — с. 1053-1055. — URL: <https://moluch.ru/archive/112/28735/>
3. Սահակյան Գ.Հ., Mathcad 2000: Ուսումնական ձեռնարկ: Եր., 2004, 148 էջ:
4. Սահակյան Գ.Հ. Ֆունկցիոնալ անալիզի հիմունքներ: «Եղիտ Պրինտ», Ստեփանակերտ, 2021:

Նյութը ներկայացվել է 5.05.2023,

գրախոսման է ուղարկվել 25.05.2023,

տպագրության ընդունվել 22.06.2023:

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական
խորհրդի անդամ, ֆ.ս.գ.դ. Տ.Ն. Հարությունյանը :